国外电子与通信教材系列

电磁波理论

Electromagnetic Wave Theory

[美] Jin Au Kong 著

吴 季 等译



電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

http://www.phei.com.cn

电磁波理论

Electromagnetic Wave Theory

本书详细介绍了基于麦克斯韦方程组的电磁波的完整理论，主要内容包括电磁波理论中的基本定律与方程，传输线理论，电磁波的反射、透射、折射、绕射和散射，波导和谐振腔，辐射和天线理论基础，以及在狭义相对论指导下的、从洛伦兹协变的角度理解的麦克斯韦电磁波理论。在内容的讲解中，本书特别强调了波矢量在电磁波理论中的重要性，并将这一观点应用贯穿于全书。

本书是麻省理工学院的电磁波理论教材，广泛适用于大专院校与电磁波相关专业的高年级学生，也可作为从事电磁场与电磁波、微波工程技术、天线理论与设计、雷达技术、微波遥感、通信系统、射电天文学、生物电磁学以及工业电磁理论等方面研究和设计工作的科技人员的重要参考书。

本书内容可作为许多学科的基础教材，虽然所涉及的理论非常完备，但是各章之间仍具有一定的独立性。因此在把本书作为教材使用时，某一具体专业的课程可根据需要只选择部分内容讲授。

作译者简介

Jin Au Kong（孔金瓯）：IEEE会士，美国麻省理工学院电子工程与计算机科学系教授、电子学研究实验室电磁波理论和应用中心主任，国际电磁科学院主席，出版了包括《电磁波理论》在内的30余本学术论著，发表过600余篇学术论文，长期担任《电磁波及应用》学术期刊总编。

吴季：IEEE高级会员，中科院空间科学与应用研究中心研究员、中国科学院研究生院教授、博士生导师，1995年至现在主要从事空间微波遥感理论与技术方面的研究工作，先后作为访问学者应邀在麻省理工学院、麻省州立大学阿穆赫斯特分校以及得州大学阿灵顿分校短期工作，发表学术论文60余篇。







责任编辑：束传政
特约编辑：李　莉
封面设计：毛惠庚

ISBN 7-5053-8464-3/TN · 1754　　定价：52.00元

国外电子与通信教材系列

电磁波理论

Electromagnetic Wave Theory

[美] Jin Au Kong 著

吴 季 等译

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内容简介

本书详细介绍了基于麦克斯韦方程组的电磁波的完整理论，主要内容包括电磁波理论中的基本定律与方程，传输线理论，电磁波的反射、透射、折射、绕射和散射，波导和谐振腔，辐射和天线理论基础，以及在狭义相对论指导下的、从洛伦兹协变的角度理解的麦克斯韦电磁波理论。在内容的讲解中，本书特别强调了波矢量在电磁波理论中的重要性，并将这一观点应用贯穿于全书。

本书是麻省理工学院的电磁波理论教材，适用于大专院校与电磁波相关专业的高年级学生，也可作为从事电磁场与电磁波、微波工程技术、天线理论与设计、雷达技术、微波遥感、通信系统、射电天文学、生物电磁学以及工业电磁理论等方面研究和设计工作的科技人员的重要参考书。

本书内容可作为许多学科的基础教材，虽然所涉及的理论非常完备，但是各章之间仍具有一定的独立性。因此在把本书作为教材使用时，某一具体专业的课程可根据需要只选择部分内容讲授。

图书在版编目(CIP)数据

电磁波理论/(美)孔金瓯(Kong,J. A.)著；吴季等译. —北京：电子工业出版社，2003.1

(国外电子与通信教材系列)

书名原文：Electromagnetic Wave Theory

ISBN 7-5053-8464-3

Ⅰ.电… Ⅱ.①孔… ②吴… Ⅲ.电磁波—理论—高等学校—教材 Ⅳ.O441.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第004565号

责任编辑：束传政　　特约编辑：李　莉

印 刷 者：北京天竺颖华印刷厂

出版发行：电子工业出版社　http://www.phei.com.cn

北京市海淀区万寿路173信箱　邮编100036

经　　销：各地新华书店

开　　本：787×1092　1/16　印张：36.5　字数：931千字

版　　次：2003年2月第1版　2003年2月第1次印刷

印　　数：5000册　　定价：52.00元

凡购买电子工业出版社的图书，如有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系。

联系电话：(010)68279077

译 者 序

本书为美国麻省理工学院电子工程系 Jin Au Kong(孔金瓯)教授在多年教授电磁波理论课程的基础上,汇集多年教学经验的精华而成的大学高年级和研究生教材。

孔金瓯教授早年师从美国纽约州立大学 Syracuse 分校的郑均先生,毕业后到麻省理工学院任教,成为院长及著名电磁理论学家 Stratton 的助手和得意门生。在 Stratton 教授去世后,他继续承办著名的电磁科学院,并于 1989 年创立了至今影响度非常高的"电磁理论进展(PIERS)系列国际会议"。

他在 36 岁时出版的第一本电磁波理论专著《电磁波理论》就以其精深的理论轰动了学界。其后该书于 20 世纪 80 年代补充改版再次发行。本书是前版的再一次改版更新,主要增加了大量的例题,以及许多专题论述。

1998 年,本人在麻省理工学院孔金瓯教授领导的实验室做访问工作时,受命向国内读者介绍、翻译本书。由于本人学识有限,时间有限,因此动员了国内许多同事共同参加了翻译工作。具体的分工:第 2 章和第 3 章由董晓龙博士负责,第 5 章由董维仁教授负责,第 6 章由王丽巍负责,第 7 章由李涤徽博士负责,本人负责第 1 章和第 4 章,以及全书的统稿和内容的校核。

由于全书内容非常丰富,所涉及的学科面很宽,因此在翻译的过程中大家都遇到了程度不同的困难。特别是原版书中的排印错误比较多,需要一一分辨出来。因此,尽管我们付出了很大的努力,译文中仍会出现一些错误。在此我代表所有译者向读者表示歉意。同时我们希望读者在阅读本书时将发现的错误和不明之处及时通告我们,我们将在原书作者的帮助下,力争在再版时予以更正。联系地址:北京 8701 信箱(邮编 100080),E-mail:wuji@center.cssar.ac.cn

尽管书中会出现一些错误,但是总体上来说,本书不同于一般电磁场理论和电磁波方面的教材。它对所阐述理论的深入讲解,必会将读者带入一个新的境界。这也是我们这些译者两年来努力工作的动力之一。如果读者在读了本书后能够得到与我们相似的感受,我们将会感到十分的欣慰。在此书行将出版之际,原著的新版已经面市。经过初步对比,新版除增加了部分习题之外,内容上并无更多的差异。

感谢电子工业出版社的领导。在绝大多数出版商都在极力追求商业利润的时代,电子工业出版社决策出版这样的基础性教材是非常难得的,这充分表示了他们对本行业学术发展的洞察力和热爱。在此我还要感谢本书的编辑、校对、排版人员,他们做了大量认真细致繁琐的具体工作,我向他们的敬业精神和工作态度表示敬佩与感激。

吴 季

2003.2. 北京

原 版 序

本书站在麦克斯韦方程及其本构关系形式不变的立场上,阐述了在狭义相对论原理指导下的、统一的宏观电磁理论。其中特别强调了电磁波理论中波矢量 $\bar{k}$ 的基础性和重要性。书中引入了一个基本单位 $K_0 = 2\pi m^{-1}$ 并称之为空间频率,代表每米空间中电磁波的变化周数。这同时间上的频率单位 Hz 十分相似,代表了每秒钟时间里电磁波变化的周数。单位 K_0 正比于光速乘以单位 Hz,即当空间频率 $K_0 = 1$ 时,时间频率为 300MHz。

这是一本关于电磁波理论的教科书,但对理解电磁波能够起到本质性作用的一些专题也包括在其中。第 1 章引出了电磁波理论中的基本定律与方程;第 2 章讲解传输线理论;第 3 章研究时谐电磁场问题,并演绎出 *kDB* 系统以解决各向不均匀和双向均匀介质中的电磁波传播问题,还详细推导了电磁波的反射、透射、波导和谐振问题;第 4 章以切连科夫 Cerenkov 辐射作引导,研究了辐射和天线理论;第 5 章则推导了对于电磁波传播十分重要的各种定理和麦克斯韦方程的局限性;第 6 章论述了球体、柱体、粗糙面和非均匀体的散射问题;第 7 章站在狭义相对论指导下的洛伦兹协变的角度介绍了麦克斯韦理论。各节后面附的习题向读者提供了必要的练习和应用展示。书中所选列的各种专题可以单独讲授。全书内容的安排遵循了数学上的由易到难,以及概念上的由直观到抽象、繁琐。

符号的运用是有规律的。将用下标和上标来描述 $\bar{k}$ 以区分不同的波矢量和它们的分量,而不是用不同的字符。一个矢量 $\bar{A}$ 用带有上划线的字符来表示,具有单位幅度值的单位矢量 $\hat{A}$ 用带有三角幅的字符来表示,而张量或矩阵 $\bar{\bar{A}}$ 用带有双上划线的字符来表示① 在直角坐标系当中,矢量 $\bar{A}$ 被表示为 $\bar{A} = \hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z$,其中 $\hat{x}$, $\hat{y}$ 和 $\hat{z}$ 分别为 x, y 和 z 方向上的单位矢量。在圆柱坐标系中,三个方向上的单位矢量为 ρ, ϕ 和 z,其中 ϕ 为由 x 轴起算的极角;$\hat{\rho}$ 为 x-y 平面上的单位径向矢量。球坐标系采用 r, θ 和 ϕ 来做标记,其中 r 是径向单位矢量;θ 为由 z 轴起算的夹角。复变量的实部用 A_R 来表示,虚部用 A_I 来表示。对波矢量 $\bar{k}$,其在直角坐标系下的分解为 k_x, k_y, k_z;在圆柱坐标系下的分解为 k_ρ, k_ϕ, k_z;在球坐标系下的分解为 k_r, k_θ 和 k_ϕ。例如,介质 1 中的波矢量 $\bar{k}$ 的 z 分量的实部和虚部可表示为 k_{1zR} 和 k_{1zI}。对时谐场中的时间因子,在第 2 章中我们用 $e^{j\omega t}$ 来表示,这有助于使读者联想起电路理论中形式相似的方程,同时也符合传输线理论中的惯例。从第 3 章起,我们就改用 $e^{-j\omega t}$ 来表示时谐场中的时间因子,这将与量子理论中的表达方式相同,并便于在复平面中积分。因此无论是在实的时空中、k 空间中还是在 ω 空间中,场量都以明确的独立变量来表示,从而避免了不同符号,或是相同符号但不同形状带来的混淆。在四维空间中,协变张量用加下标来表示,反变张量用加上标来表示。

本书是我在麻省理工学院教授本科与研究生课程的教材。第 1 版曾经于 1975 年由 Wiley Interscience, New York 出版,书名叫《电磁波理论》(Theory of Electromagnetic Waves)。1986 年曾对该书进行修改和再发行,并将书名改为目前的书名。本书的第 2 版于 1990 年问世。书中各种概念的发展主要依赖于大量的已经发表的文章、著作。在本书最后参考文献中所列的著作和

---

① 在译为中文时,统一将矢量、张量、矩阵的符号改用了黑斜体。

期刊文章只是最具代表性的而不是全部。书中一些研究结论与结果出自我本人承担的研究项目。这些项目的经费与合同来自国家科学基金会,国家航空与航天局,海军研究部,陆军研究部,加州理工学院的喷气动力实验室,麻省理工学院林肯实验室,施伦伯格-多尔研究中心,DEC公司和IBM公司。在本书的撰写和准备过程中,许多人给予了帮助。特别需要感谢的是Chi On Ao,是他帮助我为这一版书编制了TEX程序的宏指令,精心排版并建立了索引。张雁和Bae-Ian Wu负责了许多习题的解答和制图工作,而Henning Braunisch负责了文字的校对。多年来,教学和研究助手都对本书的内容提出过有价值的建议和进行了校读,特别是郑亮(Leung Tsang)、米歇尔·祖尼卡(Michael Zuniga)、周文(Weng Chew)、塔瑞克·哈比什(Tarek Habashy)、罗伯特·辛(Robert Shin)、庄淑连(Shun-lien Chuang)、李昆杰(Jay Kyoon Lee)、阿普·赛兹基那(Apo Sezginer)、朴书云(Soon Yun Poh)、艾瑞克·杨(Eric Yang)、米歇尔·许(Michael Tsuk)和韩崔奇(Hsiu Chi Han)。我愿向他们表示感谢,并向那些在我讲课时表现出积极响应,连续反馈和令我满足的学生们表示感谢。

孔金瓯(Jin Au Kong)
麻省剑桥城
1999年3月

目　　录

第1章 基本概念

1.1 自由空间中的麦克斯韦方程组

电场与磁场的定律是詹姆斯·克拉克·麦克斯韦(1831—1879年)于1873年建立的。若采用三维空间中的矢量符号,麦克斯韦方程组为

$$\nabla\times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.1.1}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.1.2}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)=\rho(\boldsymbol{r},t) \tag{1.1.3}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{1.1.4}$$

其中,$\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{H}$,$\boldsymbol{D}$,$\boldsymbol{J}$和ρ是位置与时间的实变函数。

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$—电场强度(V/m)　　$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)$—电位移(C/m^2)

$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$—磁通量密度(Wb/m^2)　　$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$—电流密度(A/m^2)

$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$—磁场强度(A/m)　　$\rho(\boldsymbol{r},t)$—电荷密度(C/m^3)

方程(1.1.1)是安培定律或称一般性的安培电路定律。方程(1.1.2)是法拉第定律或称法拉第磁感应定律。方程(1.1.3)是库仑定律或称电场的高斯定律。方程(1.1.4)是高斯定律或称磁场的高斯定律。麦克斯韦对电磁定律的贡献是在安培定律(1.1.1)中增加了电位移项$\partial\boldsymbol{D}/\partial t$。

电流密度$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$和电荷密度$\rho(\boldsymbol{r},t)$之间的关系遵循连续性定理

$$\nabla\cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{r},t) \tag{1.1.5}$$

其描述了电流和电荷的密度在$\boldsymbol{r}$处是守恒的。在$\boldsymbol{r}$处一个无限小的体积中电流$\boldsymbol{J}$的散度等于此处电荷密度ρ随时间t减少的变化率。

自由空间中的本构关系

麦克斯韦方程组是自由空间与介质中电磁场的基本定律。自由空间的特性由下面的物质本构关系确定。

$$\boldsymbol{D}=\epsilon_0\boldsymbol{E} \tag{1.1.6a}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H} \tag{1.1.6b}$$

其中,$\epsilon_0\approx 8.85\times10^{-12}$(F/m),$\mu_0\approx 4\pi\times10^{-7}$(H/m),分别为自由空间中的介电常数与磁导率。

波动方程

微分形式的麦克斯韦方程组在自由空间中的任何一点都成立。首先来研究麦克斯韦方程

组在无源,即 $\boldsymbol{J}=\rho=0$ 区域中的解。这并不是说在整个空间中没有源存在,而只是指在我们感兴趣的区域中不存在源。这样,自由空间无源区域中的麦克斯韦方程组就变为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E} \tag{1.1.7}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{H} \tag{1.1.8}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0 \tag{1.1.9}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0 \tag{1.1.10}$$

如果表示成标量偏微分方程,我们有

$$\frac{\partial}{\partial y}H_z-\frac{\partial}{\partial z}H_y=\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}E_x \tag{1.1.11a}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}H_x-\frac{\partial}{\partial x}H_z=\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}E_y \tag{1.1.11b}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}H_y-\frac{\partial}{\partial y}H_x=\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}E_z \tag{1.1.11c}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}E_z-\frac{\partial}{\partial z}E_y=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}H_x \tag{1.1.12a}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}E_x-\frac{\partial}{\partial x}E_z=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}H_y \tag{1.1.12b}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}E_y-\frac{\partial}{\partial y}E_x=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}H_z \tag{1.1.12c}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}E_x+\frac{\partial}{\partial y}E_y+\frac{\partial}{\partial z}E_z=0 \tag{1.1.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}H_x+\frac{\partial}{\partial y}H_y+\frac{\partial}{\partial z}H_z=0 \tag{1.1.14}$$

关于 $\boldsymbol{E}$ 的波动方程可以通过从方程(1.1.11)和(1.1.12)中消去 $\boldsymbol{H}$ 得到。将(1.1.11a)两边对时间求导,然后将(1.1.12c)和(1.1.12b)代入,我们有

$$\begin{aligned}\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_x&=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}E_y-\frac{\partial}{\partial y}E_x\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}E_x-\frac{\partial}{\partial x}E_z\right)\\&=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)E_x\end{aligned}$$

其中,也利用了式(1.1.13)。这样就得到了如下关于 $\boldsymbol{E}$ 的三个分量的方程组。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E_x=0 \tag{1.1.14a}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E_y=0 \tag{1.1.14b}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E_z=0 \tag{1.1.14c}$$

采用直角坐标系中的拉普拉斯算符 ∇^2,

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.1.15}$$

我们有

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}=0 \tag{1.1.16}$$

这就是通常所称的亥姆霍兹(Helmholtz)波动方程。

波动方程的解

满足波动方程(1.1.16)和麦克斯韦方程组的解就是电磁波。我们现在研究当 $E_y = E_z = 0$ 时,方程(1.1.14a)的解。这是一种电磁波沿 $\hat{z}$ 方向传播的情形。假设 E_x 只是 z 和 t 的函数,独立于 x 和 y,则电场矢量可以写为

$$\boldsymbol{E} = \hat{x}E_x(z,t)$$

它所应满足的波动方程(1.1.16)就简化为

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}E_x - \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_x = 0 \tag{1.1.17}$$

式(1.1.17)的最简解为

$$\boldsymbol{E} = \hat{x}E_x(z,t) = \hat{x}E_0\cos(kz - \omega t) \tag{1.1.18}$$

将(1.1.18)代入(1.1.17)式我们发现,如下称为色散关系的方程必须得到满足,这个色散关系式给出了空间频率 k 和时间频率 ω 之间的重要联系。

$$k^2 = \omega^2\mu_o\varepsilon_o \tag{1.1.19}$$

在研究如 $E_x(z,t)$ 的空间时间变量时有两种有用的观察方式。时间观察方式是在固定的空间位置观察变量随时间的变化。空间观察方式是在不同的确定时刻观察变量的空间变化,如同进行许多次照相一样。

采用时间观察方式,应先将注意力集中到空间中的一个点上,如 $z=0$。这样电场就可表示为 $E_x(z=0,t)=E_0\cos\omega t$。将其沿时间轴描述,如图 1.1-1 所示,发现波形每隔 $\omega t = 2m\pi$,时间就重复一次,其中 m 为任意整数。因此将时间周期定义为 T,$\omega T = 2\pi$。每一秒钟时间波形变化的周期数即是频率 f,定义 $f = 1/T$,由此得到

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \tag{1.1.20}$$

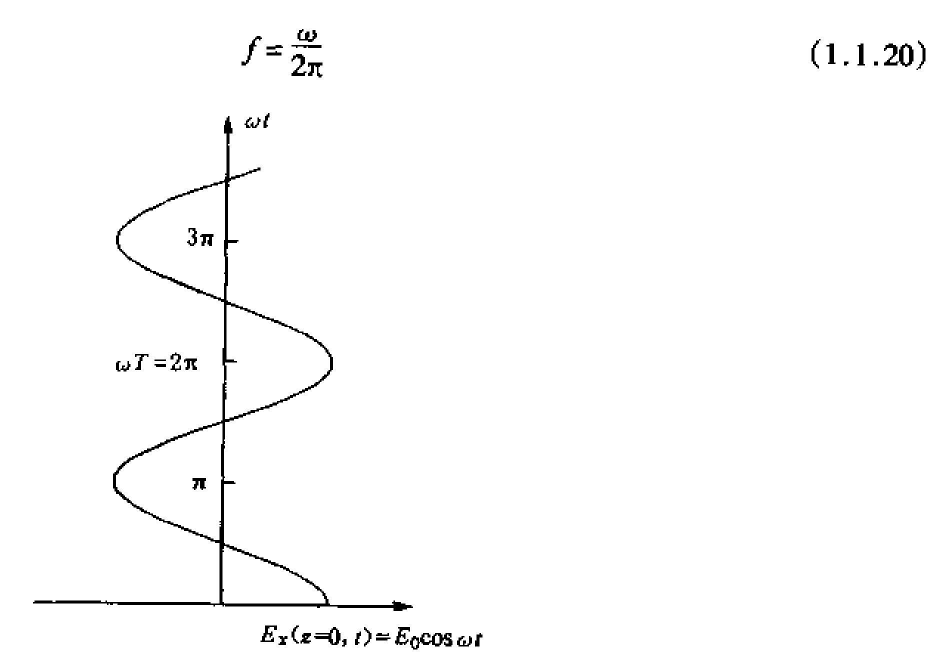


图 1.1-1 在 $z=0$ 点作为 ωt 的函数的电场强度

频率的单位是赫兹(Hz),$1\text{Hz} = 1\text{s}^{-1}$(每秒的周数)。由于 $\omega = 2\pi f$,ω 就是波的角频率。

在本书中，通常用 ω 来表示频率，这只是因为 ω 比 f 更经常遇到。时间频率 ω 描述了波随时间变化的特性。在图 1.1-2(a)中，描述了 $E_x(z=0,t)$随时间 t 而不是 ωt 的变化，将 1s 的波形变化表示为一个周期，这样 $f=f_o=1\mathrm{s}^{-1}=1\mathrm{Hz}$，并令 $\omega=\omega_o=2\pi\ \mathrm{s}^{-1}$。在图 1.1-2(b)中，我们给出了 $\omega=2\omega_o$ 的波形，其在 1s 的时间间隔内有两个周期，每一个周期用的时间是 0.5s。在图 1.1-2(c)中，$\omega=3\omega_o$，其在 1s 的时间间隔内有三个周期。

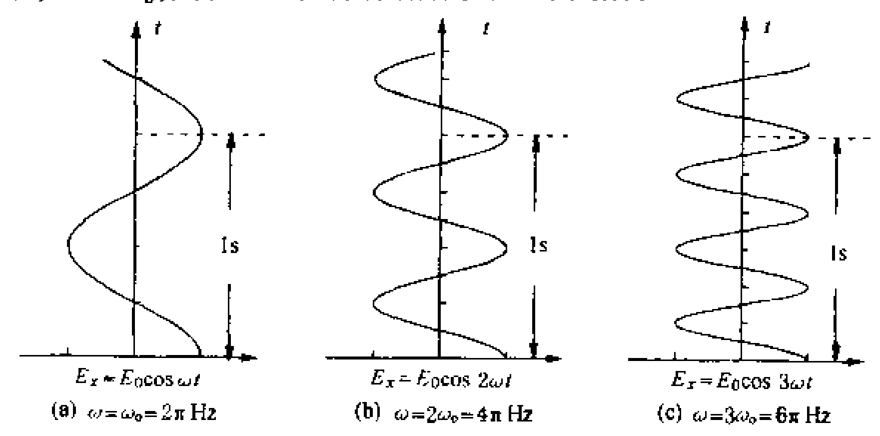


图 1.1-2 不同频率 ω 下的电场强度与时间的关系

1.1.1 空间频率 k

为了用空间观察的方式研究波的行为，可令 $\omega t=0$ 且将 $E_x(z,t=0)$示于图 1.1-3 中。其波形在空间每隔 $kz=2m\pi$ 就重复一次，其中 m 为任意整数。空间频率 k 描述了波在空间中的变化特征。波长 λ 定义为空间中的距离，满足 $k\lambda=2\pi$。这样就有 $\lambda=2\pi/k$，或

$$k=\frac{2\pi}{\lambda} \tag{1.1.21}$$

我们将 k 称为空间频率或波数，它等于每 2π 空间距离中的波长数，其量纲为长度量纲的倒数。

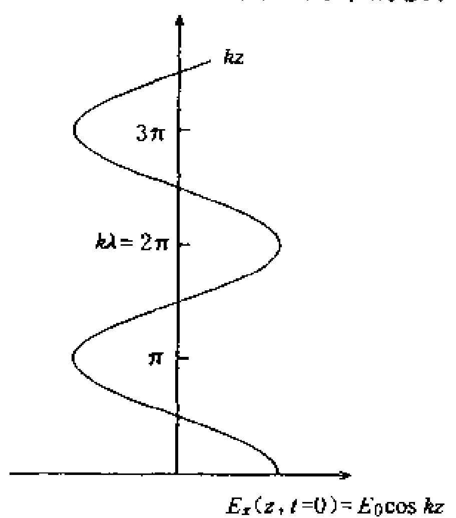


图 1.1-3 当 $t=0$ 时，作为 kz 的函数的电场强度

为了进一步理解空间频率 k 的含义，我们在图 1.1-4(a)中给出以 z 而不是 kz 为变量的 $E_x(z,t=0)$。在一个 1m 的波长中恰有一个变化周期，我们定义 $\mathrm{K_o}=2\pi\mathrm{m}^{-1}$，就有 $k=\mathrm{K_o}=2\pi\mathrm{m}^{-1}$。在图 1.1-4(b)中，$k=2\mathrm{K_o}$，即在 1m 的空间距离中有两个变化周期，波长等于 0.5m。在图 1.1-4(c)中，$k=3\mathrm{K_o}$，在 1m 的空间距离中有三个变化周期。

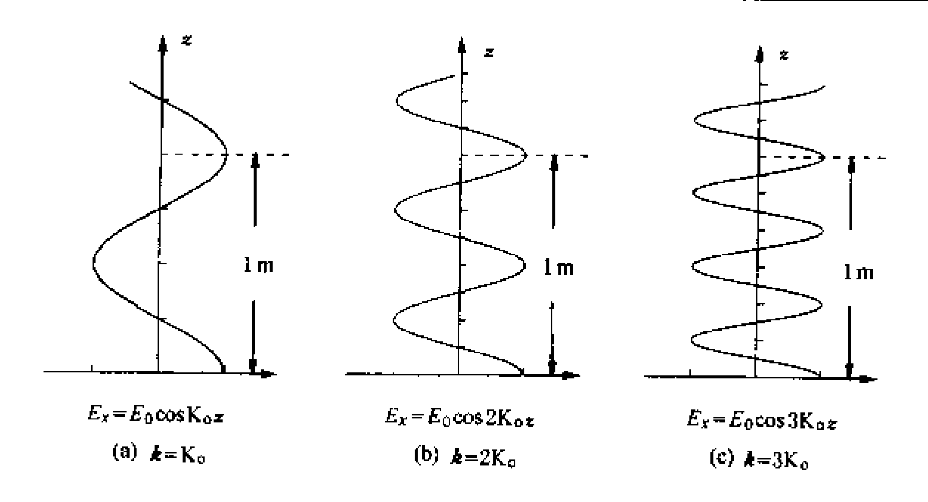


图 1.1-4 不同空间频率 k 时,电场强度与空间距离 z 的关系

我们定义空间频率的基本单位 K_o,

$$K_o = 2\pi m^{-1} \tag{1.1.22}$$

与在时间变量中的单位 Hz 表示每秒钟的变化周期数一样,K_o 在空间变量中表示每米空间中的变化周期数。对一个在每米空间距离上变化一个周期的波,我们有 $k = 1K_o$。一个 $k = 5K_o$ 的自由空间中的电磁波,它在 1m 的空间距离上将会变化 5 个周期。由电磁波的色散关系可知,空间频率与时间频率是由光速联系在一起的。在自由空间中,变换因子为 3×10^8。因此,对空间频率 $1K_o$,其对应的时间频率为 300MHz。

从 $0.01K_o$ 到 $100K_o$ 的空间频率,是电磁波用于微波加热、雷达、导航以及广播、电视和卫星通信载波的主要区间。可见光的空间频率波段是 $1.4\times10^8\sim2.6\times10^6K_o$。图 1.1-5 显示的电磁波谱段既采用了空间频率坐标(K_o)和以米(m)为单位的波长也采用了时间频率(Hz),以及以电子伏特(eV)为单位的能量坐标。

在本书中非常重视 k 的使用,它在电磁波理论中比更为流行的波长 λ 和频率 f 更为基础和重要。对 $k = AK_o$,波长的对应值为 $\lambda = 2\pi/k = 2\pi/AK_o = 1/A$m,频率的对应值为 $f = ck/2\pi = cAK_o/2\pi = 3\times10^8A$ Hz。光子能量的计算是根据 $\hbar\omega = \hbar ck$,其中 $\hbar = 1.05\times10^{-34}$J/s 是普朗克常数除以 2π,又由于电荷电量 $q = 1.6\times10^{-19}$C,因此 $\hbar\omega = \hbar cAK_o = (\hbar cAK/q)$ eV $\approx 1.24\times10^{-6}A$ eV。

相速和相位时延

在图 1.1-6(b)和 1.1-6(c)中,给出了两个时间进程 $\omega t = \pi/2$ 和 $\omega t = \pi$ 中的 $E_x(z,t)$。观察到电场矢量 $\boldsymbol{A}$ 随着时间的推移是在向 $\hat{z}$ 方向传播。传播的速度 v_p 可以由令 $kz-\omega t$ 等于常数给出

$$v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} \tag{1.1.23}$$

我们将 v_p 称为相速。利用色散关系公式(1.1.19)得到 $v_p = (\mu_o\epsilon_o)^{-1/2}$,其等于自由空间中的光速 c,定义 $c = (\mu_o\epsilon_o)^{-1/2}$。

根据色散关系,空间频率 k 由相位时延与时间频率 ω 直接联系起来,

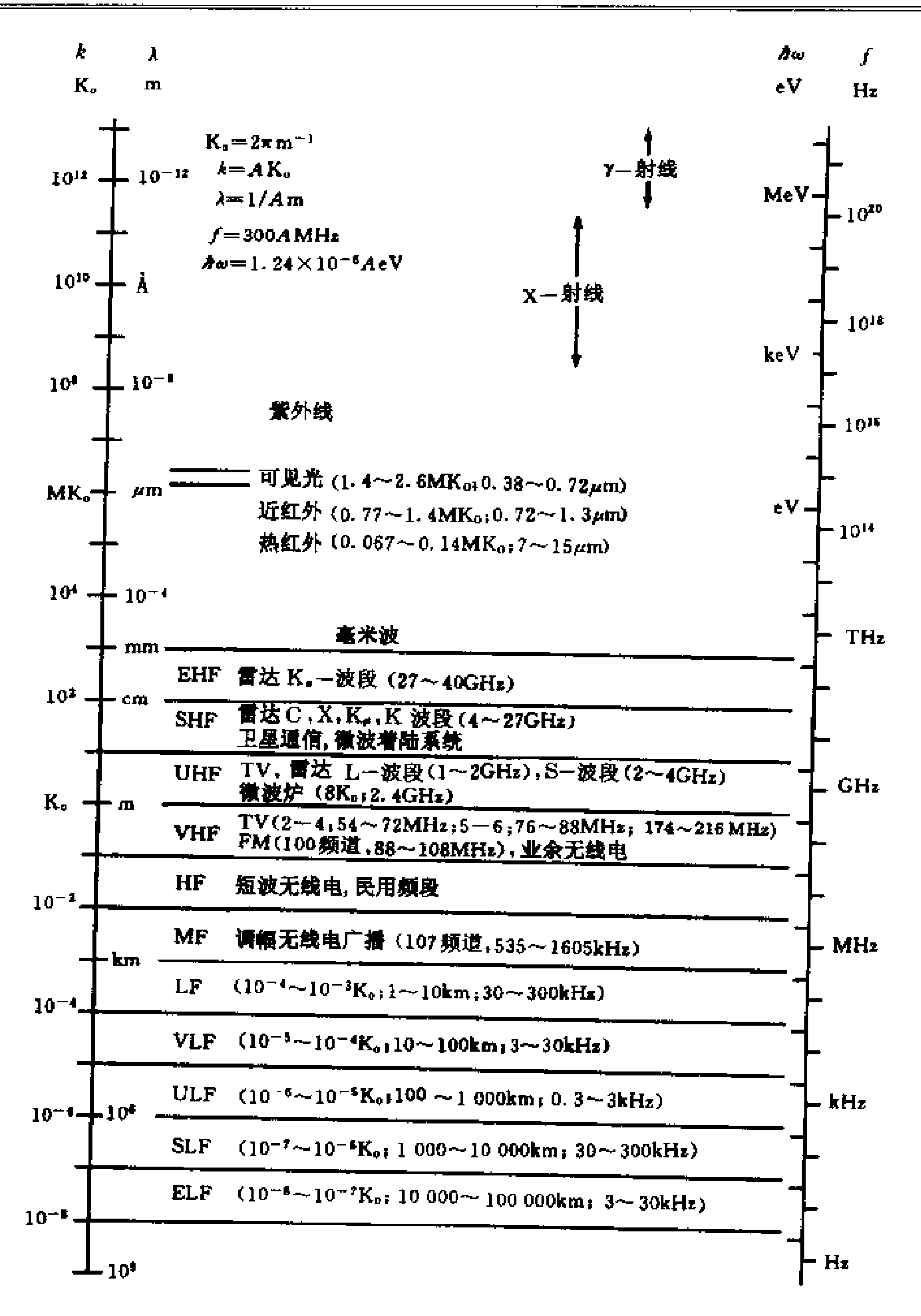


图 1.1-5 电磁波谱段

$$\Lambda_p = \frac{k}{\omega}\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \tag{1.1.24}$$

它决定波传播一个单位距离所用的时间。在自由空间中 $\Lambda_p = \frac{1}{3} \times 10^{-8}$s/m，即电磁波传播 1m 的距离需用 3.33ns 的时间。

例 1.1.1 常用设备的工作频率。

设备名称	时间频率(Hz)	空间频率(K_0)
调幅(AM)无线电收音机	535~1605kHz	0.00178~0.00535 K_0
短波收音机	3~30MHz	0.01~0.1 K_0
调频(FM)收音机	88~108MHz	0.293~0.36 K_0
机场导航设备	108~112MHz	0.35~0.373 K_0
商业电视广播		
2~4 频道	54~72MHz	0.18~0.24 K_0
5~6 频道	76~88MHz	0.253~0.293 K_0
7~13 频道	174~216MHz	0.58~0.72 K_0
14~83 频道	470~890MHz	1.57~2.97 K_0
微波炉	2.45GHz	8.17 K_0
通信卫星		
下行	3.70~4.20GHz	12.3~14 K_0
上行	5.925~6.425GHz	19.75~21.4 K_0

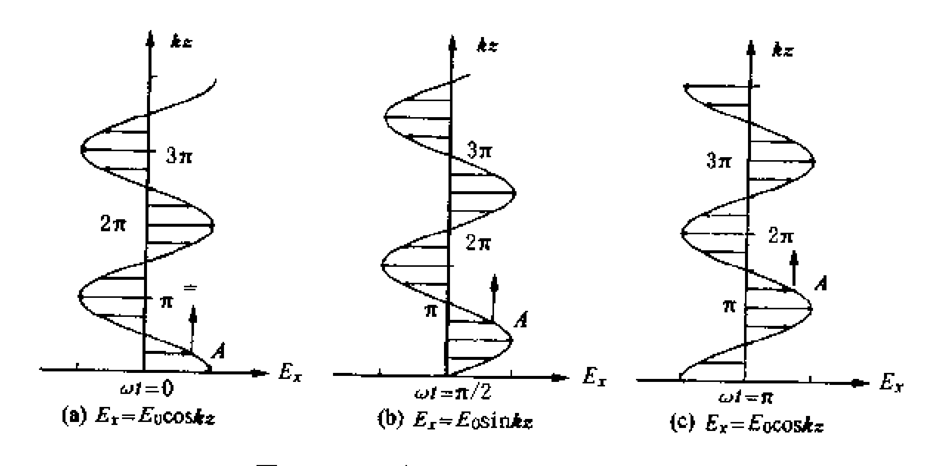


图 1.1-6 不同时刻的电场强度与 kz 的关系

练习 1.1.1 式(1.1.18)中的电场矢量是沿 $+\hat{z}$ 方向传播的电磁波,如果电磁波向 $-\hat{z}$ 方向传播,表达式是什么?

答:

$$E = \hat{x}E_0\cos(kz+\omega t)$$

当时间 t 增加时,z 必须减少以保证 $kz+\omega t$ 等于常数,因此波向 $-\hat{z}$ 方向传播。

练习 1.1.2 式(1.1.18)中的电场矢量为

$$E = \hat{x}E_0\cos(kz-\omega t)$$

磁场 H 的表达式是什么?

答:

$$H = \hat{y}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0\cos(kz-\omega t)$$

·【史料】·

詹姆斯·克拉克·麦克斯韦(James Clerk Maxwell)1831年6月13日出生于苏格兰爱丁堡市,1879年11月5日死于英格兰剑桥市。1858年7月4日与凯瑟琳·马丽·戴乌(Katherine Mary Dewar)结婚,无子。他于1847—1850年就读于爱丁堡大学,并于1850至1854年在剑桥大学从师威廉姆·霍普金斯。1855—1856年任三圣教研究员,1856至1860年任阿伯丁大学马瑞寿学院自然哲学教授,1860—1865年任帝国学院教授。他于1865至1871年退休回到位于戈兰莱尔的家庭庄园撰写了著名的《电磁通论》(A Treatise on Electricity and Magnetism)。在1866至1870年期间还兼职剑桥数学学院的院外评委。他被选为第一任卡文迪许教授并授命建立剑桥大学卡文迪许实验室。从1871至1879年任实验室主任。在他自14岁开始发表的100多篇论文和4部专著中,在电磁理论方面最为著名的是《电磁通论》,1873年在英国伦敦由康斯太堡与公司出版社发表,并于1954年由美国纽约多佛出版社再版。

麦克斯韦方程组最初以笛卡儿坐标分量形式表述,后经奥里夫·海韦斯得(1850.5.18—1925.2.3)以矢量形式重新计算。海力克·鲁道夫·赫兹(1857.2.22—1894.1.1)于1888年用实验证明了麦克斯韦的理论。自此,电磁理论在无线电广播,电视,无线通信,雷达,微波加热,遥感及许多实际应用中扮演着核心角色。由阿尔伯特·爱因斯坦(1879.3.14—1955.4.18)于1905年建立的狭义相对论进一步证实了麦克斯韦方程组的严密与简洁。作为一门充分发展与完善的学科,这一超凡的理论结构包容了许多原理与概念,成为自然界基本原理的体现和与其他学科联系的重要纽带。

1.1.2 矢量分析与边界条件

一个矢量由幅度和方向组成。可以将矢量 $\boldsymbol{A}$ 表示为

$$\boldsymbol{A} = \hat{\boldsymbol{a}}A$$

其中,A 代表矢量 $\boldsymbol{A}$ 的幅度,$\hat{\boldsymbol{a}}$ 是以一个幅度为单位长度并与 $\boldsymbol{A}$ 同方向的无量纲矢量。矢量可以用图形表示为一个长度为 A 并指向方向 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 的直线段。

当两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 不在同一方向或方向相反时,决定了一个平面。矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的相加和相减示于图 1.1-7。

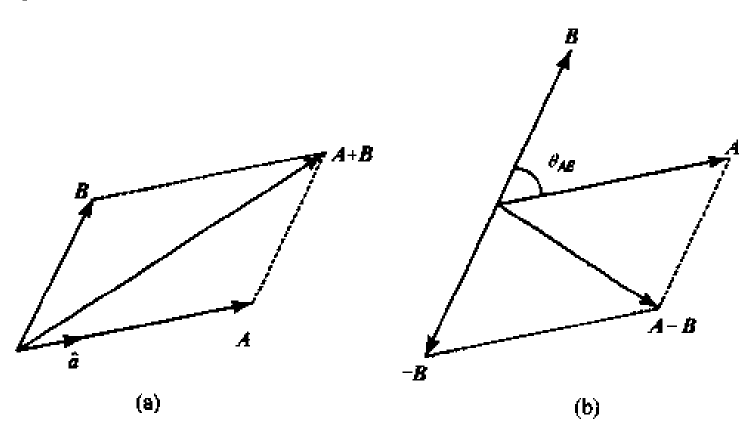


图 1.1-7 矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的加与减

矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的标量积或点积记为$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$，其值是一个标量数$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta_{AB}$，其中$\theta_{AB}$是$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$之间的夹角。

两个矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的积或称叉积，记为$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$，是与包含矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的平面垂直的一个矢量。因此，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$既垂直于$\boldsymbol{A}$也垂直于$\boldsymbol{B}$（见图1.1-8）。矢量$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$的幅度等于$|AB\sin\theta_{AB}|$，即由$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$组成的平行四边形的面积。它的方向的确定符合右手螺旋法则，即当右手的手指由$\boldsymbol{A}$转向$\boldsymbol{B}$时，大拇指所指的方向就是$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$的方向。矢量的除法没有定义，因此式$\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}$，$1/\boldsymbol{A}$没有任何含义。

如果矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$不进行加、减、点积和叉积的运算，由$\boldsymbol{AB}$定义的集合称为张量积。如果采用张量分析的语言表述，张量积被称为二阶张量，而所有的矢量称为一阶张量。

任何矢量都可以表示为在笛卡儿坐标系（也称为直角坐标系）三个相互垂直的单位矢量$\hat{x},\hat{y},\hat{z}$上的投影，其中$\hat{x}=\hat{y}\times\hat{z}$，$\hat{y}=\hat{z}\times\hat{x}$，$\hat{z}=\hat{x}\times\hat{y}$，$\hat{x}\cdot\hat{x}=\hat{y}\cdot\hat{y}=\hat{z}\cdot\hat{z}=1$以及$\hat{x}\cdot\hat{y}=\hat{y}\cdot\hat{z}=\hat{z}\cdot\hat{x}=0$。我们将$\boldsymbol{A}$在$\hat{x},\hat{y},\hat{z}$三轴上的投影记做$A_x,A_y,A_z$（如图1.1-9所示）。

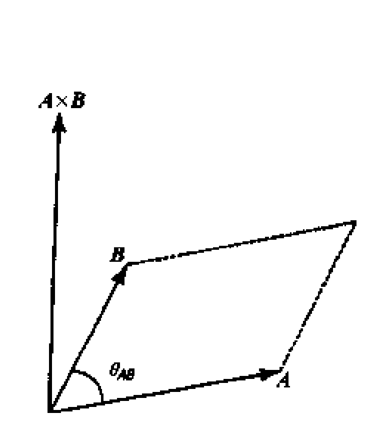


图1.1-8 矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的叉积$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$

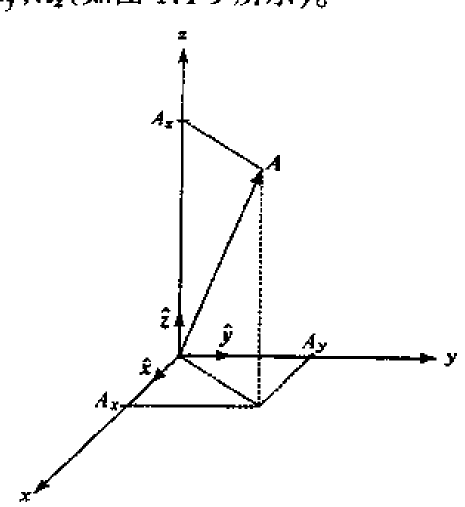


图1.1-9 直角坐标系中矢量$\boldsymbol{A}$的投影

位置矢量

如果一个矢量的投影为(x,y,z)，

$$\boldsymbol{r}=\hat{\mathbf{x}}x+\hat{\mathbf{y}}y+\hat{\mathbf{z}}z$$

称其为位置矢量。

对矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$，可以记做

$$\boldsymbol{A}=\hat{\mathbf{x}}A_x+\hat{\mathbf{y}}A_y+\hat{\mathbf{z}}A_z$$
$$\boldsymbol{B}=\hat{\mathbf{x}}B_x+\hat{\mathbf{y}}B_y+\hat{\mathbf{z}}B_z$$

因此，

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_xB_z$$
$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\hat{x}(A_yB_z-A_zB_y)+\hat{y}(A_zB_x-A_xB_z)+\hat{z}(A_xB_y-A_yB_x)$$
$$=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$
$$\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=C_x(A_yB_z-A_zB_y)+C_y(A_zB_x-A_xB_z)+C_z(A_xB_y-A_yB_x)$$

$$= \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

证明下面的等式十分有用,在后面将会被多次用到。

$$\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) \tag{1.1.25}$$

$$\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} \tag{1.1.26}$$

标量的梯度

在笛卡儿坐标系中，运算符号∇代表一个进行微分运算的矢量,记作

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

对一个标量 Φ 进行运算，其结果为一个矢量

$$\nabla\Phi = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y}\Phi + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\Phi \tag{1.1.27}$$

称为 Φ 的梯度。

例 1.1.2 电场矢量是电位函数的梯度。如下考虑时间变化,可以将电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 表示为

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi \tag{1.1.28}$$

其中,Φ 为电位函数。如果$\partial\Phi/\partial z$ 是负数,则电场矢量是指向 $\hat{z}$ 方向的,相反如果$\partial\Phi/\partial z$ 是正数,则电场矢量是指向 $-\hat{z}$ 方向的。其物理图像如同水由高处向低处流,电场的指向总是由高电位处指向低电位处。

矢量的散度

一个矢量函数的散度是一个标量,定义为

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{D} &= \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\hat{x}D_x + \hat{y}D_y + \hat{z}D_z) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}D_x + \frac{\partial}{\partial y}D_y + \frac{\partial}{\partial z}D_z \end{aligned}\tag{1.1.29}$$

如在点(x_0,y_0,z_0)周围考虑一个边长各为 $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ 的微分体积(如图 1.1-10 所示),散度的定义表明

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{D} &= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}}\left\{\frac{D_x(x_0+\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0) - D_x(x_0-\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0)}{\Delta x} + \right.\\ &\qquad \frac{D_y(x_0,y_0+\frac{\Delta y}{2},z_0) - D_y(x_0,y_0-\frac{\Delta y}{2},z_0)}{\Delta y} + \\ &\qquad \left.\frac{D_z(x_0,y_0,z_0+\frac{\Delta z}{2}) - D_z(x_0,y_0,z_0-\frac{\Delta z}{2})}{\Delta z}\right\} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}}\frac{1}{\Delta x\Delta y\Delta z}\times\end{aligned}$$

$$\Big\{\Delta y\Delta z\Big[D_x(x_0+\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0)-D_x\Big(x_0-\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0\Big)\Big]+$$
$$\Delta z\Delta x\Big[D_y\Big(x_0,y_0+\frac{\Delta y}{z},z_0\Big)-D_y\Big(x_0,y_0-\frac{\Delta y}{z},z_0\Big)\Big]+$$
$$\Delta x\Delta y\Big[D_z\Big(x_0,y_0,z_0+\frac{\Delta z}{2}\Big)-D_z\Big(x_0,y_0,z_0-\frac{\Delta z}{2}\Big)\Big]\Big\} \qquad (1.1.30)$$

在公式(1.1.30)括号中第一项表示的是在 $x=x_0+\Delta x/2$ 处表面的场分量 D_x 与表面积 $\Delta y\Delta z$ 的乘积。我们定义指向微分体积单元外的法线矢量为表面法线矢量 d$\boldsymbol{S}$,且有在 $x=x_0+\Delta x/2$ 的表面 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\hat{x}\Delta y\Delta z$,而在 $x=x_0-\Delta x/2$ 的表面 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\hat{x}\Delta y\Delta z$。这样式中第二项中的负号,就可以理解为是 $\boldsymbol{D}$ 点积上 d$\boldsymbol{S}$ 的结果。式中所有 6 项实际对应了微分体积上 6 个方向的微分面元上的法线矢量。因此可以将 $\boldsymbol{D}$ 的散度表示为



$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint\!\!\oint \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{D}}{\Delta V} \qquad (1.1.31)$$

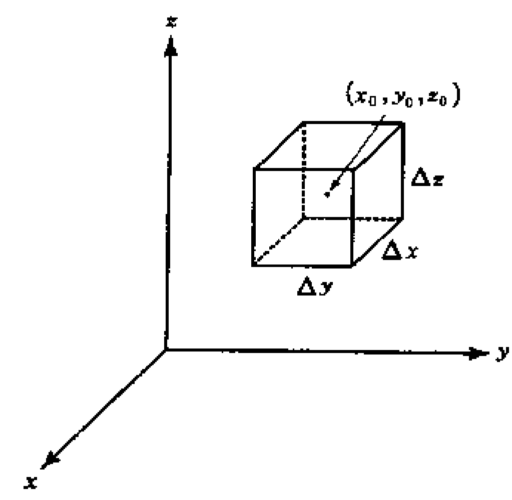


图 1.1-10 微分体积单元 $\Delta x\Delta y\Delta z$

***D* 和 *B* 的边界条件的推导**

当在 $z=z_0$ 处有一个平面边界,且 $\boldsymbol{D}$ 的值在边界处的上下有限时,可以通过公式(1.1.30)和一个扁平盒子(见图 1.1-11),当其高度 Δz 趋于零时来导出 $\boldsymbol{D}$ 的边界条件。有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta z}\Big[D_z\Big(x_0,y_0,z_0+\frac{\Delta z}{2}\Big)-D_z\Big(x_0,y_0,z_0-\frac{\Delta z}{2}\Big)\Big] \qquad (1.1.32)$$

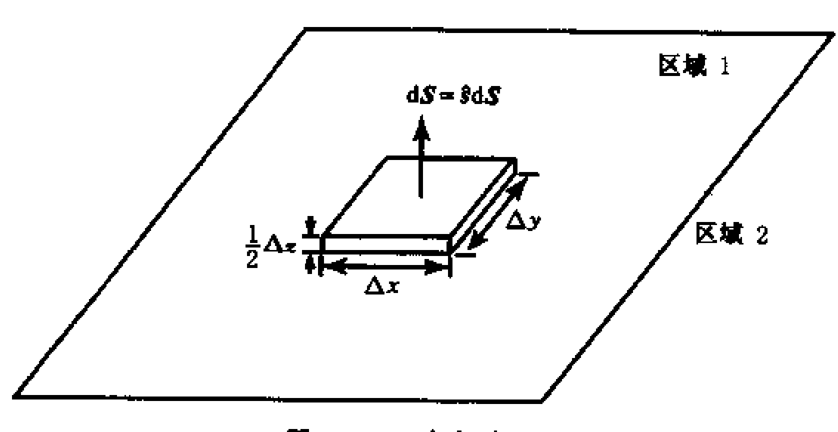


图 1.1-11 小扁平盒子

利用式(1.1.3),得到

$$\lim_{\Delta z\to 0}\left[D_z\left(x_0,y_0,z_0+\frac{\Delta z}{2}\right)-D_z\left(x_0,y_0,z_0-\frac{\Delta z}{2}\right)\right]=\lim_{\Delta z\to 0}\rho\Delta z \tag{1.1.33}$$

因为 $D_z(x_0,y_0,z_0+\Delta z/2)$ 位于区域 1 中,$D_z(x_0,y_0,z_0-\Delta z/2)$ 位于区域 2 中,我们可用 $D_z(x_0,y_0,z_0+\Delta z/2)=D_{1z}$ 表示区域 1 中的场,用 $D_z(x_0,y_0,z_0-\Delta z/2)=D_{2z}$ 表示区域 2 中的场。由于体电荷密度 $\rho(\mathrm{C/m^3})$ 的值有限,因此式(1.1.33)右边将趋于 0。当然,如果假设在无限薄的体积内 ρ 不趋于 0,可以定义一个表面电荷密度 $\rho_s=\lim_{\Delta z\to 0}\rho\Delta z$,其值有限,且单位为 $\mathrm{C/m^2}$。表面电荷密度的概念十分有用。式(1.1.33)可以变为

$$D_{1z}-D_{2z}=\rho_s \tag{1.1.34}$$

设表面单元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\hat{s}\Delta x\Delta y=\hat{s}\mathrm{d}S$,可将式(1.1.34)写为

$$\hat{s}\cdot[\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2]=\rho_s \tag{1.1.35}$$

这样,场 $\boldsymbol{D}$ 的法向分量在边界两边的差值就等于边界上的表面电荷密度。

当边界上没有表面电荷密度时,可有

$$D_{1z}-D_{2z}=0 \tag{1.1.36}$$

或

$$\hat{s}[\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2]=0 \tag{1.1.37}$$

这样 $\boldsymbol{D}$ 的法向矢量在边界上就是连续的。用同样的方法,利用公式(1.1.4)可以得到

$$B_{1z}-B_{2z}=0 \tag{1.1.38}$$

或

$$\hat{s}\cdot[\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2]=0 \tag{1.1.39}$$

即由于在边界上没有磁荷密度,$\boldsymbol{B}$ 的法向矢量在边界上是连续的。

散度定理

将上述结果引入一个包含无数微分体积的较大的体积中(见图 1.1-12),注意其中相邻的微分体积表面由于其法向矢量两两相对,互相抵消,因此对整个问题无贡献。这一结果称为散度定理,

$$\iiint_V \mathrm{d}V\,\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \oiint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{D} \tag{1.1.40}$$

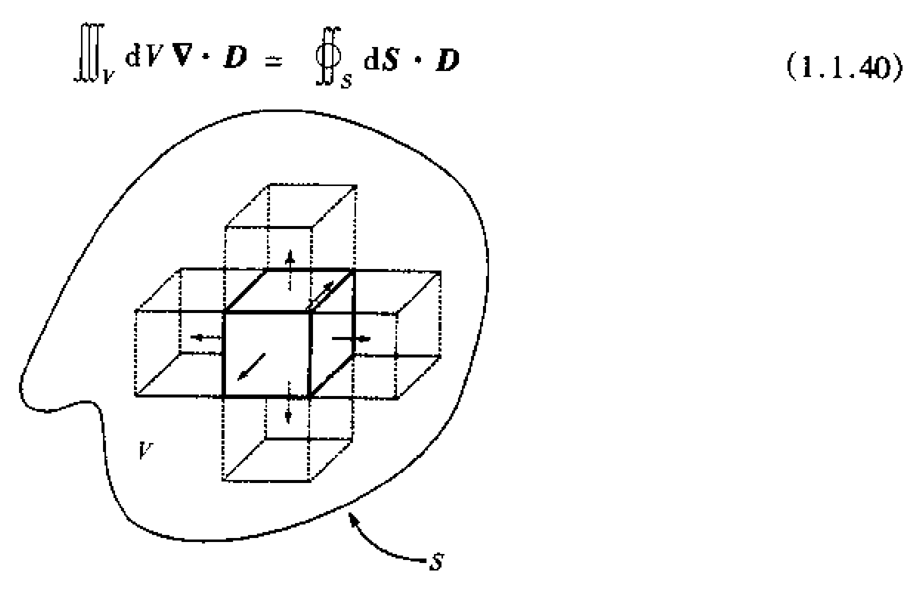


图 1.1-12 散度定理的推导

散度定理表明，电场 $\boldsymbol{D}$ 的散度的体积积分等于通过包围体积的表面 S 的总通量。

例 1.1.3 电场的高斯定律的解释。

将式(1.1.40)应用到电场的高斯定律(或库仑定律)式(1.1.3)中，我们有

$$\oiint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{D}=\iiint_V \mathrm{d}V\,\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\iiint_V \mathrm{d}V\rho=q \tag{1.1.41}$$

这样矢量场 $\boldsymbol{D}$ 的散度，也称为流向 S 外的电量，其等于该表面所包围体积中总的电荷值。

矢量的旋度

矢量场 $\boldsymbol{H}$ 的旋度是一个矢量，定义为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\boldsymbol{H} \tag{1.1.42}$$

考虑一个中心在(x_0,y_0,z_0)由边长 $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ 围成的微分体积，在笛卡儿坐标系中，矢量 $\boldsymbol{H}$ 的旋度根据定义可表示为

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{H}=&\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0\\ \Delta z\to0}}\frac{1}{\Delta x\Delta y\Delta z}\times\\ &\Big\{\Delta y\Delta z\Big[\hat{x}\times\Big(\boldsymbol{H}(x_0+\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0)-\boldsymbol{H}(x_0-\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0)\Big)\Big]+\\ &\Delta z\Delta x\Big[\hat{y}\times\Big(\boldsymbol{H}(x_0,y_0+\frac{\Delta y}{2},z_0)-\boldsymbol{H}(x_0,y_0-\frac{\Delta y}{2},z_0)\Big)\Big]+\\ &\Delta x\Delta y\Big[\hat{z}\times\Big(\boldsymbol{H}(x_0,y_0,z_0+\frac{\Delta z}{2})-\boldsymbol{H}(x_0,y_0,z_0-\frac{\Delta z}{2})\Big)\Big]\Big\}\end{aligned} \tag{1.1.43}$$

式(1.1.43)中的6项对应着包围(x_0,y_0,z_0)点的6个微分表面，对第一项其微分表面的法向矢量在 x 方向上，可写作 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\hat{x}\Delta y\Delta z$。对第二项有 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\hat{x}\Delta y\Delta z$，对第三项有 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\hat{y}\Delta z\Delta x\cdots$ 因此可将式(1.1.43)写为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\lim_{\Delta V\to0}\frac{\oiint \mathrm{d}S\hat{s}\times\boldsymbol{H}}{\Delta V} \tag{1.1.44}$$

将上述结果应用于一个包含无数微分体积的较大的体积 V 中，可以得到旋度定理

$$\iiint_V \mathrm{d}V\,\nabla\times\boldsymbol{H}=\oiint_S \mathrm{d}S\hat{s}\times\boldsymbol{H} \tag{1.1.45}$$

其与散度定理相似，不同之处是其结果为矢量形式。

***E* 和 *H* 边界条件的推导**

当在 $z=z_0$ 处有一个平面边界，且 $\boldsymbol{E}$ 的值在边界处的上下有限时，可以通过(1.1.43)式和令 Δz 趋于0(见图1.1-11)来导出边界条件。可有

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{H}=\lim_{\Delta z\to0}\frac{1}{\Delta z}\Big\{&\hat{x}\Big[-H_y\Big(x_0,y_0,x_0+\frac{\Delta z}{2}\Big)-H_y\Big(x_0,y_0,z_0-\frac{\Delta z}{2}\Big)\Big]+\\ &\hat{y}\Big[H_x\Big(x_0,y_0,z_0+\frac{\Delta z}{2}\Big)-H_x\Big(x_0,y_0,z_0-\frac{\Delta z}{2}\Big)\Big]\Big\}\end{aligned}$$

由式(1.1.1)得到

$$\lim_{\Delta z\to 0}\left[-H_y\left(x_0,y_0,z_0+\frac{\Delta z}{2}\right)+H_y\left(x_0,y_0,z_0-\frac{\Delta z}{2}\right)\right]=\lim_{\Delta z\to 0}\Delta z\left(\frac{\partial D_x}{\partial t}+J_x\right)$$
$$\lim_{\Delta z\to 0}\left[H_x\left(x_0,y_0,z_0+\frac{\Delta z}{2}\right)-H_x\left(x_0,y_0,z_0-\frac{\Delta z}{2}\right)\right]=\lim_{\Delta z\to 0}\Delta z\left(\frac{\partial D_y}{\partial t}+J_y\right) \tag{1.1.46}$$

在公式的右边,对时间的微分$\partial D_x/\partial t$ 和$\partial D_y/\partial t$ 的值是有限的,但是仍然可以假设 J_x 和 J_y 无限,从而引入在 $\Delta z\to 0$ 时有表面电流密度 $\boldsymbol{J}_s$

$$\boldsymbol{J}_s=\lim_{\substack{\Delta z\to 0\\ J\to\infty}}\boldsymbol{J}\Delta z \tag{1.1.47}$$

由于 $H_y(x_0,y_0,z_0+\Delta z/2)$和 $H_x(x_0,y_0,z_0+\Delta z/2)$位于区域 1, $H_y(x_0,y_0,z_0-\Delta z/2)$和 $H_x(x_0,y_0,z_0-\Delta z/2)$位于区域 2,由式(1.1.47)可有

$$-H_{1y}+H_{2y}=J_{sx}$$
$$H_{1x}-H_{2x}=J_{sy} \tag{1.1.48}$$

由于微分表面 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\hat{s}\,\mathrm{d}S=\hat{z}\Delta x\Delta y$,可将(1.1.46)写成矢量形式

$$\hat{s}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{J}_s \tag{1.1.49}$$

这样,平行于边界的 $\boldsymbol{H}$ 分量的差值就等于边界上的表面电流。

如果边界处没有表面电流存在,可有

$$H_{1y}=H_{2y}$$
$$H_{1x}=H_{2x} \tag{1.1.50}$$

或

$$\hat{s}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=0 \tag{1.1.51}$$

即 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量在边界处连续。用同样的方法,我们由(1.1.2)得到

$$E_{1y}=E_{2y}$$
$$E_{1x}=E_{2x} \tag{1.1.52}$$

或

$$\hat{s}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=0 \tag{1.1.53}$$

即 $\boldsymbol{E}$ 的切向分量在边界处连续。

斯托克斯(Stokes)定理

$\boldsymbol{H}$ 的旋度在笛卡儿坐标系中的定义为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\boldsymbol{H}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ H_x & H_y & H_z\end{vmatrix}$$
$$=\hat{x}\left(\frac{\partial}{\partial y}H_z-\frac{\partial}{\partial z}H_y\right)+\hat{y}\left(\frac{\partial}{\partial z}H_x-\frac{\partial}{\partial x}H_z\right)+\hat{z}\left(\frac{\partial}{\partial x}H_y-\frac{\partial}{\partial y}H_x\right) \tag{1.1.54}$$

这是一个有三个分量的矢量。写为微分形式,我们有

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}}\frac{1}{\Delta x\Delta y\Delta z}\times$$
$$\left\{\hat{x}\left[\Delta x\Delta z\left(H_z(x_0,y_0+\frac{\Delta y}{2},z_0)-H_z(x_0,y_0-\frac{\Delta y}{2},z_0)\right)-\right.\right.$$

$$\Delta x\Delta y\Big(H_y(x_0,y_0,z_0+\frac{\Delta z}{2})-H_y(x_0,y_0,z_0-\frac{\Delta z}{2})\Big)\Big]+$$
$$\hat{y}\Big[\Delta x\Delta y\Big(H_x(x_0,y_0,z_0+\frac{\Delta z}{2})-H_x(x_0,y_0,z_0-\frac{\Delta z}{2})\Big)-$$
$$\Delta y\Delta z\Big(H_z(x_0+\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0)-H_z(x_0-\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0)\Big)\Big]+$$
$$\hat{z}\Big[\Delta y\Delta z\Big(H_y(x_0+\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0)-H_y(x_0-\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0)\Big)-$$
$$\Delta x\Delta z\Big(H_x(x_0,y_0+\frac{\Delta y}{2},z_0)-H_x(x_0,y_0-\frac{\Delta y}{2},z_0)\Big)\Big]\Big\} \quad (1.1.55)$$

上述 12 项都与包围点(x_0,y_0,z_0)的微分体积的 6 个面相关。

将其应用于开放的表面，旋度定理就转化为矢量微积分中著名的斯托克斯定理。对其中的 $\hat{z}$ 分量，我们有

$$(\nabla\times \boldsymbol{H})_z=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{1}{\Delta x\Delta y}\times$$
$$\Big\{\Delta y\Big[H_y\Big(x_0+\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0\Big)-H_y\Big(x_0-\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0\Big)\Big]-$$
$$\Delta x\Big[H_x\Big(x_0,y_0+\frac{\Delta y}{2},z_0\Big)-H_x\Big(x_0,y_0-\frac{\Delta y}{2},z_0\Big)\Big]\Big\}$$

括号中的第一项是在 $x=x_0+\Delta x/2$ 处的 H_y 分量与微分长度 Δy 的乘积。可以定义一个微分长度 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$(见图 1.1-13)使得在 $x=x_0+\Delta x/2$ 处的边长 Δy 有 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\hat{y}\mathrm{d}y$，在 $y_0+\Delta y/2$ 处的边长 Δx 有 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\hat{x}\mathrm{d}x$，在 $x=x_0-\Delta x/2$ 处的边长 Δy 有 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\hat{y}\mathrm{d}y$，以及在 $y=y_0-\Delta y/2$ 处的边长 Δx 有 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\hat{x}\mathrm{d}x$。如果我们用右手的手指沿 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 形成的环转动，右手的拇指所指的方向就是表面的法向方向 $\hat{z}$。

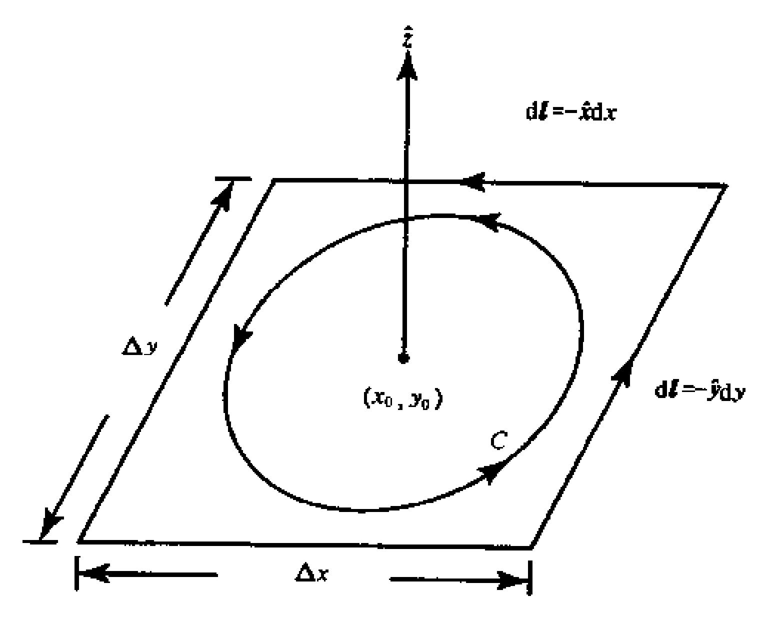


图 1.1-13　一矢量场旋度的 $\hat{z}$ 分量的推导

因此，

$$\hat{z}\cdot(\nabla\times \boldsymbol{H})=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{1}{\Delta S}\oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot \boldsymbol{H}$$

其中，C 表示沿面积 $\Delta S=\Delta x\Delta y$ 的边界环迹。由此得到，对由环迹 C_j 包围并具有表面法向矢量 $\hat{\boldsymbol{a}}_n$ 的微分面元 ΔS_j，有 $\Delta \boldsymbol{S}_j=\hat{\boldsymbol{a}}_n\Delta S_j$ 及

$$\Delta \boldsymbol{S}_j \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H})_j = \oint_{C_j} \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{H}$$

对一个开放的表面 S,可以将其分为 N 个小的微分面元(见图 1.1-14),得到

$$\lim_{\substack{\Delta S_j \to 0 \\ N \to \infty}} \sum_{j=1}^{N} \Delta \boldsymbol{S}_j \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H})_j = \oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{H}$$

由于相邻的面元的环迹沿相反方向转动,其合成效果将在开放的表面中间抵消,在积分式的右边只有包围该表面的外边界的环迹 C 的作用保留下来。而公式的左边变为一个表面积分,其结果就是斯托克斯定理。

$$\iint \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) = \oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{H} \tag{1.1.56}$$

斯托克斯定理表明在一个开放的表面上对一个矢量场旋度的面积分,等于对这一矢量沿包围这一表面的环迹上的封闭线积分。

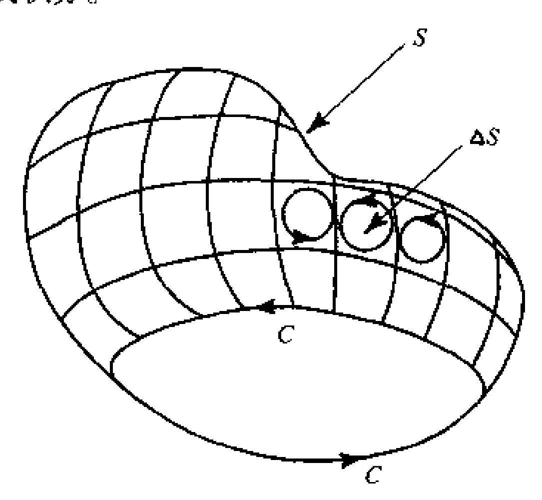


图 1.1-14 斯托克斯定理的推导

例 1.1.4 电动力和楞次(Lenz)定律。

将斯托克斯定理(1.1.56)应用于法拉第定理(1.1.2),我们有

$$\oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_A \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) \tag{1.1.57}$$

其中对 $\boldsymbol{E}$ 的线积分定义为电动力

$$F_{\mathrm{em}} = \oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\Psi \tag{1.1.58}$$

其中

$$\Psi = \iint_A \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) \tag{1.1.59}$$

是沿包围面积 A 的封闭环路 C 中的磁通量。公式(1.1.58)表明电动力(F_{em})等于环路磁通量随时间变化率的负值。因此,电动力总是产生一种阻止环路中磁通量变化的通量,即,如果 Ψ 增加,电动力将减少通量,反之亦然。这被称为楞次定律。

在某一个线段上从 a 到 b 对 $\boldsymbol{E}$ 的积分定义为这两点之间的电压降。

$$V_{ab} = \int_a^b \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{E} \tag{1.1.60}$$

注意,这里电动力的单位是电压的单位面不是力的单位。点 ab 之间的电压 V_{ab} 是 a 与 b 之间

的电位差。当 V_{ab}是正值时，电场的矢量由 a 指向 b。因此 a 点的电位 Φ_a 高，b 点的电位 Φ_b 低，$\Phi_b < \Phi_a$，且 $V_{ab} = \Phi_a - \Phi_b$。采用微分记号，有 $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$。

考虑封闭回路 C。由于有式(1.1.57)，沿回路的电压值的和等于由回路包围的面积中的磁通量。基尔霍夫(Kirchhoff)电压定律(KVL)表明沿回路的电压积分等于零。因此，KVL 仅当 $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$ 时成立。这里需要着重表明，当回路中存在有磁场时，KVL 是不正确的。

例 1.1.5 电动力(F_{em})。

考虑如图 1.1-15 所示的有两个电阻组成的回路，其中 $R_1 = 2.5\Omega$，$R_2 = 7.5\Omega$。设回路包围的面积中的磁通量以每秒 10Wb 的速率增长。由式(1.1.57)表明，将在回路中感应 10V 的电动力来阻止这一增长。回路中感应电流的方向应该产生一个与正在增长的磁通量相反的磁场。在电阻 R_1 上的电压 $V_1 = 2.5\text{V}$，因为，如果将一个电压表和 R_1 组成回路，可得到 $0 = 2.5 - V_1$；或把这个电压表和 R_2 组成回路，得到 $10 = 7.5 + V_1$。类似有另外两个电压表的读数 $V_2 = 7.5\text{V}$，$V_3 = 2.5\text{V}$。需要指出的是尽管电压表 2 与 3 接在同一对节点上，两个读数却大不相同，与基尔霍夫(KVL)定律不能吻合。这证明了 KVL 仅在回路包围的面积中没有磁通量变化的情况下，即$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$ 时才成立。

在另一种情况下(见图 1.1-16)，当感应的反作用电动力为 20V 时，用同样的分析方法得到 $V_1 = 5\text{V}$，$V_2 = 15\text{V}$，$V_3 = 5\text{V}$，$V_4 = 10\text{V}$，$V_5 = 20\text{V}$。

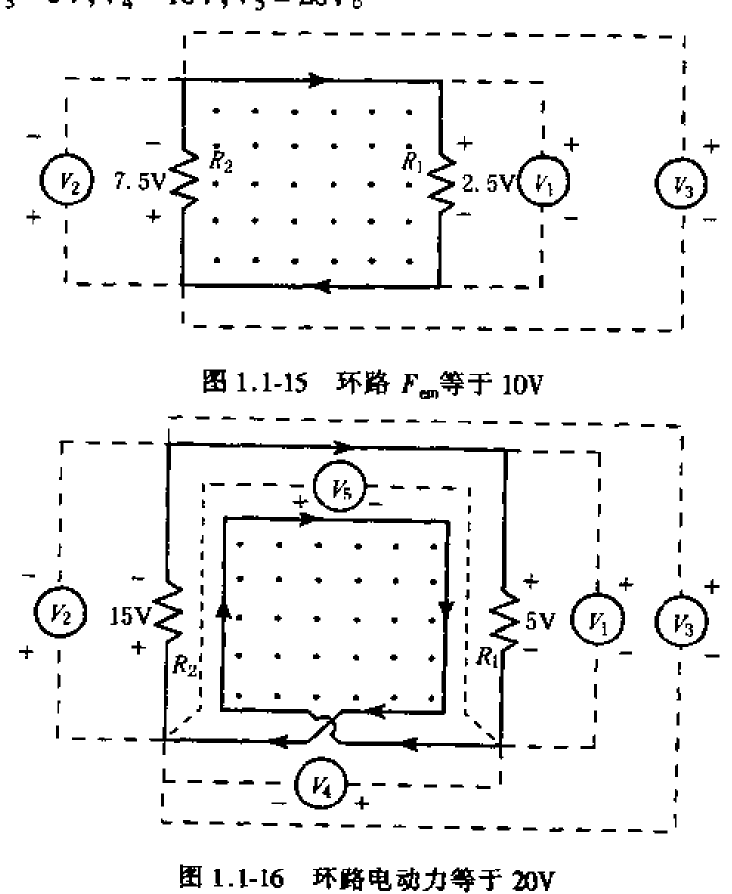


图 1.1-15 环路 F_{em}等于 10V

图 1.1-16 环路电动力等于 20V

例 1.1.6 用斯托克斯定理推导 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的边界条件。

考虑一个带状表面(见图 1.1-17)，对这一表面积分，法拉第定律和安培定律变为

$$\oint d\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{E} = -\frac{d}{dt}\iint dS\hat{\boldsymbol{s}}\cdot\boldsymbol{B}$$

$$\oint d\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{H} = \frac{d}{dt}\iint dS\hat{\boldsymbol{s}}\cdot\boldsymbol{D} + \iint dS\hat{\boldsymbol{s}}\cdot\boldsymbol{J}$$

令带状表面的面积按照 δ 先趋于零的方式趋于零,其中与 δ 有关的各项将可以忽略。另外用 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{H}_1$ 表示区域 1 中的场；用 $\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{H}_2$ 表示区域 2 中的场,我们推导如下。

当 $\delta\to 0$ 时,应用于带状表面(见图 1.1-17)的法拉第定律和安培定律的积分变为

$$-\frac{d}{dt}\iint dS\hat{\boldsymbol{s}}\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\iint dS\hat{\boldsymbol{s}}\cdot\boldsymbol{D} = 0$$

由于 $(d/dt)\hat{\boldsymbol{s}}\cdot\boldsymbol{B}$ 和 $(d/dt)\hat{\boldsymbol{s}}\cdot\boldsymbol{D}$ 在带状表面趋于零时保持有限值,所以

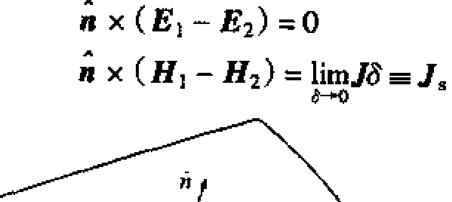
$$d\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2) = 0$$

$$d\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2) = \hat{\boldsymbol{s}}\cdot\boldsymbol{J}\delta dl$$

由于沿 $d\boldsymbol{l}$ 方向的电场 $\boldsymbol{E}$ 是在带状表面的切向方向上,因此对边界面上所有 $d\hat{\boldsymbol{s}}$ 有 $d\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{E} = d\hat{\boldsymbol{s}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}$。因此,我们有

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=0$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=\lim_{\delta\to 0}\boldsymbol{J}\delta\equiv\boldsymbol{J}_s$$



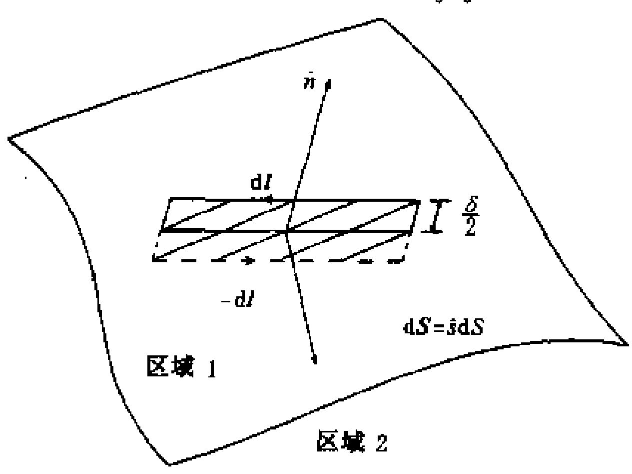


图 1.1-17　对带状表面的积分

常用的矢量恒等式

几个将要用到的矢量恒等式如下：

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E} \tag{1.1.61}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})-\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H}) \tag{1.1.62}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0 \tag{1.1.63}$$

$$\nabla\times(\nabla\Phi)=0 \tag{1.1.64}$$

可以用笛卡儿坐标系下的展开式或一般矢量表达式进行证明。

练习1.1.3 证明公式(1.1.61)。我们可以利用矢量恒等式 $\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B})-(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$,带$\nabla$的恒等式 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}$,以及 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 来证明,也可以利用旋度的定义来证明。

$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E}) &= \begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial E_z}{\partial y}-\dfrac{\partial E_y}{\partial z} & \dfrac{\partial E_x}{\partial z}-\dfrac{\partial E_z}{\partial x} & \dfrac{\partial E_y}{\partial x}-\dfrac{\partial E_x}{\partial y}\end{vmatrix}\\
&= \hat{x}\left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\right)-\\
&\quad \hat{y}\left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 E_x}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 E_z}{\partial y\partial z}\right)+\\
&\quad \hat{z}\left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}\right)\\
&= \hat{x}\left(\frac{\partial}{\partial x}(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2 E_x\right)+\hat{y}\left(\frac{\partial}{\partial y}(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2 E_y\right)+\\
&\quad \hat{z}\left(\frac{\partial}{\partial z}(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2 E_z\right)\\
&= \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}\end{aligned}$$

其中,

$$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

称为拉普拉斯算子,在 $\hat{x}$ 分量中推导时加上和减去了$\partial^2 E_x/\partial x^2$,在 $\hat{y}$ 和$\hat{z}$ 分量中也进行了相似的运算。

证明公式(1.1.62),有

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) &= \frac{\partial}{\partial x}(E_yH_z-E_zH_y)+\frac{\partial}{\partial y}(E_zH_x-E_xH_z)+\frac{\partial}{\partial z}(E_xH_y-E_yH_x)\\
&= E_y\frac{\partial}{\partial x}H_z+H_z\frac{\partial}{\partial x}E_y-E_z\frac{\partial}{\partial x}H_y-H_z\frac{\partial}{\partial x}E_z\\
&= E_x\frac{\partial}{\partial z}H_y+H_y\frac{\partial}{\partial z}E_x-E_y\frac{\partial}{\partial z}H_x-H_x\frac{\partial}{\partial z}E_y+\\
&\quad E_z\frac{\partial}{\partial y}H_x+H_x\frac{\partial}{\partial y}E_z-E_x\frac{\partial}{\partial y}H_z-H_z\frac{\partial}{\partial y}E_x\\
&= H_x\left(\frac{\partial}{\partial y}E_z-\frac{\partial}{\partial z}E_y\right)+H_y\left(\frac{\partial}{\partial z}E_x-\frac{\partial}{\partial x}E_z\right)+H_z\left(\frac{\partial}{\partial x}E_y-\frac{\partial}{\partial y}E_x\right)-\\
&\quad E_x\left(\frac{\partial}{\partial y}H_z-\frac{\partial}{\partial z}H_y\right)-E_y\left(\frac{\partial}{\partial z}H_x-\frac{\partial}{\partial x}H_z\right)-E_z\left(\frac{\partial}{\partial x}H_y-\frac{\partial}{\partial y}H_x\right)\\
&= \boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})-\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})\end{aligned}$$

证明公式(1.1.63),有

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}A_z-\frac{\partial}{\partial z}A_y\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial z}A_x-\frac{\partial}{\partial x}A_z\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x}A_y-\frac{\partial}{\partial y}A_x\right)=0$$

证明公式(1.1.64),有

$$\nabla\times(\nabla\Phi)=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} & \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} & \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\end{vmatrix}=0$$

例 1.1.7 泊松(Poisson)方程和拉普拉斯(Laplace)方程。

在式(1.1.28)中,我们将电场矢量写成电位函数 Φ 的梯度。

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi \tag{1.1.65}$$

由式(1.1.64)可知,$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$。因此上式只有当法拉第定律中的$\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ 项可以忽略时才成立,也即磁通量不随时间变化。我们将这样的场称为静电场。

自由空间中的库仑定律(或电场的高斯定律)为$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0$。如用电位表示得到

$$\nabla^2\Phi=-\rho/\varepsilon_0 \tag{1.1.66}$$

称其为泊松方程。在电荷密度为零处($\rho=0$),有

$$\nabla^2\Phi=0 \tag{1.1.67}$$

称其为拉普拉斯方程。

练习 1.1.4 证明电位方程

$$\Phi=\frac{C}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

其中,C 为常数,满足拉普拉斯方程(1.1.67)。

例 1.1.8 静电场矢量是电位函数的梯度。

由电位函数 $\Phi=C/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,得到与其对应的静电场矢量为

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi=C\left[\hat{x}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+\hat{y}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+\hat{z}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right]$$

利用位置矢量 $\boldsymbol{r}=\hat{x}x+\hat{y}y+\hat{z}z$,和它的长度 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,电场矢量可写为如下形式

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{r}\frac{C}{r^3}=\hat{\boldsymbol{r}}\frac{C}{r^2}$$

其中,$\hat{\boldsymbol{r}}$ 是指向 $\boldsymbol{r}$ 方向的单位矢量。因此,电场矢量的指向由原点向外指向位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的方向,其强度等于随 r 平方的倒数的规律衰减。

角标法的说明

笛卡儿坐标系中的矢量可以通过三个分量来表示，因此，$A_j(j=1,2,3)$对应矢量 $\boldsymbol{A}$ 的三个分量 A_1,A_2,A_3。点积 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 可以写为A_jB_j，其中重复变量角标 j 代表j 由 1 到 3 时的叠加。

$$A_jB_j=\sum_{j=1}^{3}A_jB_j=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3$$

为了用角标法表示矢量积，我们需要定义一个 Levi Cevita 记号 ϵ_{ijk}，其中 i,j,k 的值为 1～3。当这三个值中的任意两个相等时，Levi Cevita 记号 ϵ_{ijk}等于零。当 $i\neq j\neq k$ 时，ϵ_{ijk}要么等于 +1，要么等于 -1。当 i,j,k 中的 1,2,3 三个数顺排时，ϵ_{ijk}等于 1；当 i,j,k 中的 1,2,3 三个数逆排时，ϵ_{ijk}等于 -1。比如 $\epsilon_{123}=\epsilon_{231}=\epsilon_{312}=1,\epsilon_{213}=\epsilon_{132}=\epsilon_{321}=-1$，且所有其他情况等于零。设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$，采用角标法，有 $C_i=\epsilon_{ijk}A_jB_k$。也即 $C_1=\epsilon_{123}A_2B_3+\epsilon_{132}A_3B_2=A_2B_3-A_3B_2$。张量积 $\boldsymbol{AB}$ 就可以写为 A_jB_k，由于所有角标都不重复，因此不用进行累加。恒等式(1.1.25)和(1.1.26)可以写为

$$C_i\epsilon_{ijk}A_jB_k=A_j\epsilon_{jki}B_kC_i=B_k\epsilon_{kij}C_iA_j$$

和

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk}C_j\epsilon_{klm}A_lB_m&=(\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm})C_jA_lB_m=(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{lj})C_jA_lB_m\\&=A_iC_mB_m-C_lA_lB_i\end{aligned}$$

其中，当 $i=j$ 时，$\delta_{ij}=1$；当 $i\neq j$ 时，$\delta_{ij}=0$。

用角标法，D_j 的散度$\nabla\cdot D_j$ 为∂_jD_j。∇用∂_i 表示，$\nabla\Phi$ 用$\partial_i\phi$ 表示。H_i 的旋度$\nabla\times H_i$ 为 $\epsilon_{ijk}\partial_jH_k$。恒等式(1.1.61)－(1.1.64)，可用角标法写为

$$\begin{aligned}&\epsilon_{ijk}\partial_j\epsilon_{klm}\partial_lE_m=(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\partial_j\partial_lE_m=\partial_m\partial_iE_m-\partial_j\partial_jE_i\\&\partial_i(\epsilon_{ijk}E_jH_k)=\epsilon_{ijk}H_k\partial_iE_j+\epsilon_{ijk}E_j\partial_iH_k=H_k\epsilon_{kij}\partial_iE_j-E_j\epsilon_{jik}\partial_iH_k\\&\partial_i\epsilon_{ijk}\partial_jA_k=-\epsilon_{ijk}\partial_i\partial_jA_k=0\\&\epsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\phi=-\epsilon_{ikj}\partial_j\partial_k\phi=-\epsilon_{ikj}\partial_k\partial_j\phi=0\end{aligned}$$

圆柱坐标和球坐标系

尽管到此为止主要使用的是笛卡儿直角坐标系，矢量符号的表达式实际上是与坐标系无关的。除了直角坐标系中的三个单位矢量 $\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{y}},\hat{\boldsymbol{z}}$ 以外，用 $\hat{\boldsymbol{\rho}},\hat{\boldsymbol{\phi}},\hat{\boldsymbol{z}}$ 表示的圆柱坐标系和用$\hat{\boldsymbol{r}},\hat{\boldsymbol{\theta}},\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 表示的球坐标系在本书中也经常使用。

在圆柱坐标系(见图 1.1-18)中，矢量微分长度为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\hat{\boldsymbol{\rho}}\mathrm{d}\rho+\hat{\boldsymbol{\phi}}\rho\mathrm{d}\phi+\hat{\boldsymbol{z}}\mathrm{d}z$$

微分面元为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\hat{\boldsymbol{\rho}}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z+\hat{\boldsymbol{\phi}}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z+\hat{\boldsymbol{z}}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi$$

以及微分体积为

$$\mathrm{d}V=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$$

在球坐标系中(见图 1.1-19)，矢量微分长度为

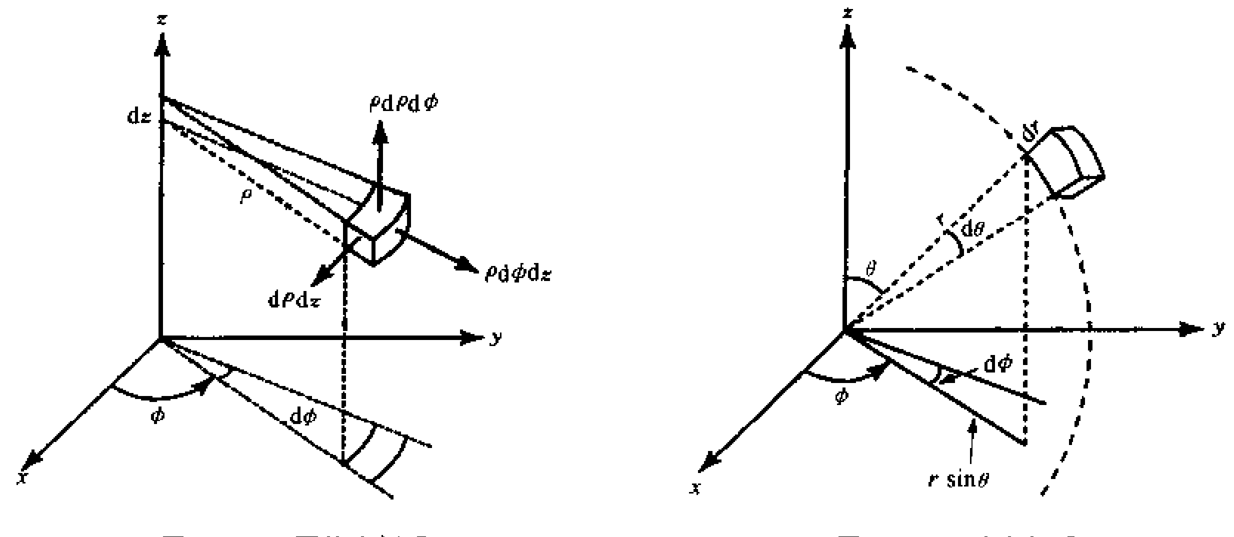


图 1.1-18 圆柱坐标系　　图 1.1-19 球坐标系

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \hat{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}r + \hat{\boldsymbol{\theta}}r\mathrm{d}\theta + \hat{\boldsymbol{\phi}}r\sin\theta\mathrm{d}\phi$$

微分面元为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \hat{\boldsymbol{r}}r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi + \hat{\boldsymbol{\theta}}r\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi + \hat{\boldsymbol{\phi}}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

以及微分体积为

$$\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

在一个一般性的正交坐标系中，可以用 $\hat{\boldsymbol{u}}_i(i=1,2,3)$来表示三个基本矢量，用 $\mathrm{d}l_i = h_i\mathrm{d}u_i$ 表示微分长度。其中，h_i 称为度量系数。这三个基本矢量相互正交，也即，当 $i \neq j$，有 $\hat{\boldsymbol{u}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{u}}_j = 0$，但是其不一定具有单位长度，甚至不一定具有长度的量纲。在表 1.1-1 中，归纳了直角坐标系（笛卡儿）、圆柱坐标系和球坐标系中基本矢量和度量系数。

表 1.1-1　正交坐标系

正交坐标系	直角坐标系 (x,y,z)	圆柱坐标系 (ρ,ϕ,z)	球坐标系 (r,θ,ϕ)
基本矢量 (u_1,u_2,u_3)	$\hat{x},\hat{y},\hat{z}$	$\hat{\boldsymbol{\rho}},\hat{\boldsymbol{\phi}},\hat{z}$	$\hat{\boldsymbol{r}},\hat{\boldsymbol{\theta}},\hat{\boldsymbol{\phi}}$
度量系数 (h_1,h_2,h_3)	1,1,1	$1,\rho,1$	$1,r,r\sin\theta$
微分体积 $(h_1h_2h_3\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3)$	$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$	$\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$	$r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$

对一般性的正交坐标系、梯度、散度和旋度的定义如下。

$$\nabla\phi = \hat{\boldsymbol{u}}_1\frac{\partial\phi}{h_1\partial u_1} + \hat{\boldsymbol{u}}_2\frac{\partial\phi}{h_2\partial u_2} + \hat{\boldsymbol{u}}_3\frac{\partial\phi}{h_3\partial u_3}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3D_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1D_2 + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2D_3)\right]$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix}h_1\hat{\boldsymbol{u}}_1 & h_2\hat{\boldsymbol{u}}_2 & h_3\hat{\boldsymbol{u}}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3}\\ h_1H_1 & h_2H_2 & h_3H_3\end{vmatrix}$$

拉普拉斯算子为

$$\nabla^2\phi=\nabla\cdot\nabla\phi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}h_2h_3\frac{\partial\phi}{h_1\partial u_1}+\frac{\partial}{\partial u_2}h_3h_1\frac{\partial\phi}{h_2\partial u_2}+\frac{\partial}{\partial u_3}h_1h_2\frac{\partial\phi}{h_3\partial u_3}\right)$$

注意,其中的度量系数 h_1,h_2,h_3 与表 1.1-1 中所列的对应,我们可以轻易获得圆柱坐标和球坐标中的表达式。

例 1.1.9 带电粒子在静电场中的运动。

在球坐标系中,由电位函数 $\Phi=C/r$ 产生的静电场为

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\boldsymbol{\Phi}=-\hat{\boldsymbol{r}}\frac{\partial\Phi}{\partial r}=\hat{\boldsymbol{r}}\frac{C}{r^2}$$

其相应的电位移矢量为 $\boldsymbol{D}=\epsilon_o\boldsymbol{E}$。将库仑定律$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$ 应用于散度定理(1.1.40),

$$\iiint_V\mathrm{d}V\,\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\oiint_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{D}\tag{1.1.68}$$

得到

$$\iiint_V\mathrm{d}V\rho=\oiint_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{D}\tag{1.1.69}$$

假设电场来自位于原点的一个带电粒子,可以对一个包围原点半径 $r=\delta$ 的球体进行积分。在方程等号左边,对包围带电粒子的体积进行积分,得到总电荷量 q。在球坐标系中,$r=\delta$ 近距离上的表面积分单元为 $\hat{\boldsymbol{r}}r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$。因此有

$$q=\oiint_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{D}=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\delta^2\sin\theta\frac{\epsilon_oC}{\delta^2}=4\pi\epsilon_oC$$

这样就获得了常数 $C=q/4\pi\epsilon_o$ 以及由原点处一个带电粒子产生的静电场

$$\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{r}}\frac{q}{4\pi\epsilon_or^2}\tag{1.1.70}$$

习题

1.1.1 麦克斯韦方程组最初是以微分方程的形式表达的。对所有的场分量,将式(1.1.1),(1.1.2),(1.1.3),(1.1.4)和(1.1.5)写成偏微分形式,利用式(1.1.1)和(1.1.4)推导连续性方程。证明在给定连续性定理的条件下,库仑定律可由安培定律导出。类似的有,高斯定律可由法拉第定律导出以及式(1.1.3)和(1.1.4)不是相互独立的标量方程。

1.1.2 试求对$\nabla\times\boldsymbol{H}$ 在封闭面上进行面积分的结果,并将结果与旋度定理进行比较。旋度定理(1.1.45)是对由封闭面 S 包围的体积中的旋度进行积分得到的。

1.1.3 将旋度定理应用于一个 x-y 平面上，面积为 A，厚度为无限小 Δz 的扁盒子，推导 $\boldsymbol{E}$ 的边界条件。

1.1.4 一电磁波的空间频率为 $k_o = 100\mathrm{K_o}$，确定其波长(m)和时间频率(GHz)。对一束波长为 $\lambda = 0.6328\mu\mathrm{m}$ 的激光，确定其空间频率(单位以 $\mathrm{K_o}$ 表示)。对一工作在 2.4GHz 的微波炉，确定其空间频率(单位以 $\mathrm{K_o}$ 表示)。

1.1.5 电磁波满足麦克斯韦方程组中的所有方程。考虑自由空间中如下一些电场矢量：

$$\boldsymbol{E}_1 = \hat{x}\cos(\omega t - kz)$$

$$\boldsymbol{E}_2 = \hat{z}\cos(\omega t - kz)$$

$$\boldsymbol{E}_3 = (\hat{x} + \hat{z})\cos(\omega t + k|x - z|/\sqrt{2})$$

$$\boldsymbol{E}_4 = (\hat{x} + \hat{z})\cos(\omega t + k|x + z|/\sqrt{2})$$

$$\boldsymbol{E}_5 = (\hat{x} + \hat{z})\cos(\omega t + ky)$$

这些场矢量是否满足波动方程和麦克斯韦方程组中的所有方程？这 5 个场中哪些是真正的电磁波？对不是电磁波的场，请指出其违背了麦克斯韦方程组中的那个方程？

1.1.6 三个矢量 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 头尾相接组成一个三角形，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$ 是什么？$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$ 是什么？

1.1.7 一个位置矢量 $\boldsymbol{r} = \hat{x}\sqrt{2} + \hat{y} + \hat{z}2$。给出它在球坐标系下的分量 r,θ,ϕ 和圆柱坐标系下的分量 ρ,ϕ,z。

1.1.8 求单位矢量 $\hat{c}$ 使其与 $\boldsymbol{A} = \hat{x}4 + \hat{y}5 - \hat{z}3$ 和 $\boldsymbol{B} = \hat{x}2 - \hat{y}7 - \hat{z}1.5$ 正交。

1.1.9 对矢量 $\boldsymbol{A} = \hat{\rho}\rho^2 + \hat{z}2z$，在 $\rho = 5, z = 0$ 和 $z = 3$ 围成的圆柱中证明散度定理。

1.2 极化

波的极化的定义通常是指电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 的尖端在空间随时间变化的方向。如果矢量的尖端在一条直线上运动，就是线极化波。如果矢量的尖端的运动轨迹是一个圆，就是圆极化波。对椭圆极化波，$\boldsymbol{E}$ 的尖端的运动将描绘出一个椭圆，如果用右手的拇指指向波传播的方向，其他四指所指的方向正好与电场矢量运动的方向相同，这个波就是右旋极化波。如果一个波可以用左手来表示，它就是左旋极化波。

为了便于用数学表达，先将电场 $\boldsymbol{E}$ 在垂直于波的传播方向上分解为两个分量。对空间中的一点，我们有

$$\boldsymbol{E}(t) = \hat{\boldsymbol{h}}E_{\mathrm{h}} + \hat{\boldsymbol{v}}E_{\mathrm{v}} = \hat{\boldsymbol{h}}e_{\mathrm{h}}\cos(\omega t - \psi_{\mathrm{h}}) + \hat{\boldsymbol{v}}e_{\mathrm{v}}\cos(\omega t - \psi_{\mathrm{v}}) \tag{1.2.1}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{h}},\hat{\boldsymbol{v}}$ 以及波的传播方向三者构成了一个相互垂直的正交系统。假设 $e_{\mathrm{h}}, e_{\mathrm{v}}$ 都是正数，$\boldsymbol{E}(t)$的空间位置就决定于消去时间变量 t 之后的 E_{h} 和 E_{v}。

例 1.2.1 在1.1 节中推导出的波动方程(1.1.16)

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E} = 0$$

是由含有空间和时间变量 x,y,z 和 t 的三个二阶标量偏微分方程组成的。每一个标量方程代表 $\boldsymbol{E}$ 的一个分量。

现在研究沿 $\hat{z}$ 方向传播的电磁波波动方程(1.1.16)的解。由于电场 $\boldsymbol{E}$ 只是 z 和 t 的函数，其满足的波动方程就变为

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\boldsymbol{E} - \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E} = 0 \tag{1.2.2}$$

最为简单的解可写为

$$E = \hat{x}E_x(z,t) = \hat{x}E_0\cos(kz - \omega t)$$

将其带入式(1.2.2),得到了色散关系(1.1.19)

$$k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$$

它将空间频率 k 和时间频率 ω 联系了起来。

电场矢量在 $\hat{y}$ 方向并向 $\hat{z}$ 方向传播的电磁波 $E = \hat{y}E_y(z,t)$ 也是波动方程(1.2.2)的解。现研究如下形式波动方程的解

$$E = \hat{x}E_x(z,t) + \hat{y}E_y(z,t)$$

这里 E 既有 $\hat{x}$ 方向的分量,也有 $\hat{y}$ 方向的分量。

考虑具有如下电场矢量形式的、沿 $\hat{z}$ 方向传播的电磁波

$$E(t) = \hat{x}E_x + \hat{y}E_y = \hat{x}e_x\cos(kz - \omega t + \psi_x) + \hat{y}e_y\cos(kz - \omega t + \psi_y) \tag{1.2.3}$$

将其带入公式(1.1.17)则得到色散关系式(1.1.19)。采用时间观察方式以在一个固定的空间位置,比如 $z=0$,来观察电场矢量的轨迹。为进一步再现式(1.2.1)所示的表达式,可将式中的 $\hat{x}$ 换成 $\hat{h}$, $\hat{y}$ 换成 $\hat{v}$。

现在研究式(1.2.1)所表示的极化。考虑如下特殊情况。

情况1 $\psi_v - \psi_h = 2m\pi$,其中 $m=0,1,2,\cdots$为整数。有

$$E(t) = \hat{h}e_h\cos(\omega t - \psi_h) + \hat{v}e_v\cos(\omega t - \psi_h)$$

其电场矢量的端点如图1.2-1(a)所示在一条直线上运动。该波是线极化的。

情况2 $\psi_v - \psi_h = (2m+1)\pi$,有

$$E(t) = \hat{h}e_h\cos(\omega t - \psi_h) - \hat{v}e_v\cos(\omega t - \psi_h)$$

其电场矢量的端点如图1.2-1(b)所示也在一条直线上运动。该波是线极化的。

情况3 $\psi_v - \psi_h = \pi/2$ 和 $e_h = e_v = e_0$,有

$$E(t) = e_0[\hat{h}\cos(\omega t - \psi_h) + \hat{v}\sin(\omega t - \psi_h)] \tag{1.2.4}$$

不难看出,当 h 分量取其最大值 e_0 时,v 分量等于零。随着时间的推移,v 分量将不断增长,h 分量将不断减少。E 的端点由 E_h 轴的正方向向 E_v 轴的正方向旋转,如图1.2-1(c)所示。将式(1.2.4)h 和 v 中的时间变量 t 消掉,得到一个以 e_0 为半径的圆的方程,$E_h^2 + E_v^2 = e_0^2$。因此,该波是右旋圆极化的。与此类似,可以证明当 $\psi_v - \psi_h = -\pi/2$ 时,波是左旋圆极化的,如图1.2-1(d)所示。

情况4 $\psi_v - \psi_h = -\pi/2$ 和 $e_h = e_v = e_0$,有

$$E(t) = e_0[\hat{h}\cos(\omega t - \psi_h) - \hat{v}\sin(\omega t - \psi_h)] \tag{1.2.5}$$

随着时间的推移,v 分量将不断增长,h 分量将不断减少。E 的端点由 E_h 轴的正方向向 E_v 轴的负方向旋转,如图1.2-1(d)所示。因此,波是左旋圆极化的,如图1.2-1(d)所示。

情况5 $\psi_v - \psi_h = \pm\pi/2$,有

$$E(t) = \hat{h}e_h\cos(\omega t - \psi_h) \pm \hat{v}\, e_v\sin(\omega t - \psi_h) \tag{1.2.6}$$

当 $\psi_v - \psi_h = -\pi/2$ 时,波是右旋椭圆极化的,如图1.2-1(e)所示,当 $\psi_v - \psi_h = -\pi/2$ 时,波是左

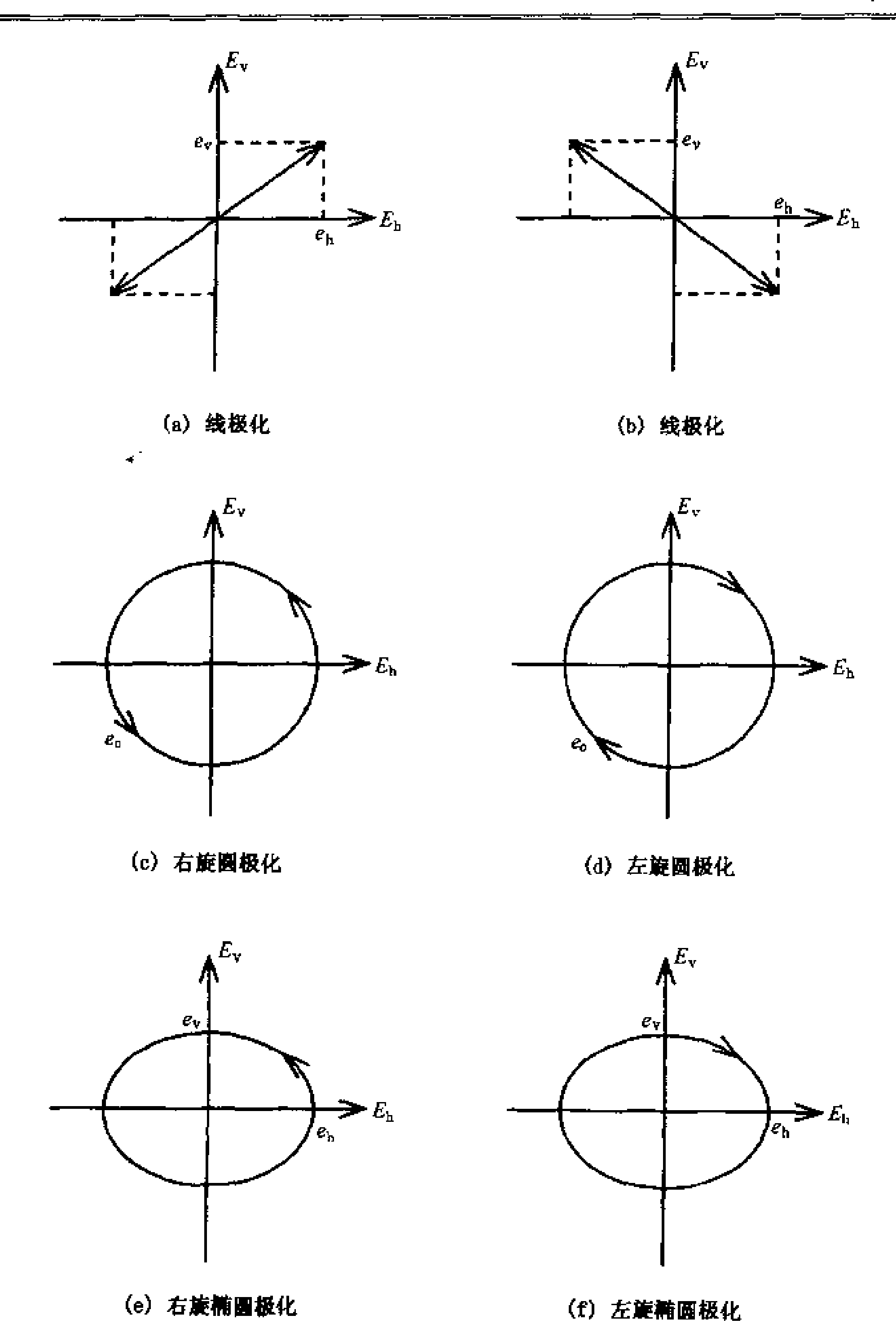


图 1.2-1 波的极化

旋椭圆极化的,如图 1.2-1(f)所示。

上述讨论可用图 1.2-2 加以总结,图中的极化通过振幅比

$$e_v/e_h = A \tag{1.2.7}$$

和相位差

$$\psi = \psi_v - \psi_h \tag{1.2.8}$$

来表示。在水平轴上,如果 $\psi = 0$ 或 π,波将是线极化的。如果 $A = 1, \psi = \pi/2$,波将是右旋圆极化的。如果 $A = 1, \psi = -\pi/2$,波将是左旋圆极化的。其他情况下,波都是椭圆极化的。右旋极化时相位差在 0 和 π 之间,左旋极化时相位差在 π 和 2π 之间。

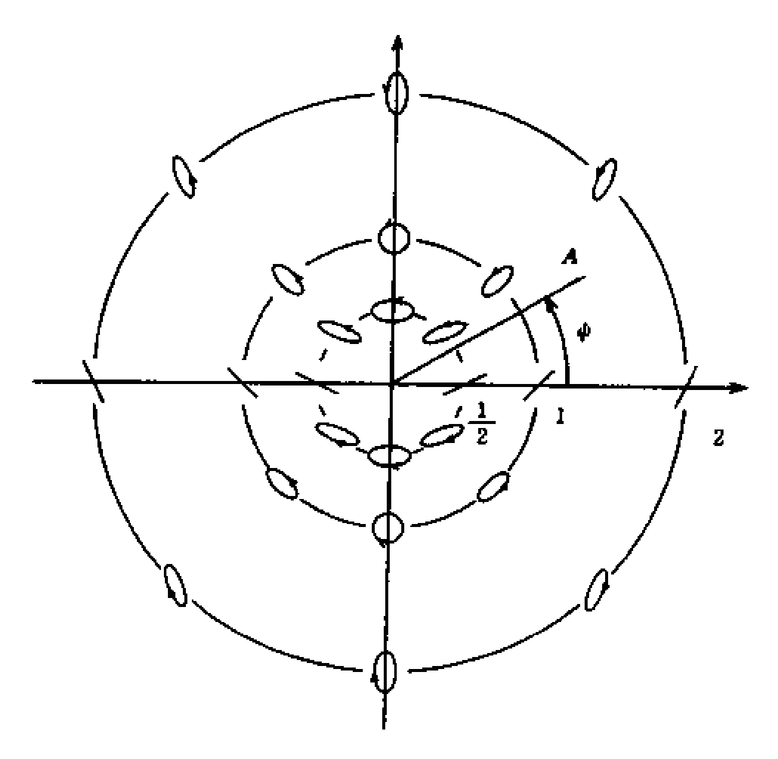


图1.2-2 不同幅度比和相位差的极化图

例1.2.2 从空间角度来观察极化。

波的极化可以通过在一个固定时刻取其在不同空间位置的图像来观察,即从空间的角度来观察;或是在一个固定的空间位置,取其不同时刻的图像来观察,即从时间的角度来观察。到目前为止关于极化定义的讨论都是从时间的角度来观察的。下面让我们从空间的角度来观察一下波的极化。

考虑波动方程的解:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=E_0[\hat{\boldsymbol{x}}\cos(kz-\omega t)+\hat{\boldsymbol{y}}\sin(kz-\omega t)]$$

波沿着正 $\hat{z}$ 方向传播。在 $z=0$ 时,

$$\boldsymbol{E}(z=0,t)=E_0[\hat{\boldsymbol{x}}\cos(\omega t)-\hat{\boldsymbol{y}}\sin(\omega t)]$$

这是一个左旋圆极化平面波。在 $t=0$ 时,

$$E_x=E_0\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}z\right)$$

$$E_y=E_0\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}z\right)$$

螺旋线的参数方程为

$$x=R\cos\left(\frac{2\pi}{p}z\right)$$

$$y=R\sin\left(\frac{2\pi}{p}z\right)$$

其中, p 是螺距。因此,电场矢量的端点沿 $\hat{z}$ 轴行进的轨迹就是一个螺距 $p=\lambda$ 的右旋螺旋线。在 $\omega t=\pi/4$ 时,

$$E_x=E_0\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(z-\frac{\lambda}{8}\right)\right]$$

$$E_y = E_0\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(z - \frac{\lambda}{8}\right)\right]$$

整个螺旋线不做旋转地向正 $\hat{z}$ 方向移动，如图 1.2-3 所示。

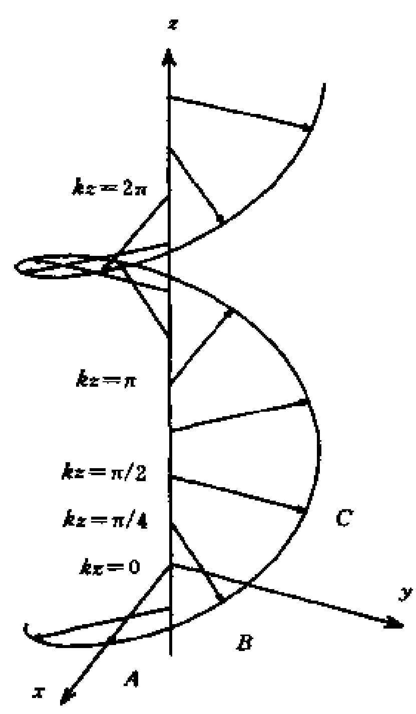


图 1.2-3 从空间观察圆极化波

专题 1.2.A 斯托克斯(Stokes)参数和庞加莱(Poincare)极化球

当 ψ_h 和 ψ_v 之间相差 2π 的整数倍时，$\psi_v - \psi_h = 2n\pi$，两个极化分量同相，有 $E_h/e_h = E_v/e_v$。波是线极化的，并且其极化方向在第一和第三象限之间交替变化，如图 1.2-1(a)所示。当 ψ_h 和 ψ_v 之间相差 π 的奇数倍时，两个极化分量的相位差为 180°，有 $E_h/e_h = -E_v/e_v$，且其极化方向在第二和第四象限之间交替变化，如图 1.2-1(b)所示。

当两个极化分量的幅度相等，$e_h = e_v = e_0$，相位 $\psi_v - \psi_h = \pi/2$ 时，波是右旋圆极化的，如图 1.2-1(c)所示。当 $e_h = e_v = e_0$，相位 $\psi_v - \psi_h = -\pi/2$ 时，波是左旋圆极化的如图 1.2-1(d)所示。

椭圆极化

一般情况下，极化波总是椭圆极化的，这就是说，当把时间变量从 $\boldsymbol{E}$ 的两个极化分量中消去后，其结果将是一个椭圆方程。考虑当式(1.2.1)中，$\psi_h = \psi_0$，$\psi_v - \psi_h = \pm\pi/2$ 和 $e_h = e_1 > e_2 = e_v$ 几种情况时，有

$$\boldsymbol{E}(t) = \hat{h}e_1\cos(\omega t - \psi_0) \pm \hat{v}e_2\sin(\omega t - \psi_0) \tag{1.2.9}$$

将时间变量消去的椭圆方程

$$\left(\frac{E_h}{e_1}\right)^2 + \left(\frac{E_v}{e_2}\right)^2 = 1$$

绘于图 1.2-4，可以看到 e_1 是椭圆的长轴，e_2 是椭圆的短轴。如在式(1.2.9)中取正号，可得到如图 1.2-1(e)右旋椭圆极化波，若在式(1.2.9)中取负号，可得到如图 1.2-1(f)所示的左旋椭圆极化波。

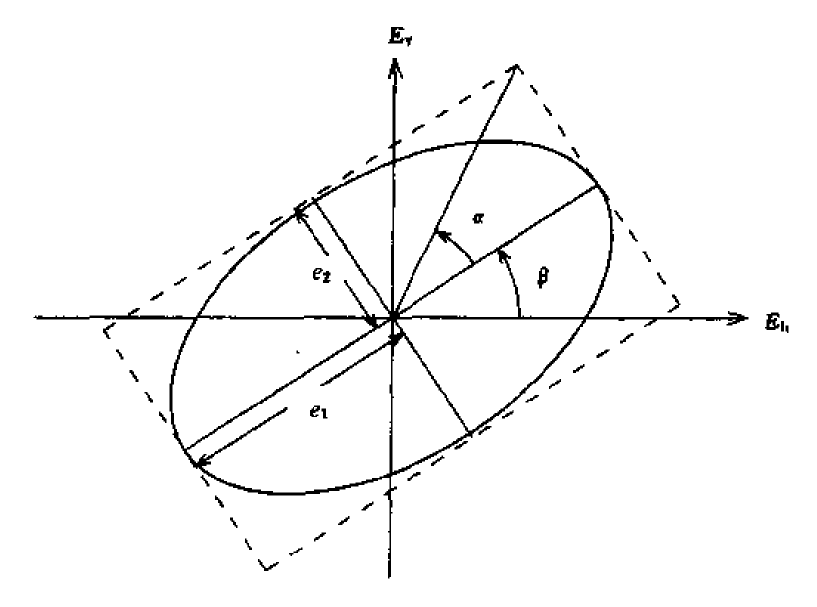


图 1.2-4 椭圆极化

一般形式的椭圆极化常用 Poincare 极化球表示。考虑式(1.2.1)给出的椭圆极化波，其描述了一个倾斜的椭圆极化情况，如图 1.2-4 所示(习题 1.2.2 将给出证明)。这个椭圆的长轴如式(1.2.9)描述由 E_h 轴旋转了一个角度 $\beta, 0 \leqslant \beta \leqslant \pi$。我们将 β 称为倾角。椭圆的形状可以用椭圆度角 α 来定义。在公式(1.2.9)中，e_1 表示长轴，e_2 表示短轴，我们有

$$\tan\alpha = \pm \frac{e_2}{e_1} \tag{1.2.10}$$

其中，正号对应右旋极化 $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/4$，负号对应左旋极化 $-\pi/4 \leqslant \alpha \leqslant 0$。

例 1.2.3 坐标变换。

考虑两个直角坐标系分别用单位矢量$(\hat{x}, \hat{y})$和$(\hat{x}', \hat{y}')$表示。用未加撇的第一个坐标系中的单位矢量做变量，加撇的第二个坐标系的单位矢量可以表示为

$$\hat{x}' = \hat{x}\cos\beta + \hat{y}\sin\beta$$
$$\hat{y}' = -\hat{x}\sin\beta + \hat{y}\cos\beta$$

一个位置矢量可以表示为 $\boldsymbol{r} = \hat{x}'x' + \hat{y}'y' = \hat{x}x + \hat{y}y$。两个坐标系$(x, y)$和$(x', y')$的变换可以表示为

$$x' = \hat{x}' \cdot \boldsymbol{r} = (\hat{x}' \cdot \hat{x})x + (\hat{x}' \cdot y)y = x\cos\beta + y\sin\beta$$
$$y' = \hat{y}' \cdot \boldsymbol{r} = (\hat{y}' \cdot \hat{x})x + (\hat{y}' \cdot y)y = -x\sin\beta + y\cos\beta$$

由公式(1.2.9)和图 1.2-4 以及坐标变换，可以得到

$$e_1\cos(\omega_t - \psi_0) = E_h\cos\beta + E_v\sin\beta \tag{1.2.11a}$$

$$e_2\sin(\omega_t - \psi_0) = -E_h\sin\beta + E_v\cos\beta \tag{1.2.11b}$$

将公式(1.2.1)中的 E_h 和 E_v 分量带人式(1.2.11)并比较 $\cos\omega t$ 和 $\sin\omega t$ 项的系数，得到

$$e_1\cos\psi_0 = e_h\cos\psi_h\cos\beta + e_v\cos\psi_v\sin\beta \tag{1.2.12a}$$

$$e_1\sin\psi_0 = e_h\sin\psi_h\cos\beta + e_v\sin\psi_v\sin\beta \tag{1.2.12b}$$

$$e_2\cos\psi_0 = -e_h\sin\psi_h\sin\beta + e_v\sin\psi_v\cos\beta \tag{1.2.12c}$$

$$e_2\sin\psi_0 = e_h\cos\psi_h\sin\beta - e_v\cos\psi_v\cos\beta \tag{1.2.12d}$$

通过平方相加，消去式(1.2.12a)和(1.2.12b)中的 ψ_0，得到

$$e_1^2 = e_h^2\cos^2\beta + e_v^2\sin^2\beta + e_h e_v \sin 2\beta\cos\psi \tag{1.2.13a}$$

用同样的方法从式(1.2.12c)和(1.2.12d)中，可以得到

$$e_2^2 = e_h^2\sin^2\beta + e_v^2\cos^2\beta - e_h e_v \sin 2\beta\cos\psi \tag{1.2.13b}$$

将式(1.2.12a)和(1.2.12c)相乘，(1.2.12b)和(1.2.12d)相乘，然后将结果相加，可以再次消去 ψ_0 并得到

$$e_1 e_2 = e_h e_v \sin\psi \tag{1.2.13c}$$

最后将(1.2.12a)和(1.2.12d)相乘，(1.2.12b)和(1.2.12c)相乘，然后将结果相减，得到

$$2e_h e_v \cos\psi = (e_h^2 - e_v^2)\tan 2\beta \tag{1.2.13d}$$

式(1.2.13)将被用于下面关于斯托克斯参数和 Poincare 极化球的讨论。

为给关于电磁波的极化状态的讨论做准备，与式(1.2.1)中电场 $\boldsymbol{E}(t)$ 相关的斯托克斯参数定义如下。

$$I = \frac{1}{\eta}(e_h^2 + e_v^2) \tag{1.2.14a}$$

$$Q = \frac{1}{\eta}(e_h^2 - e_v^2) \tag{1.2.14b}$$

$$U = \frac{2}{\eta}e_h e_v \cos\psi \tag{1.2.14c}$$

$$V = \frac{2}{\eta}e_h e_v \sin\psi \tag{1.2.14d}$$

其中，$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$。

将(1.2.13a)和(1.2.13b)相加得 $e_1^2 + e_2^2 = e_h^2 + e_v^2 = \eta I$。利用(1.2.10)式，得到

$$e_1^2 = \eta I\cos^2\alpha \tag{1.2.15}$$

用(1.2.13a)减(1.2.13b)式并利用(1.2.13d)式，可以得到 $e_1^2 - e_2^2 = (e_h^2 - e_v^2)/\cos 2\beta$。利用(1.2.10)和(1.2.15)式，得到

$$Q = \frac{1}{\eta}(e_h^2 - e_v^2) = I\cos 2\alpha\cos 2\beta \tag{1.2.16a}$$

仍用 I 做变量，由式(1.2.14c)，(1.2.13d)和(1.2.16a)得到

$$U = I\cos 2\alpha\sin 2\beta \tag{1.2.16b}$$

又从式(1.2.14d)，(1.2.13c)和(1.2.15)得到

$$V = I\sin 2\alpha \tag{1.2.16c}$$

这样，再次从式(1.2.16)得到 $I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$。

如果将 Q，U 和 V 作为空间一点在直角坐标系中的三个坐标分量，将 I 作为其矢径的话，式(1.2.16)则将所有的极化状态用一种简单的几何关系来表示(见图 1.2-5)。在球坐标中，定义 $\theta = \pi/2 - 2\alpha$ 和 $\phi = 2\beta$。从式(1.2.8)可知，正数的 α 表示右旋极化。这里用球的上半部的点表示，球的下半部的点则表示左旋极化。球的北极表示右旋圆极化，球的南极表示左旋圆极化，这个球叫做 Poincare 球。图 1.2-5 是 Poincare 球在 $Q = I$ 处与球相切的平面上的投影。球的赤道在图 1.2-5 中被投影到水平轴上。

部分极化

许多自然和人造源的辐射都包含随时间涨落的场分量，如

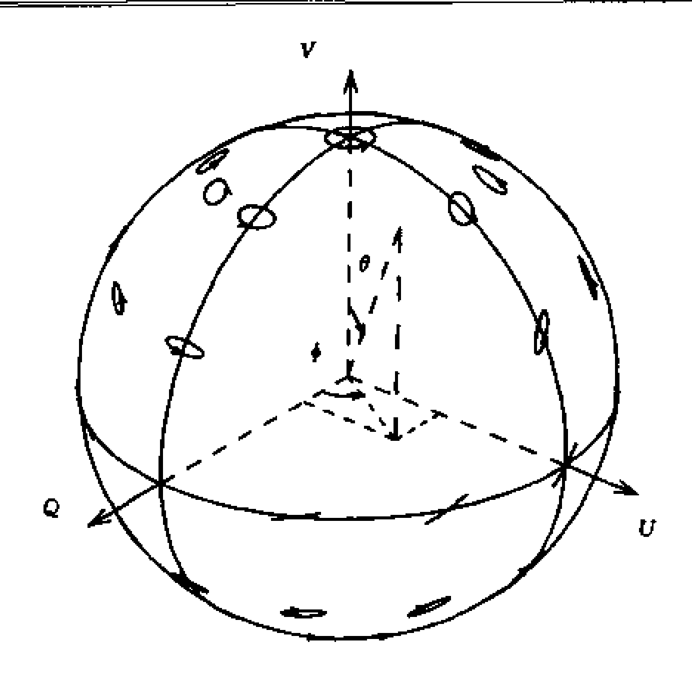


图 1.2-5 Poincare 球

$$E_h = e_h(t)\cos(\omega t - \varphi_h(t))$$

$$E_v = e_v(t)\cos(\omega t - \varphi_v(t))$$

如果 $e_h(t)$,$e_v(t)$,$\psi_h(t)$和 $\psi_v(t)$与 $\cos\omega t$ 相比是慢变化的时间函数,这种波就是准单色波。在一个长时间段 T 内,斯托克斯参数定义为一个时变过程,用⟨⟩表示,

$$\langle E_h^2(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t[E_h(t)]^2$$

这样的斯托克斯参数为

$$I = I_h + I_v = \frac{1}{\eta}(\langle E_h^2\rangle + \langle E_v^2\rangle)$$

$$Q = I_h - I_v = \frac{1}{\eta}(\langle E_h^2\rangle - \langle E_v^2\rangle) = I\langle\cos 2\alpha\cos 2\beta\rangle$$

$$U = \frac{2}{\eta}\langle E_h E_v \cos\psi\rangle = I\langle\cos 2\alpha\sin 2\beta\rangle$$

$$V = \frac{2}{\eta}\langle E_h E_v \sin\psi\rangle = I\langle\sin 2\alpha\rangle$$

对完全无极化波,E_h 和 E_v 是不相关的,且 I 为全部坡印廷功率,$Q = U = V = 0$。对完全极化波,有 $I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$。对部分极化波可以证明 $I^2 \geqslant Q^2 + U^2 + V^2$(例 1.2.4)。用矢径为 I 的 Poincare 球,部分极化波用球内的点来表示。

作为波的极化一节的总结,我们重申极化是由 $\boldsymbol{E}$ 矢量的时间变化来定义的。在第 3 章中将介绍,在各向异性和双异性介质中为什么需要将极化由 $\boldsymbol{D}$ 来定义。这是因为在各向同性介质中,$\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 是正交的,$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E} = 0$,而在各向异性介质中,$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{D} = 0$。这就意味着波的极化同样也可以用场矢量 $\boldsymbol{B}$ 来定义。

例 1.2.4

(1) 假设 $e_v(t)$,$e_h(t)$和 $\varphi(t)$在一个相应的时间区段 t_n 中可保持为常数,且设 T 可分为 $t_1, t_2, \cdots, t_n$。时间平均值就可以写为累加的形式,

$$I_h = \frac{1}{\eta T}\sum_n t_n e_{hn}^2$$

$$I_v = \frac{1}{\eta T}\sum_n t_n e_{vn}^2$$

$$U = \frac{2}{\eta T}\sum_n t_n e_{vn}^2 A_n \cos\psi n$$

$$V = \frac{2}{\eta T}\sum_n t_n e_{vn}^2 A_n \sin\psi n$$

其中,

$$A_n = \frac{e_{hn}}{e_{vn}}$$

表示在一个时间区段 t_n 中 e_h 与 e_v 的比值。假设 e_h 和 e_v 均为正数,证明:

$$4I_v I_h \geqslant U^2 + V^2$$

或

$$I^2 = (I_h + I_v)^2 \geqslant Q^2 + U^2 + V^2$$

只要 $\psi_n = \psi_m$ 以及 $A_n = A_m$,那么式中等号对所有 n 和 m 都成立。这表明 E_h 和 E_v 的幅度比和相位差都保持为常数。这是一个椭圆极化的例子。

(2) 对一个极化波

$$I = I_h + I_v$$

$$Q = I_h - I_v = I\cos 2\alpha \cos 2\beta$$

$$U = I\cos 2\alpha \sin 2\beta$$

$$V = I\sin 2\alpha$$

证明当其为右旋圆极化时,$Q = U = 0$ 且 $V = I$;当其为左旋圆极化时,$Q = U = 0$ 且 $V = -I$ 以及当其为线极化时,$V = 0$。

解

(1) 由于

$$\begin{aligned}
4I_h I_v &= \frac{4}{\eta^2 T^2}\left(\sum_n \sum_m t_n t_m A_n^2 e_{vn}^2 e_{vm}^2\right) \\
&= \frac{4}{\eta^2 T^2}\left(\sum_n t_n^2 A_n^2 e_{vn}^4 + \sum_{n \neq m} t_n t_m A_n^2 e_{vn}^2 e_{vm}^2\right) \\
&= \frac{4}{\eta^2 T^2}\left[\sum_n t_n^2 A_n^2 e_{vn}^4 + \sum_{n > m} t_n t_m (A_n^2 + A_m^2) e_{vn}^2 e_{vm}^2\right) \\
U^2 &= \frac{4}{\eta^2 T^2}\left(\sum_n \sum_m t_n t_m A_n A_m e_{vn}^2 e_{vm}^2 \cos\psi_n \cos\psi_m\right) \\
&= \frac{4}{\eta^2 T^2}\left(\sum_n t_n^2 A_n^2 e_{vn}^4 \cos^2\psi_n + 2\sum_{n > m} t_n t_m A_n A_m e_{vn}^2 e_{vm}^2 \cos\psi_n \cos\psi_m\right) \\
V^2 &= \frac{4}{\eta^2 T^2}\left(\sum_n \sum_m t_n t_m A_n A_m e_{vn}^2 e_{vm}^2 \sin\psi_n \sin\psi_m\right) \\
&= \frac{4}{\eta^2 T^2}\left(\sum_n t_n^2 A_n^2 e_{vn}^4 \sin^2\psi_n + 2\sum_{n > m} t_n t_m A_n A_m e_{vn}^2 e_{vm}^2 \sin\psi_n \sin\psi_m\right)
\end{aligned}$$

因此,

$$U^2 + V^2 = \frac{4}{\eta^2 T^2}\left[\sum_n t_n^2 A_n^2 e_{vn}^4 + 2\sum_{n > m} t_n t_m e_{vn}^2 e_{vm}^2 A_n A_m \cos(\psi_n - \psi_m)\right]$$

得到

$$
\begin{aligned}
&4I_{\mathrm{v}}I_{\mathrm{h}}-(U^2+V^2)\\
&=\frac{4}{\eta^2T^2}\sum_{n>m}t_nt_me_{\mathrm{v}n}^2e_{\mathrm{v}m}^2[A_m^2+A_n^2-2A_mA_n\cos(\psi_n-\psi_m)]\\
&\geqslant\frac{4}{\eta^2T^2}\sum_{n>m}t_nt_me_{\mathrm{v}n}^2e_{\mathrm{v}m}{}^2(A_m^2+A_n^2-2A_mA_n)\\
&=\frac{4}{\eta^2T^2}\sum_{n>m}t_nt_me_{\mathrm{v}n}^2e_{\mathrm{v}m}{}^2(A_m-A_n)^2
\end{aligned}
$$

等式右边是非负的。所以 $4I_{\mathrm{v}}I_{\mathrm{h}}\geqslant U^2+V^2$。

(2) 对右旋圆极化波有 $\alpha=\pi/4$,则

$$
\begin{aligned}
Q&=I\cos(2\pi/4)\cos(2\beta)=0\\
U&=I\cos(2\pi/4)\sin(2\beta)=0\\
V&=I\sin(2\pi/4)=I
\end{aligned}
$$

对左旋圆极化波有 $\alpha=-\pi/4$,则

$$
\begin{aligned}
Q&=I\cos(-2\pi/4)\cos(2\beta)=0\\
U&=I\cos(-2\pi/4)\sin(2\beta)=0\\
V&=I\sin(-2\pi/4)=I
\end{aligned}
$$

对线极化波有 $\alpha=0$,则

$$V=I\sin 0=0$$

习题

1.2.1 考虑一个沿 $\hat{z}$ 方向传播的电磁波

$$\boldsymbol{E}=\hat{x}E_x\cos(kz-\omega t+\psi_x)+\hat{y}E_y\cos(kz-\omega t+\psi_y)$$

其中,E_x,E_y,ψ_x 和 ψ_y 都是实数。

(1) 设 $E_x=2,E_y=1,\psi_x=\pi/2,\psi_y=\pi/4$,问这是什么极化。

(2) 设 $E_x=1,E_y=\psi_x=0$。这是一个线极化波。证明它可以由一个右旋圆极化和一个左旋圆极化波合成得到。

(3) 设 $E_x=1,\psi_x=\pi/4,\psi_y=-\pi/4,E_y=1$,这是一个圆极化波。证明它可以分解为两个线极化波。

1.2.2 由式(1.2.1),证明

$$\frac{E_{\mathrm{h}}}{e_{\mathrm{h}}}\sin\psi_{\mathrm{v}}-\frac{E_{\mathrm{v}}}{e_{\mathrm{v}}}\sin\psi_{\mathrm{h}}=\cos\omega t\sin\psi$$

$$\frac{E_{\mathrm{h}}}{e_{\mathrm{h}}}\cos\psi_{\mathrm{v}}-\frac{E_{\mathrm{v}}}{e_{\mathrm{v}}}\cos\psi_{\mathrm{h}}=-\sin\omega t\sin\psi$$

消去时间变量 t 得到方程

$$\left(\frac{E_{\mathrm{h}}}{e_{\mathrm{h}}}\right)^2+\left(\frac{E_{\mathrm{v}}}{e_{\mathrm{v}}}\right)^2-2\frac{E_{\mathrm{h}}E_{\mathrm{v}}}{e_{\mathrm{h}}e_{\mathrm{v}}}\cos\psi=\sin^2\psi$$

证明这是一个如图 1.2-4 所示的倾斜的椭圆。

1.2.3 1911 年阳光导航作用被第一次发现。大自然中的蚂蚁、马蹄蟹、蜜蜂等具有感受光的极化能力,蓝天中只要有一线光亮,这些生灵就可以找到方向。天空中光的极化取决于太阳到天空中某一观察点的直射光与观察者视线间的夹角 ϕ。这是因为阳光在被大气中的分子散射时,被照射的分子的响应就像偶极天线一样。由偶极子散射的电场 E_s 的极化是包含在偶极子的平面内的。散射场的幅度在垂直于偶极轴的平面内取最大值。

画图示出当直接观察阳光时，其光线是无极化的，而当向天空中其他方向观察时，其散射光就具有了极化特性。证明当夹角 ϕ 趋向 90°时，极化将趋向线极化(Scientific American，1955.7)。

1.3 洛伦兹力定律

电磁场与电流和电荷密度之间的相互作用遵循洛伦兹(Lorentz)力定律

$$\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} \tag{1.3.1}$$

其中，$\boldsymbol{f}$ 为力。洛伦兹力定律将电磁学与力学联系了起来。电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 和磁场磁量 $\boldsymbol{B}$ 的存在可以通过电荷密度 ρ 或电流密度 $\boldsymbol{J}$ 所受到的力来证明。因此，可以用这样的方法来定义 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$。

例 1.3.1 库伦定律。

对无磁场存在的静电场，洛伦兹力定律的形式变为 $\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}$。作用于一个带电粒子 q 的总的力为 $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}$。设电场是由另外一个位于原点的带电粒子 Q 产生的，由式(1.1.70)可有

$$\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{r}}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

则作用于电荷 q 上的合力为

$$\boldsymbol{F}=\hat{\boldsymbol{r}}\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

其与距离的平方成反比，这就是库仑定律。

例 1.3.2 回旋加速频率(见图 1.3-1)。

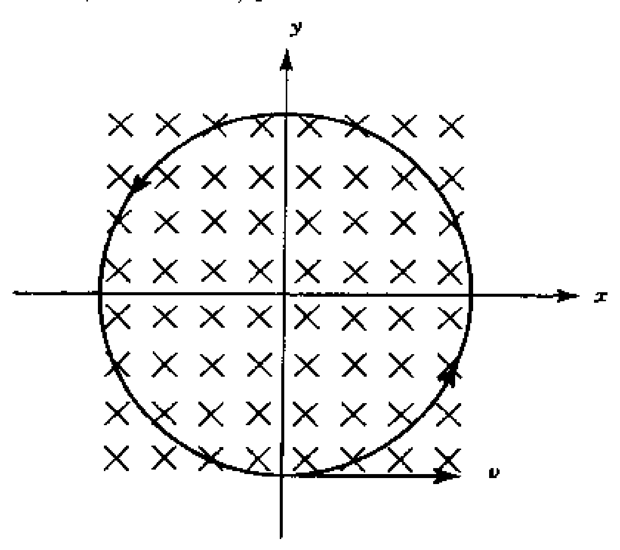


图 1.3-1 回旋频率

对无电场存在的静磁场，作用在带电荷 q 的粒子上的洛伦兹力的形式为 $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$，均匀静磁场的方向为负号，且 $\boldsymbol{B}=-\hat{z}B_0$。如果速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 在 $\hat{z}$ 方向上没有分量，洛伦兹力与速度矢量正交且带电粒子 $\hat{z}$ 只在 x-y 平面内运动。如果洛伦兹力与离心力 mv^2/R 正好相等，粒子的轨迹将呈圆形，其中 R 为圆的半径。因此有 $qvB_0=mv^2/R$，使粒子运动一圈所用的时间为 $2\pi R/v$，其运动的角频率为

$$\omega_c = \frac{v}{R} = \frac{qB_0}{m}$$

这个角频率与粒子运动的速度无关。对一个在静磁场 B_0 中的质量为 m，带电量为 q 的粒子，其回旋加速频率 f_c 为 $qB_0/2\pi m$，其回旋运动圆周的半径为 $R = mv/qB_0$。磁场 B 的强度越大，回旋半径越小。如果带电粒子在 $\hat{z}$ 方向上有分量，粒子运动的轨迹就为一个螺旋线。

例 1.3.3 回旋加速器。

如图 1.3-2 所示，回旋加速器是一个对带电粒子的加速装置。交流电源按回旋加速频率提供交变电压，带电粒子每一次通过这一电压降时都被加速。

例 1.3.4 同位素分离。

为了从 ^{238}U 中分离出同位素 ^{235}U，要先将其挥发然后通过放电离子化。为使其通过电压降 V，必须先使其获得动能 $qV = mv^2/2$。通过如图 1.3-3 所示的一个均匀磁场，同位素将沿半径不同的圆轨迹运动。

$$\frac{R_{235}}{R_{238}} = \frac{m_{235}v_{235}}{m_{238}v_{238}} = \frac{m_{235}}{m_{238}}\sqrt{\frac{m_{238}}{m_{235}}} = \sqrt{\frac{m_{235}}{m_{238}}}$$

这样 ^{235}U 就可以在半径较小处的收集器中获得。

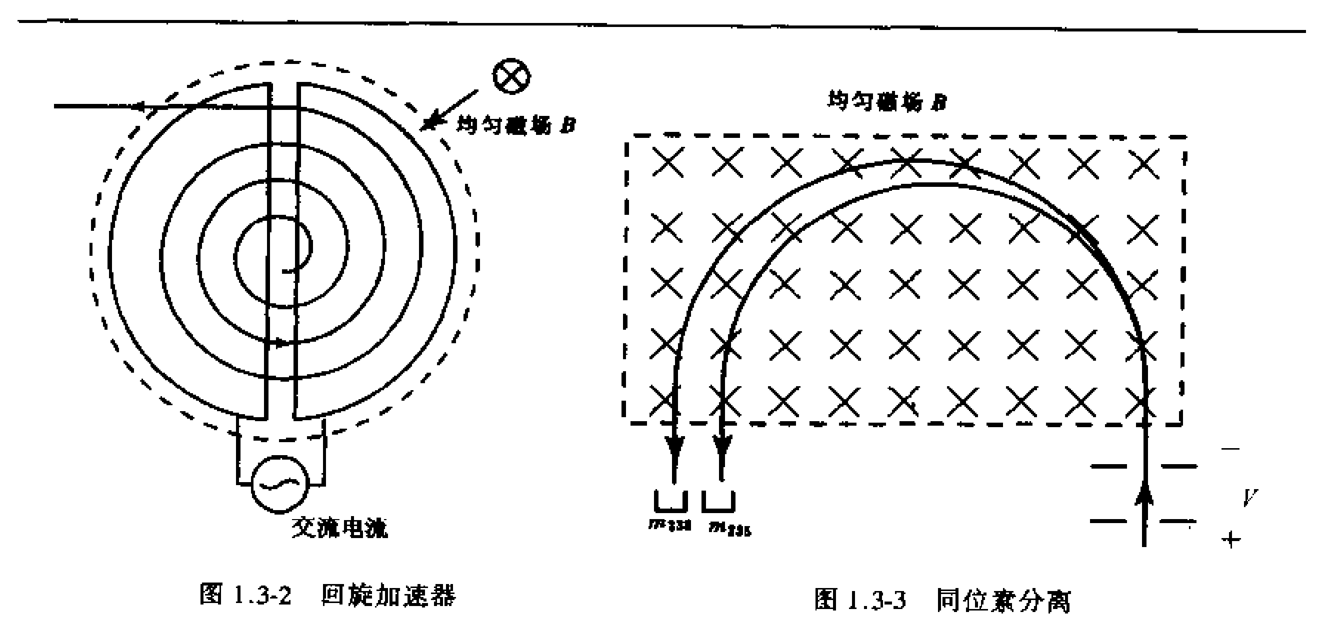


图 1.3-2 回旋加速器　　　　图 1.3-3 同位素分离

例 1.3.5 线性电机和发电机。

图 1.3-4 给出了一个在直流磁场 $\boldsymbol{B} = \hat{z}B_0$ 中长度为 l 的滑棒。根据洛伦兹力定律，

$$\boldsymbol{F}_m = \hat{y}Il \times \hat{z}B_0 = \hat{x}IlB_0$$

将产生一个把滑棒推向 $\hat{x}$ 方向的力。

若有一个外力以速度 $v = -\hat{x}$ 将滑棒推向 $-\hat{x}$ 方向，如图 1.3-5 所示，在电阻上将会产生一个感应电压 $V = vlB_0$。

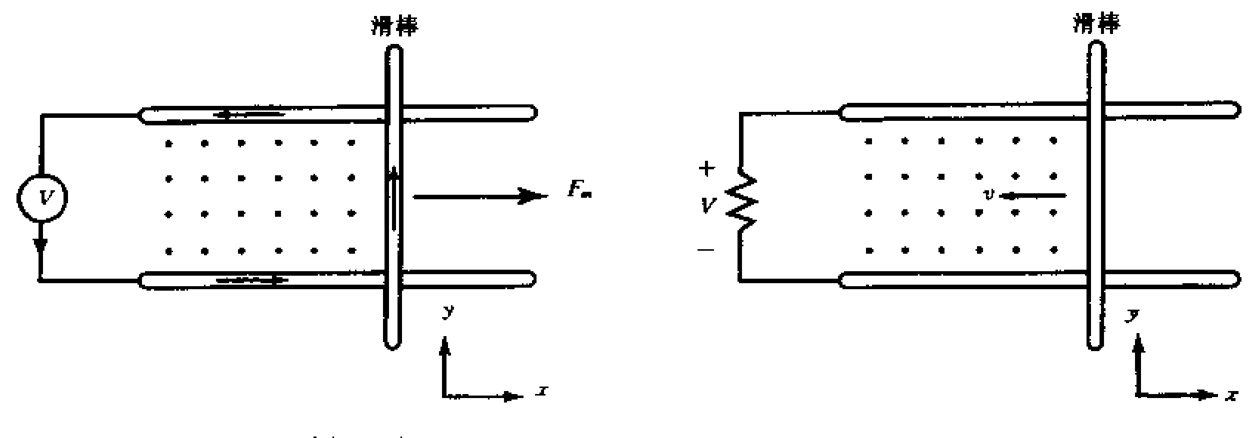


图 1.3-4 线性电动机　　　图 1.3-5 线性发电机

例 1.3.6 磁力矩和磁扭矩。

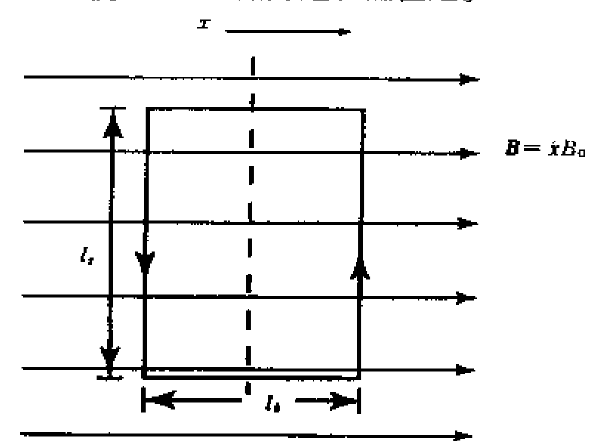


图 1.3-6 回路的扭矩

一个流动着恒定电流 I 的矩形回路，被放置在一个恒定的磁场 $\boldsymbol{B}=\hat{x}B_0$ 之中，如图 1.3-6 所示。我们定义磁力矩为 $\boldsymbol{M}=\hat{m}M$。它的方向遵循右手法则：将右手四指指向电流方向，拇指所指的方向就是 $\hat{m}$ 的方向。力矩的幅度等于回路的面积与电流 I 的乘积，$M=AI$。如果回路的边长分别为 l_b 和 l_z，则回路的面积 $A=l_bl_z$。

当回路位于 x-z 平面之中且其中两边与 x 轴平行，另外两边与 z 轴平行时，由于恒定磁场的方向与 x 轴方向一致，没有力作用在与 x 轴平行的两个边 l_b 上。作用在与 z 轴平行的两条边 l_z 上的力将分别在 $+\hat{y}$ 和 $-\hat{y}$ 两个方向上。因此，回路将围绕 $\hat{z}$ 轴依右手法则旋转，即当右手四指指向旋转方向时，其拇指将指向 $\hat{z}$ 轴的正方向。

作用在回路上的扭矩可以用下式来计算，

$$\boldsymbol{T}=\frac{1}{2}l_b\hat{x}\times(\hat{z}\times\hat{x}Il_zB_0)-\frac{1}{2}l_b\hat{x}\times(-\hat{z}\times\hat{x}Il_zB_0)=\hat{z}IAB_0$$

对这一系统，$\boldsymbol{M}=-\hat{x}IA$，$\boldsymbol{B}=\hat{z}B_0$。在一般情况下，磁扭矩可由下式计算

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{B}$$

磁扭矩不会作用于 $\boldsymbol{M}$ 在磁场方向的分量上，磁矩矢量 $\boldsymbol{M}$ 总是向磁场方向进动。

例 1.3.7 电动机和发电机。

一个简单的直流电机包含一个称为转子的面积为 A 的 N 匝线圈，它被置于一个由永久磁铁或电磁铁产生的恒定磁场中（见图 1.3-7 和图 1.3-8）。转子与一个由中间断开的滑环形成的整流器连接。直流电流 I 通过两个靠在整流器上的电刷流到转子线圈上，使转子上产生的扭矩 $T=NBIA\sin\alpha$ 总是朝着一个方向。

交流发电机的组成可以将直流电机中的直流电源换为一个负载电阻 R，然后在转子上加一个旋转外力。外加的扭矩使得线圈按图 1.3-9 所示方向旋转，并产生电动力。

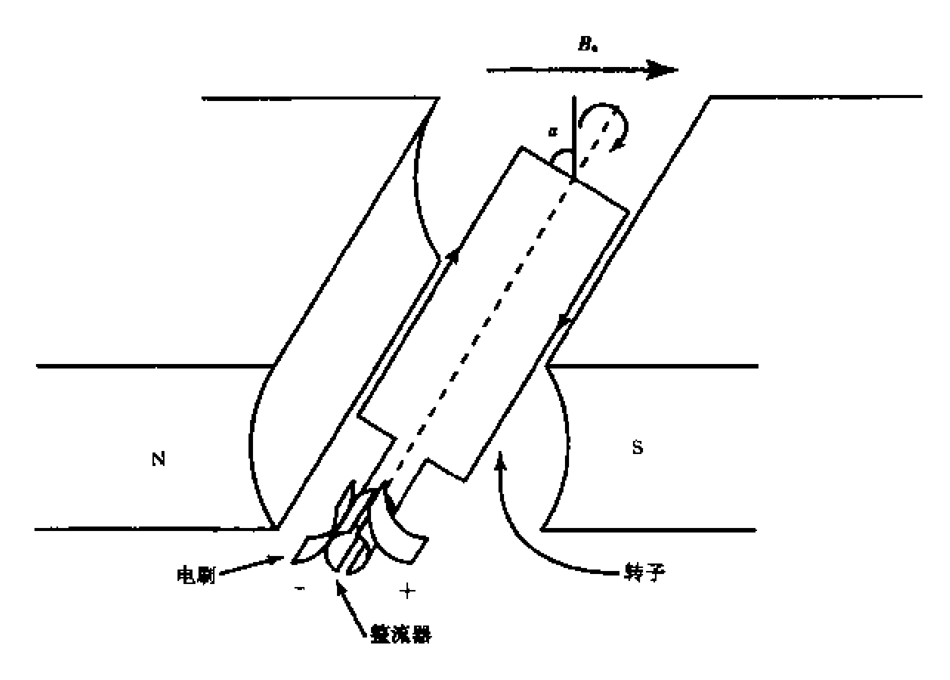


图 1.3-7 直流电动机

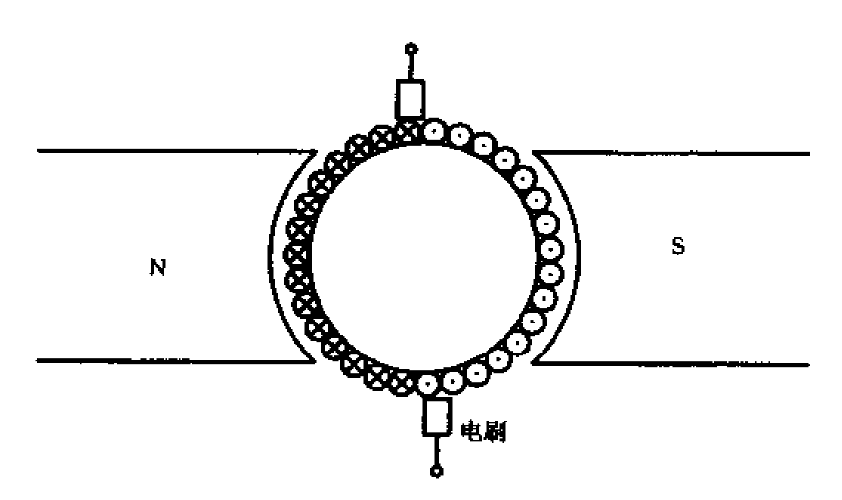


图 1.3-8 直流电机侧视

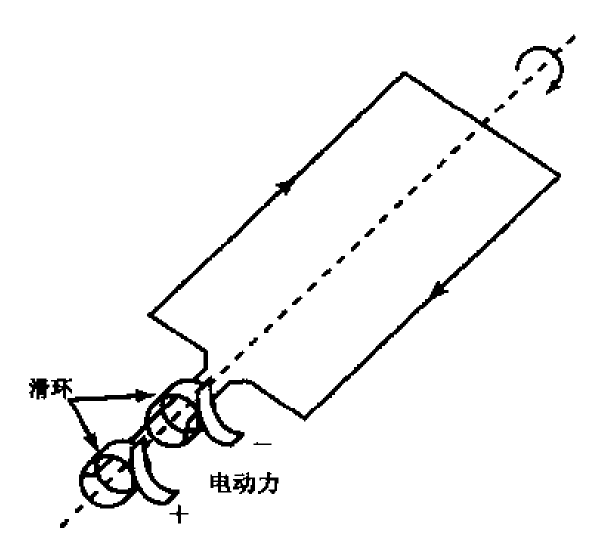


图 1.3-9 交流发电机

$$V = \int \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{E} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{F}/q = \int \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = vBl$$

对用角频率 ω 旋转的转子，有 $\alpha = \omega t$，交流电压输出为 $V = \omega BA\sin\omega t$。用楞次定律同样可以得到 $f_{em} = -\mathrm{d}(BA\cos\omega t)/\mathrm{d}t$。

1.3.1 坡印廷(Pognting)定理和坡印廷矢量

麦克斯韦方程严格遵守能量守恒定律。用 $\boldsymbol{H}$ 点乘法拉第定律(1.1.2)，用 $\boldsymbol{E}$ 点乘安培定律(1.1.1)然后相减，再利用矢量恒等式$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}$，可以得到坡印廷定理

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) + \boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = -\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J} \tag{1.3.2}$$

坡印廷矢量

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \tag{1.3.3}$$

其可以解释为是具有 $\mathrm{W/m^2}$ 量纲的功率流密度和 $\boldsymbol{H}\cdot(\partial\boldsymbol{B}/\partial t) + \boldsymbol{E}\cdot(\partial\boldsymbol{D}/\partial t)$电与磁的储能时间变化率。在式(1.3.2)等号右边，$-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}$ 是由电流 $\boldsymbol{J}$ 提供的功率。

例 1.3.8 考虑波动方程的简单解

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{x}}E_0\cos(kz - \omega t) \tag{1.3.4a}$$

$$\boldsymbol{H} = \hat{\boldsymbol{y}}H_0\cos(kz - \omega t) \tag{1.3.4b}$$

其中，$H_0 = E_0/\eta_o$，$\eta_o = \sqrt{\mu_o/\varepsilon_o}$称为自由空间的特征阻抗。将式(1.3.4)代入(1.3.2)，可以使坡印廷定理得到满足。

通过计算，坡印廷矢量得到

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} = \hat{\boldsymbol{z}}\sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}E_0^2\cos^2(kz - \omega t) \tag{1.3.5}$$

在自由空间中，可以发现

$$\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\mu_o\boldsymbol{H}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu_o\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}\right) = \frac{\partial}{\partial t}W_m$$

以及

$$\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_o\boldsymbol{E}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_o\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}\right) = \frac{\partial}{\partial t}W_e$$

在无源区域中还有 $\boldsymbol{J} = 0$。坡印廷定理变为

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) + \frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) = 0 \tag{1.3.6}$$

其中，

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_o|\boldsymbol{E}|^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_o E_0^2\cos^2(kz - \omega t) \tag{1.3.7}$$

为存储的电能密度，而

$$W_m = \frac{1}{2}\mu_o|\boldsymbol{H}|^2 = \frac{1}{2}\mu_o H_0^2\cos^2(kz - \omega t) \tag{1.3.8}$$

为存储的磁能密度。可见存储的电能密度与磁能密度相等，即 $W_e = W_m$。

例 1.3.9 功率、能量、力和辐射压强。

坡印廷矢量的时间平均功率密度由下式给出

$$\langle S\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}tS = \hat{z}\frac{E_0^2}{2\eta_o} = \hat{z}\frac{1}{2}\eta_o H_0^2 = \hat{z}P \tag{1.3.9}$$

其中,

$$P = \frac{E_0^2}{2\eta_o} = \frac{1}{2}\eta_o H_0^2(\mathrm{W/m^2})$$

是波的功率密度。总的电磁能量时间平均值等于电能量密度和磁能量密度的和,

$$W = \langle W_e\rangle + \langle W_m\rangle = \frac{1}{2}\epsilon_o E_0^2 = \frac{1}{2}\eta_o H_0^2(\mathrm{J/m^3}) \tag{1.3.10}$$

可以将能量速度 v_e 定义为功率密度与能量密度的比值,会发现 $P/W = v_e = 1/\sqrt{\mu_o\epsilon_o}$实际上等于光速。

辐射压强是单位面积上的力 F。单位面积上的力 $F = P/v_e$。因此,波 p 的辐射压强为

$$p = F = P/v_e = W = \frac{1}{2}\epsilon_o E_0^2 = \frac{1}{2}\eta_o H_0^2(\mathrm{N/m^2}) \tag{1.3.11}$$

其等于波的能量密度时间平均值并作用于波传播的方向。虽然波的辐射压强通常很小,但它往往可以起到很大作用。例如,彗尾总是朝向背对太阳的一面就是因为太阳辐射压强的作用。

例 1.3.10 考虑一个具有如下形式的电磁波

$$E_i = \hat{x}E_0\cos(kz - \omega t) \tag{1.3.12a}$$

$$H_i = \hat{y}H_0\cos(kz - \omega t) \tag{1.3.12b}$$

直接撞击到一个理想导电表面,如图 1.3-10 所示。由该表面的边界条件要求,有

$$\hat{n}\times(E_1 - E_2) = 0 \tag{1.3.13a}$$

$$\hat{n}\times(H_1 - H_2) = J_s \tag{1.3.13b}$$

其中,$\hat{n} = -\hat{z}$ 表示表面的法向方向。理想导体的定义表明其中的电场应该为零,因此 $E_1 = H_1 = 0$。

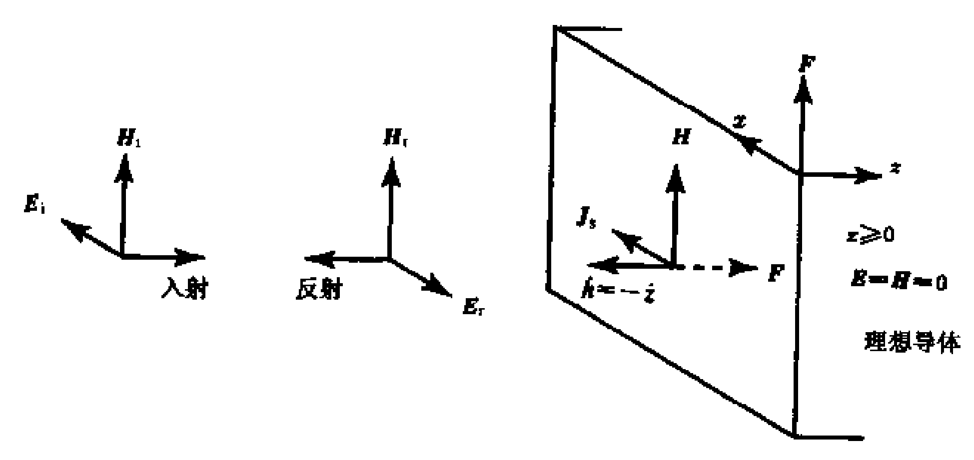


图 1.3-10 理想导体的反射

满足边界条件式(1.3.13)的反射波为

$$E_r = -\hat{x}E_0\cos(kz + \omega t) \tag{1.3.14a}$$

$$\boldsymbol{H}_{\rm r} = -\hat{y}H_0\cos(kz+\omega t) \tag{1.3.14b}$$

其沿 $-\hat{z}$ 方向传播。可以求得位于 $z=0$ 处的表面电流 J_s 为

$$\boldsymbol{J}_s = \hat{\boldsymbol{n}} \times [(\boldsymbol{H}_{\rm i}+\boldsymbol{H}_{\rm r}) - 0]_{z=0} = \hat{x}2H_0\cos\omega t$$

由洛伦兹力定律可知作用于 $\boldsymbol{J}_s$ 上的力为

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{2}\boldsymbol{J}_s \times \boldsymbol{B} = 2\hat{z}\mu_0 H_0^2\cos^2\omega t$$

系数 1/2 是由于只有电流片的一侧存在磁场,因此,其时间平均值为

$$F = \mu_0 H_0^2$$

它的值比上一个例子中的值大一倍,这是因为当反射波由这个导电表面发出时在其上施加了一个反作用力的缘故。

例 1.3.11 求一个电场强度为 $E_0 = 3\times10^6$V/m 的电磁波(此电场为空气中的击穿电场强度),其功率密度和辐射压强为多少?求一个用电功率为 2.4×10^{11}W 的地区,传输这一功率需要多大面积?

答:功率密度为 $P = 1.2\times10^{10}\text{W/m}^2$。

辐射压强为 $P = 40\ \text{N/m}^2$。

所需面积为 $20\ \text{m}^2$。

将散度定理应用于坡印廷定理(1.3.2),有

$$\oiint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \mathrm{d}V\left(\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2\right) - \iiint_V \mathrm{d}V\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J} \tag{1.3.15}$$

公式左边表示由包含体积 V 的表面向外流出的功率。公式右边的第一项表示体积 V 内流出功率所耗散的电磁能量,后一项表示体积 V 内由于源 J 的存在产生的功率。

1.3.2 动量守恒定理

将麦克斯韦方程组中的 ρ 和 $\boldsymbol{J}$ 代入洛伦兹力定律

$$\boldsymbol{f} = \rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} \tag{1.3.16}$$

得到

$$\boldsymbol{f} = -\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}) - \nabla\cdot\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})\boldsymbol{I} - \boldsymbol{DE} - \boldsymbol{BH}\right] \tag{1.3.17}$$

其中,一个单位张量 $\boldsymbol{I}$,其对角线上单元的值等于 1,其他所有单元上的值等于零。

上式中各项的解释如下。

$$\text{动量密度矢量}\quad \boldsymbol{G} = \boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B} \tag{1.3.18}$$

$$\text{麦克斯韦强度张量}\quad \boldsymbol{T} = 1/2(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})\boldsymbol{I} - \boldsymbol{DE} - \boldsymbol{BH} \tag{1.3.19}$$

因此定理

$$\nabla\cdot\boldsymbol{T} + \frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial t} = -\boldsymbol{f} \tag{1.3.20}$$

表示了动量守恒关系。这一形式与坡印廷定理(1.3.2)的形式相似,不同之处仅为这是一个矢量公式。实际上公式(1.3.2)和(1.3.20)的结合组成一个四维的相对论守恒定理。

习题

1.3.1 由原子的波尔(Bohr)模型得知,电子围绕原子核的运动是在分层轨道面上进行的,其轨道半径为

$R=nh/mv$。其中，n 为整数，m 为电子质量，v 为电子速度。设原子核带有正电荷 Ze，通过平衡离心力和洛伦兹力来计算 R 和估算氢原子 $Z=1$ 的电子运动半径。

1.3.2 地球收到来自太阳的全谱段电磁波能量大约为 1.5kW/m^2，求

(1) 日地之间的距离为 $150\times10^9\text{m}$，阳光由太阳传到地球需要多少时间？

(2) 地球的半径为 6400km，地球得到的总功率是多少？

(3) 太阳在 3GHz 频率辐射 $10^{-20}\text{W}\cdot\text{m}^2\cdot\text{Hz}$，假设太阳在 1GHz 频段内的辐射是均匀的，坡印廷功率密度是多少，与其相应的电场幅度是多少？

1.3.3 将 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 的含义解释为在空间中一点单位面积上的功率流是非常有用的，并且是经过实验验证的电磁波理论。然而，如果严格坚持这一解释而不考虑坡印廷定理(1.3.2)将会导致错误的结果。

(1) 考虑一个位于一恒定磁场旁的带电粒子是否存在由这一电荷的电场以及恒定磁场产生的功率流。证明没有电流存在的静电场与静磁场其静功率流为零。

(2) 考虑一个流经导电率为 σ，长度为 1，截面积半径为 a 的电阻的电流密度 J。其电场强度为 $E=J/\sigma$，磁场强度为 $H=aJ/2$。证明流入电阻的总坡印廷功率为 $\pi a^2 lJ^2/\sigma$。

1.3.4 用麦克斯韦方程证明

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B})+\nabla\cdot(W\boldsymbol{I}-\boldsymbol{DE}-\boldsymbol{BH})=0$$

其中，存储的总能量密度为 $W=(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})/2$。考虑 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$ 并应用角标法。

1.3.5 太阳风是由太阳表面沿径向方向喷发出的高导电率的等离子体。请计算在地球轨道位置上太阳风的电磁能量通量。

在地球的轨道面上，太阳的磁场基本上是呈放射状的，在一些区域指向外，在另一些区域指向内。这个磁场在高导电率的等离子体中被冻结。由于太阳有自转(27 天的周期)，并且等离子体有初速度，B 的磁力线实际上是阿基米德螺旋线(极坐标中的 $r=a\theta$)。在地球附近，磁力线与日地连线形成 45°夹角。这就是所谓的浇水管效应。

在地球轨道上，太阳风的质子密度大约是 $10^7/\text{m}^3$，并以 $4\times10^5\text{m/s}$ 的速度运动，而太阳磁场的强度大约为 $5\times10^{-9}\text{Wb/m}^2$。

(1) 证明在电中性($\rho=0$)和电导率为 σ 以及速度为 $\boldsymbol{v}$ 的非磁流环境中，麦克斯韦方程组变为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\left[\sigma(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right]$$

其中，由于极化电流与导电电流相比很小，因此可以被忽略。注意，对于无限大的电导率有

$$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

这是一个比较理想的太阳风的近似模型。

(2) 证明与 $\boldsymbol{B}$ 正交的速度分量为

$$\boldsymbol{v}_n=\frac{1}{B^2}\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$$

(3) 证明太阳风的坡印廷矢量为

$$\boldsymbol{S}=\frac{B^2}{\mu_0}\boldsymbol{v}_n$$

它的数字值近似等于 4×10^{-9}乘以太阳辐射的坡印廷矢量的平均值，即大约 1.4kW/m^2。太阳风的坡印廷矢量的方向与本地磁场 $\boldsymbol{B}$ 的方向正交，且指向与日地连线呈 45°角的方向。

(4) 比较电场、磁场能量密度以及动力学的幅度哪一个最大？

1.3.6 如果将力学角动量 $\boldsymbol{L}$ 表达式中的质量分布速度换为电荷分布速度，磁力矩 $\boldsymbol{M}$ 与其在形式上是相似的。如果设 $\boldsymbol{M}=\gamma\boldsymbol{L}$，其中 γ 为旋磁率，在力学中，经典的运动方程为 $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t=\boldsymbol{T}$，其中 $\boldsymbol{T}$ 系统的扭矩将其应

用于磁力矩，我们有 $dM/dt = \gamma dL/dt = \gamma T = \gamma M \times B$。

(1) 位于 r，速度为 v 的带电粒子 q 的磁力矩定义为

$$M = \frac{1}{2} q r \times v$$

如果带电粒子的质量为 m，其力学角动量为

$$L = m r \times v$$

确定带电粒子的旋磁率 γ，对一个结构复杂的电荷分布系统，旋磁率可写为 $\gamma = gq/2m$，其中因子 g 描述这一磁结构。证明一个面积为 A，电流为 I 的平面回路的磁矩为 $M = \hat{n} IA$。其中，$\hat{n}$ 为平面回路的法向单位矢量，并遵守右手法则，即四指指向回路中的电流方向，右手拇指的方向即为 $\hat{n}$ 的方向。

(2) 考虑将一个具有磁矩 M 的原子放入一个 $\hat{z}$ 方向的恒定磁场中，$B = \hat{z} B_0$。这个原子将向 $\hat{z}$ 轴进动，求进动的频率。

1.3.7 焦耳定律 $P_d = J \cdot E$ 决定了单位体积中由于欧姆损耗消耗的能量。假设由于传导电子的碰撞使其速度 v 的减少为一个平均常数，用洛伦兹力定律 $f = \rho E$ 推导焦耳定律。

1.4 赫兹波

赫兹(Hertzian)振子由一对极性相反的电荷 $\pm q$ 组成，其相隔的空间距离 l 为无限小。其偶极矩为 $p = ql$ 且角频率为 ω，即其每一个电荷的极性都以 $2\pi/\omega$ 为周期发生极性交变。从动力学的角度讲，p 的定义为一个常数，它是当 $l \to 0$，$q \to \infty$ 时，l 与 q 的乘积。假设两个电荷在 z 轴位于 $z = \pm l/2$ 的位置上(见图 1.4-1)。赫兹用一个电位函数得到了对所有电磁波的解，这个电位函数后来被称为赫兹位函数 Π，它是下面波动方程的解。

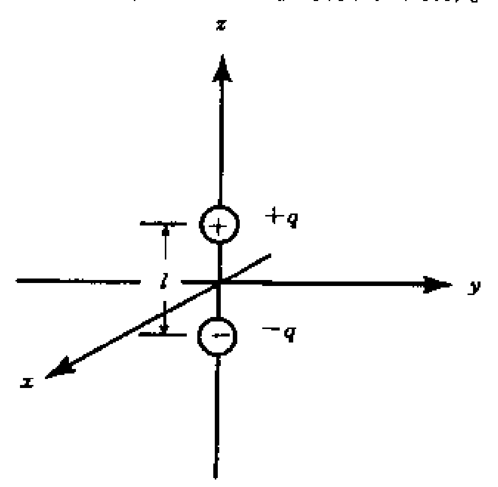


图 1.4-1 赫兹偶极子

$$\left(\nabla^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \Pi = 0 \tag{1.4.1}$$

为了推导电磁场中的 E 和 H，可将 Π 写为 $\boldsymbol{\Pi} = \hat{z}\Pi$，并定义一个标量位函数 Φ，

$$\Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \cdot \boldsymbol{\Pi} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \Pi}{\partial z} \tag{1.4.2}$$

以及矢量位函数 A

$$A = \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{\Pi}}{\partial t} = \hat{z} \mu_0 \frac{\partial \Pi}{\partial t} \tag{1.4.3}$$

已知

$$\nabla\cdot A+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0 \tag{1.4.4}$$

这是熟知的洛伦兹条件,它将标量位与矢量位联系了起来。由于 Π 满足波动方程,因此 Φ 与 A 也满足波动方程。

用 Φ 与 A 来表示,磁场与电场可写成

$$H=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times A=\hat{x}\frac{\partial^2\Pi}{\partial y\partial t}-\hat{y}\frac{\partial^2\Pi}{\partial x\partial t} \tag{1.4.5}$$

$$E=-\nabla\Phi-\frac{\partial A}{\partial t}=\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\nabla\frac{\partial\Pi}{\partial z}-\hat{z}\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2}\right) \tag{1.4.6}$$

由于 Π 满足波动方程,H 和 E 也满足波动方程。已知 $\nabla\cdot H=0$ 和 $\nabla\cdot E=0$,因此可以直接证明安培定律和法拉第定律也同时可以得到满足。

由磁场的高斯定律,$\nabla\cdot H=0$,利用矢量恒等式 $\nabla\cdot\nabla\times A=0$ 的结果得到矢量位 A 的定义

$$\nabla\times E=-\mu_0\frac{\partial H}{\partial t}=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times A$$

由于有

$$\nabla\times\left(E+\frac{\partial}{\partial t}A\right)=\nabla\times(-\nabla\Phi)=0$$

因此从 $\left(E+\frac{\partial}{\partial t}A\right)=-\nabla\Phi$ 得到标量位 Φ 的定义。

在赫兹研究偶极子时所用的关于 Π 的波动方程的解中,假设问题是球对称的,则有,

$$\Pi=\frac{ql}{4\pi r}\cos(kr-\omega t) \tag{1.4.7}$$

其中,$r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$。代入波动方程,得到色散关系式

$$k^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_0 \tag{1.4.8}$$

如例 1.4.1 和例 1.4.2 所述,它将角频率 ω 和空间频率 k 联系了起来。

例 1.4.1 推导色散关系。

$$\frac{\partial\Pi}{\partial x}=-\frac{ql}{4\pi}\left[\frac{k}{r}\left(\frac{x}{r}\right)\sin(kr-\omega t)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{x}{r}\right)\cos(kr-\omega t)\right]$$

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2}=-\frac{ql}{4\pi}\left[\frac{k^2}{r}\left(\frac{x}{r}\right)^2\cos(kr-\omega t)-2\frac{k}{r}\left(\frac{x}{r^2}\right)^2\sin(kr-\omega t)+\frac{k}{r^2}\sin(kr-\omega t)\right.$$
$$\left.-\frac{3}{r^3}\left(\frac{x}{r}\right)^2\cos(kr-\omega t)-\frac{k}{r^2}\left(\frac{x}{r}\right)^2\sin(kr-\omega t)+\frac{1}{r^3}\cos(kr-\omega t)\right]$$

$$\nabla^2\Pi=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Pi=-\frac{k^2ql}{4\pi r}\cos(kr-\omega t)$$

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2}=-\frac{\omega^2ql}{4\pi r}\cos(kr-\omega t)$$

将 $\nabla^2\Pi$ 和 $\partial^2\Pi/\partial t^2$ 代入式(1.4.1),可得到色散关系式(1.4.8)。

例 1.4.2 在球坐标系中推导赫兹电位的波动方程和色散关系。

在球坐标系中,Π 是独立于 ϕ 和 θ 的关于 r 的方程,得到

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial\Pi}{\partial r}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{y}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}(r\Pi)\right]\right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{r}\left[-\frac{1}{r^2}(r\Pi) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\Pi)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{r}\left[-\frac{1}{r^2}(r\Pi) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\Pi)\right] + \frac{x^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[-\frac{1}{r^3}(r\Pi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r\Pi)\right] -$$

$$\frac{1}{r^3}(r\Pi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r\Pi) + \frac{3x^2}{r^5}(r\Pi) - \frac{3x^2}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}(r\Pi) + \frac{x^2}{r^3}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Pi)$$

对$\partial^2\Pi/\partial y^2$和$\partial^2\Pi/\partial z^2$也同样可以得到相似的结果。代入拉普拉斯算符$\nabla^2$并注意到$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$,得到

$$\nabla^2\Pi = \frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Pi) \tag{1.4.9}$$

将赫兹偶极子的解代人

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Pi) - \omega^2\mu_o\varepsilon_o\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2} = 0 \tag{1.4.10}$$

即可得到式(1.4.8)所示的色散关系。

例 1.4.3 推导球坐标系中的电场矢量与磁场矢量。

球坐标系中的单位矢量(见图 1.4-2)如下。

$$\hat{r} = \hat{x}\sin\theta\cos\phi + \hat{y}\sin\theta\sin\phi + \hat{z}\cos\theta$$
$$\hat{\theta} = \hat{x}\cos\theta\cos\phi + \hat{y}\cos\theta\sin\phi - \hat{z}\sin\theta$$
$$\hat{\phi} = -\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi$$

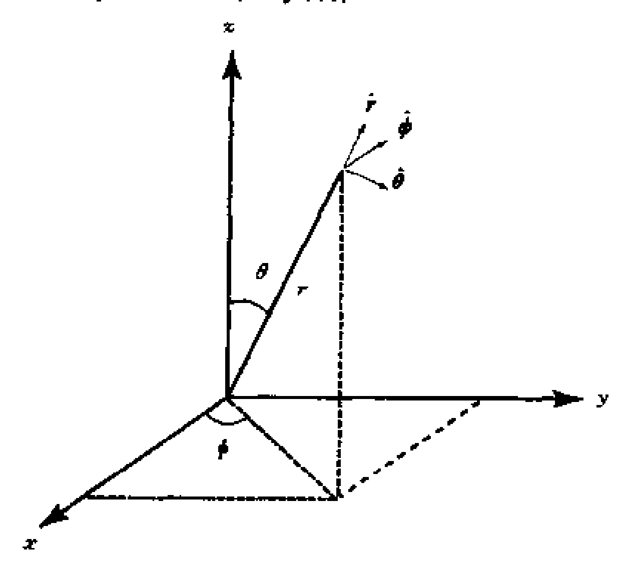


图 1.4-2 球坐标系中的单位矢量

由于位置矢量可写为 $\boldsymbol{r} = \hat{r}r = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z$,发现 $x = \hat{x}\cdot\boldsymbol{r} = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\cos\phi$, $z = r\cos\theta$。磁场 $\boldsymbol{H}$ 即得

$$\boldsymbol{H} = \hat{x}\frac{\partial^2\Pi}{\partial y\partial t} - \hat{y}\frac{\partial^2\Pi}{\partial x\partial t}$$
$$= \left(\hat{x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} - \hat{y}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\omega ql}{4\pi}\sin(kr - \omega t)$$
$$= \left(\hat{x}\frac{y}{r} - \hat{y}\frac{x}{r}\right)\frac{\omega ql}{4\pi}\left[\frac{k}{r}\cos(kr - \omega t) - \frac{1}{r^2}\sin(kr - \omega t)\right] \tag{1.4.11}$$

$$= \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\omega kql}{4\pi r}\sin\theta\left[-\cos(kr-\omega t)+\frac{1}{kr}\sin(kr-\omega t)\right] \tag{1.4.12}$$

其中,使用了关系$\left(\hat{\boldsymbol{x}}\frac{y}{r}-\hat{\boldsymbol{y}}\frac{x}{r}\right)=-\sin\theta(-\hat{\boldsymbol{x}}\sin\phi+\hat{\boldsymbol{y}}\cos\phi)=-\hat{\boldsymbol{\phi}}\sin\theta$。电场矢量也可以如下表示,其中应用了$\hat{\boldsymbol{r}}=(\hat{\boldsymbol{x}}x+\hat{\boldsymbol{y}}y+\hat{\boldsymbol{z}}z)/r$以及$\hat{\boldsymbol{z}}=\hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta-\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta$,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \frac{1}{\varepsilon_o}\left[\nabla\frac{\partial \Pi}{\partial z}-\hat{z}\mu_o\varepsilon_o\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2}\right]+\\
&= \frac{ql}{4\pi\varepsilon_o}\left\{\nabla\left[-\frac{k}{r}\left(\frac{z}{r}\right)\sin(kr-\omega t)-\frac{1}{r^2}\left(\frac{z}{r}\right)\cos(kr-\omega t)\right]+\right.\\
&\quad \left.\hat{z}\omega^2\mu_o\varepsilon_o\frac{1}{r}\cos(kr-\omega t)\right\}\\
&= \frac{ql}{4\pi\varepsilon_o}\left\{\hat{\boldsymbol{x}}\left[-\frac{k^2}{r}\left(\frac{xz}{r^2}\right)\cos(kr-\omega t)+3\frac{k}{r^2}\left(\frac{xz}{r^2}\right)\sin(kr-\omega t)+\right.\right.\\
&\quad \left.3\frac{1}{r^3}\left(\frac{xz}{r^2}\right)\cos(kr-\omega t)\right]+\\
&\quad \hat{\boldsymbol{y}}\left[-\frac{k^2}{r}\left(\frac{yz}{r^2}\right)\cos(kr-\omega t)+3\frac{1}{r^2}\left(\frac{yz}{r^2}\right)\sin(kr-\omega t)+\right.\\
&\quad \left.3\frac{1}{r^3}\left(\frac{yz}{r^2}\right)\cos(kr-\omega t)\right]+\\
&\quad \hat{\boldsymbol{z}}\left[-\frac{k^2}{r}\left(\frac{z}{r}\right)^2\cos(kr-\omega t)+3\frac{k}{r^2}\left(\frac{z}{r}\right)^2\sin(kr-\omega t)+\right.\\
&\quad 3\frac{1}{r^3}\left(\frac{z}{r}\right)^2\cos(kr-\omega t)-\frac{k}{r^2}\sin(kr-\omega t)-\\
&\quad \left.\left.\frac{1}{r^3}\cos(kr-\omega t)\right]+\hat{z}\frac{k^2}{r}\cos(kr-\omega t)\right\}
\end{aligned} \tag{1.4.13a}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{ql}{4\pi\varepsilon_o}\left\{\hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta\left[-\frac{k^2}{r}\cos(kr-\omega t)+3\frac{k}{r^2}\sin(kr-\omega t)+3\frac{1}{r^3}\cos(kr-\omega t)\right]+\right.\\
&\quad \left.\hat{\boldsymbol{z}}\left[-\frac{k}{r^2}\sin(kr-\omega t)-\frac{1}{r^3}\cos(kr-\omega t)+\frac{k^2}{r}\cos(kr-\omega t)\right]\right\}\\
&= \frac{ql}{4\pi\varepsilon_o}\left\{\hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta\left[2\frac{k}{r^2}\sin(kr-\omega t)+2\frac{1}{r^3}\cos(kr-\omega t)\right]+\right.\\
&\quad \left.\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta\left[\frac{k}{r^2}\sin(kr-\omega t)+\frac{1}{r^3}\cos(kr-\omega t)-\frac{k^2}{r}\cos(kr-\omega t)\right]\right\}\\
&= \frac{k^2ql}{4\pi\varepsilon_o r}\left\{\hat{\boldsymbol{r}}2\cos\theta\left[\frac{1}{kr}\sin(kr-\omega t)+\frac{1}{k^2r^2}\cos(kr-\omega t)\right]+\right.\\
&\quad \left.\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta\left[\frac{1}{kr}\sin(kr-\omega t)+\frac{1}{k^2r^2}\cos(kr-\omega t)-\cos(kr-\omega t)\right]\right\}
\end{aligned} \tag{1.4.13b}$$

在球坐标系中,电场和磁场的矢量为

$$\boldsymbol{H} = \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{\omega kql}{4\pi r}\sin\theta\left[\frac{1}{kr}\sin(kr-\omega t)-\cos(kr-\omega t)\right] \tag{1.4.14}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \frac{k^2ql}{4\pi\varepsilon_o r}\left\{(\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta+\hat{\boldsymbol{r}}2\cos\theta)\left[\frac{1}{k^2r^2}\cos(kr-\omega t)+\frac{1}{kr}\sin(kr-\omega t)\right]-\right.\\
&\qquad \left.\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta\cos(kr-\omega t)\right\}
\end{aligned} \tag{1.4.15}$$

由于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的解是解析的，并对离开振子的任何距离 r 都成立，因此其是非常基本和重要的。

考虑下面几种特殊情况。

情况 1 在 z 轴的两极方向上 $\theta=0$，可见这里没有磁场且电场矢量取如下形式，

$$\boldsymbol{E}=\hat{z}\,\frac{kql}{2\pi\epsilon_o r^2}\left[\frac{1}{kr}\cos(kr-\omega t)+\sin(kr-\omega t)\right]$$

其永远指向 $\hat{z}$ 方向。

情况 2 在 x-y 平面内，$\theta=\pi/2$，有

$$\boldsymbol{H}=\hat{\boldsymbol{\phi}}\,\frac{\omega kql}{4\pi r}\left[-\cos(kr-\omega t)+\frac{1}{kr}\sin(kr-\omega t)\right]$$

$$\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{\theta}}\,\frac{k^2 ql}{4\pi\epsilon_o r}\left[\left(-1+\frac{1}{k^2r^2}\right)\cos(kr-\omega t)+\frac{1}{kr}\sin(kr-\omega t)\right]$$

其中 $\hat{\boldsymbol{\theta}}=-\hat{z}$ 且电场矢量总是垂直于 x-y 平面。

情况 3 在紧靠偶极子的地方，当 $kr\to0$，我们只保留包含 $1/r^2$ 的项，则磁场矢量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}&=-\hat{\boldsymbol{\phi}}\,\frac{\omega ql}{4\pi r^2}\sin\theta\sin\omega t=\hat{\boldsymbol{\phi}}\,\frac{\mathrm{d}(q\cos\omega t)}{\mathrm{d}t}\frac{l}{4\pi r^2}\sin\theta\\&=\hat{\boldsymbol{\phi}}\,\frac{Il}{4\pi r^2}\sin\theta\end{aligned}\tag{1.4.16}$$

这与一个沿 z 方向长度为 l 的单元电流 I 产生的场一致，并称为毕奥－萨伐尔(Biot-Savart)定律。

电场矢量

$$\boldsymbol{E}=\frac{ql}{4\pi\epsilon_o r^3}(\hat{\boldsymbol{r}}2\cos\theta+\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta)\cos\omega t\tag{1.4.17}$$

设 $\omega=0$，可发现 $\boldsymbol{H}=0$，且

$$\boldsymbol{E}=\frac{ql}{4\pi\epsilon_o r^3}(\hat{\boldsymbol{r}}2\cos\theta+\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta)$$

这是一个静电偶极子的电场。

情况 4 在离偶极子很远的区域里，$kr\gg1$，我们只保留包含 $1/r$ 的项，则场矢量为

$$\boldsymbol{H}=-\hat{\boldsymbol{\phi}}\,\frac{\omega kql}{4\pi r}\sin\theta\cos(kr-\omega t)\tag{1.4.18}$$

$$\boldsymbol{E}=-\hat{\boldsymbol{\theta}}\,\frac{k^2ql}{4\pi\epsilon_o r}\sin\theta\cos(kr-\omega t)\tag{1.4.19}$$

可以看到 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 都与以 r 为半径的一个大球的球面相切。$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 相互正交，且其幅度关系差一个倍数 $(\mu_o/\epsilon_o)^{1/2}$。

情况 5 为了研究功率和能量的问题，赫兹引用了坡印廷定理。在远场区域中 $kr\gg1$，坡印廷功率密度矢量 $\boldsymbol{S}$ 为

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\hat{\boldsymbol{r}}\,\frac{\omega k^3}{\epsilon_o}\left(\frac{ql}{4\pi r}\right)^2\sin^2\theta\cos^2(kr-\omega t)$$

其方向是 $\hat{\boldsymbol{r}}$，指向远离偶极子的方向。

辐射功率密度的时间平均值可由下式得到，

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}(\omega t)\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \hat{\boldsymbol{r}}\, \frac{1}{2}\, \frac{\omega k^3}{\varepsilon_0}\left(\frac{ql}{4\pi r}\right)^2 \sin^2\theta$$

其辐射方向如图 1.4-3 所示。

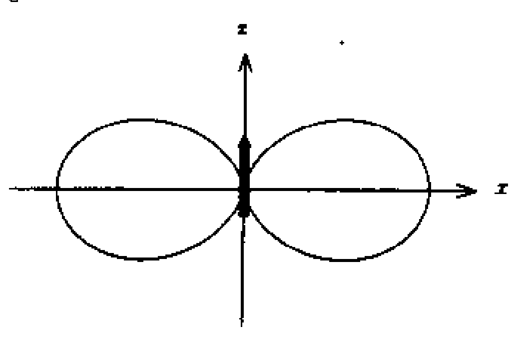


图 1.4-3 辐射功率方向图

例 1.4.4 我们由式(1.4.14)中 $\boldsymbol{H}$ 和式(1.4.15)中 $\boldsymbol{E}$ 的精确解计算功率密度的时间平均值。

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{S} \rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}(\omega t)\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}(\omega t)\, \frac{\omega k^3}{\varepsilon_0}\left(\frac{ql}{4\pi r}\right)^2 \left[-\cos(kr - \omega t) + \frac{1}{kr}\sin(kr - \omega t)\right] \times \\ &\quad \left\{ \hat{\boldsymbol{r}}\sin^2\theta\left[\left(-1 + \frac{1}{k^2 r^2}\right)\cos(kr - \omega t) + \frac{1}{kr}\sin(kr - \omega t)\right] - \right. \\ &\quad \left. \hat{\boldsymbol{\theta}}\, 2\sin\theta\cos\theta\left[\frac{1}{kr}\sin(kr - \omega t) + \frac{1}{k^2 r^2}\cos(kr - wt)\right]\right\}\end{aligned}$$

这里 $\sin(kr - \omega t)\cos(kr - \omega t)$ 对时间的平均值为零，且 $\sin^2(kr - \omega t)$ 与 $\cos^2(kr - \omega t)$ 其中之一总有一个的时间平均值为 1/2。因此，上面的表达式在积分之后等于空间中任何一点 $\boldsymbol{r}$ 取 $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ 的功率密度的时间平均值，其中 $\boldsymbol{H}$ 来自式(1.4.14)，$\boldsymbol{E}$ 来自式(1.4.15)。

将指向 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 方向的功率在半径为 r 的球面上积分，如图 1.4-4 所示有

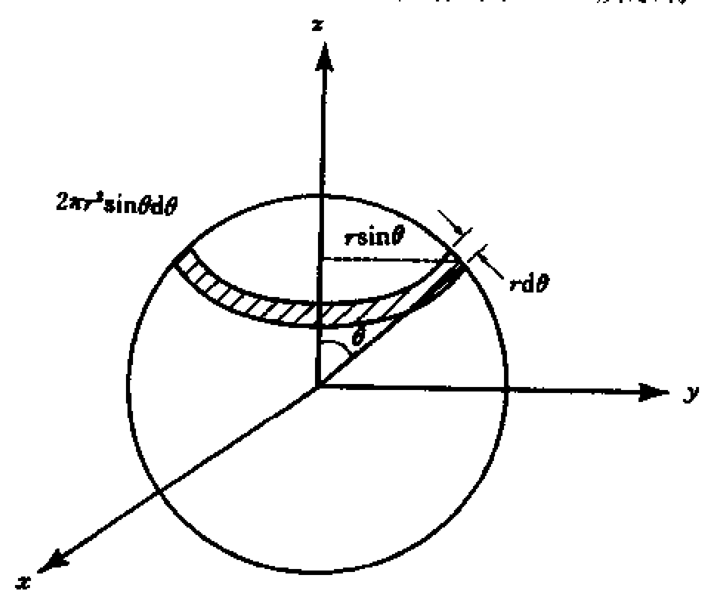


图 1.4-4 功率密度时间平均值积分的几何说明

$$P = \oiint \mathrm{d}S\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \langle \boldsymbol{S} \rangle$$

$$= \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta 2\pi r^2 \sin\theta \left[\frac{\omega k^3}{2\varepsilon_o} \left(\frac{ql}{4\pi r} \right)^2 \sin^2\theta \right] = \frac{4\pi\omega k^3}{3\varepsilon_o} \left(\frac{ql}{4\pi} \right)^2$$

其中,$2\pi r^2\sin\theta$ 为从 $\theta = 0$ 到 $\theta = \pi$ 之间的带状表面积分单元。这里应该提起注意的是,偶极子辐射功率的时间平均值无论在半径多大的封闭球面上计算都是一样的。

专题 1.4.A 电场力线图

为了研究和画出电场和磁场的力线,赫兹在圆柱坐标系(见图 1.4-5)下

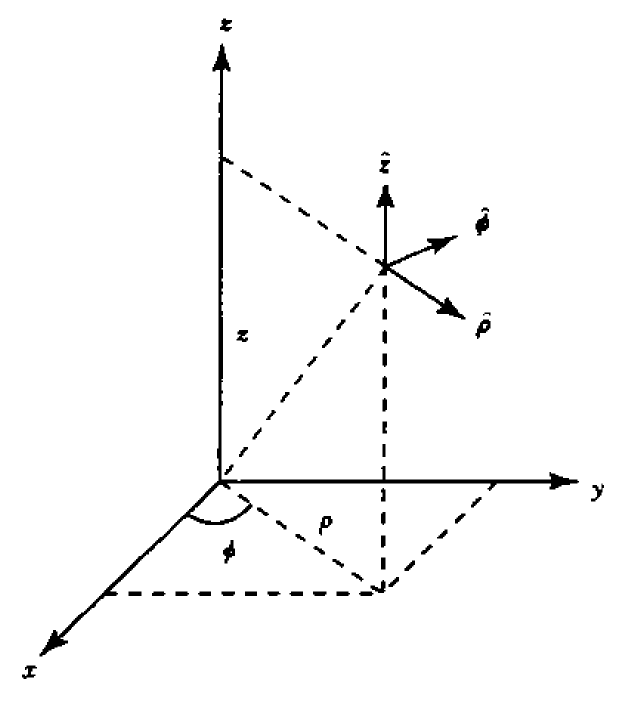


图 1.4-5 圆柱坐标系

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\boldsymbol{x}}\cos\phi + \hat{\boldsymbol{y}}\sin\phi = \hat{\boldsymbol{x}}\,\frac{x}{\rho} + \hat{\boldsymbol{y}}\,\frac{y}{\rho}$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\hat{\boldsymbol{x}}\sin\phi + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\phi = -\hat{\boldsymbol{x}}\,\frac{y}{\rho} + \hat{\boldsymbol{y}}\,\frac{x}{\rho}$$

其中,$x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$, $r^2 = \rho^2 + z^2$,且 $\rho = r\sin\theta$ 并引入了一个参数 Q。他定义

$$Q = \rho\,\frac{\partial \Pi}{\partial \rho} = \rho\,\frac{\partial r}{\partial \rho}\frac{\partial \Pi}{\partial r} = r\sin^2\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{ql}{4\pi r}\cos(kr - \omega t)\right]$$

$$= \frac{kql}{4\pi}\sin^2\theta\left[-\sin(kr - \omega t) - \frac{1}{kr}\cos(kr - \omega t)\right]$$

这是两个因子的乘积,一个因子只决定于 θ,另一个决定于 r 和 t。由式(1.4.5)有,

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\hat{\boldsymbol{x}}\rho\,\frac{\partial \Pi}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{y}}\rho\,\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\left[-\hat{\boldsymbol{x}}\rho\,\frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial \Pi}{\partial \rho} + \hat{\boldsymbol{y}}\rho\,\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial \Pi}{\partial \rho}\right]$$

$$= (-\hat{\boldsymbol{x}}\sin\phi + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\phi)\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}Q = \hat{\boldsymbol{\phi}}\,\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}Q$$

由式(1.4.6),有

$$E = -\nabla\Phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(-\varepsilon_0\nabla\Phi + \hat{z}\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\left[-\nabla\frac{\partial \Pi}{\partial z} + \hat{z}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} - \hat{z}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\left[-\hat{x}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x\partial z} - \hat{y}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y\partial z} + \hat{z}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}\right)\right] \tag{1.4.20}$$

其中,最后一项满足关于 Π 的波动方程。由于

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial \Pi}{\partial \rho} = \frac{x}{\rho}\frac{\partial \Pi}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\frac{\partial \Pi}{\partial \rho}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\rho\frac{\partial \Pi}{\partial \rho}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2+y^2}\rho\frac{\partial \Pi}{\partial \rho} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}\rho\frac{\partial \Pi}{\partial \rho} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)\rho\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial \Pi}{\partial \rho}\right)$$

得到

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(-\hat{\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}Q + \hat{z}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}Q\right)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0\rho}\left[-\hat{\rho}\frac{\partial Q}{\partial z} + \hat{z}\frac{\partial Q}{\partial \rho}\right] = -\frac{1}{\varepsilon_0\rho}\hat{\phi}\times\nabla Q$$

在 ρ-z 平面中,电场的力线与 Q 等于常数的表面和 ρ-z 平面的交线重合。图 1.4-6 给出了不同时刻的电力线图。

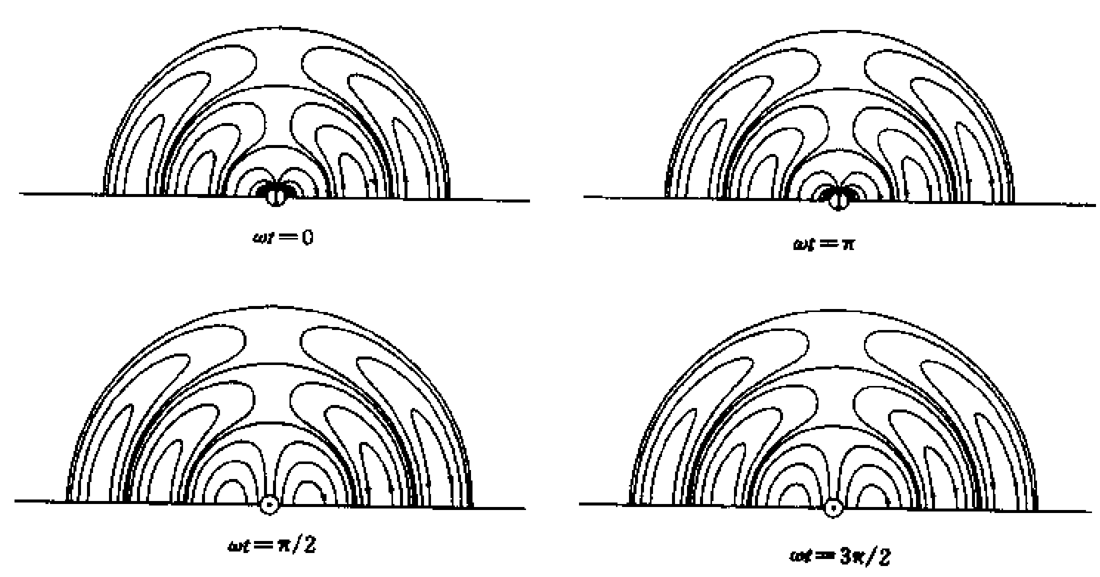


图 1.4-6 不同时刻电力线图

例 1.4.5 考虑观察点位于 $kr \gg 1$ 的辐射区且

$$Q = \frac{kql}{4\pi}\sin^2\theta\cos(kr - \omega t)$$

的情况,在 $\omega t = 0$ 时刻建立三个 Q 等于常数的表面,然后指出电力线的方向。

解 考虑

$$\sin^2\theta\cos(kr) = c$$

我们给出 $c = 0, 1/2, 1$ 三种情况,如图 1.4-7 所示。

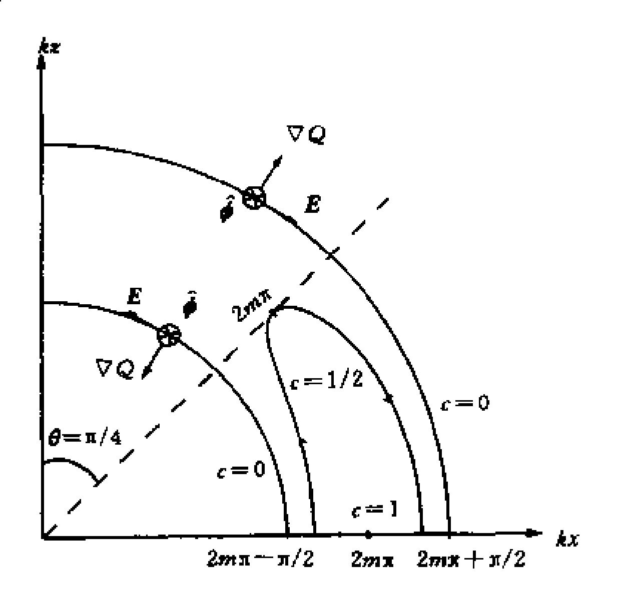


图 1.4-7 辐射场图形

对 $c=0$, $kr=2m\pi\pm\frac{\pi}{2}$。

对 $c=\frac{1}{2}$, $kr=2m\pi$, $\theta=\pm\frac{\pi}{4}$。 $kr=2m\pi\pm\frac{\pi}{4}$, $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$

对 $c=1$, $kr=2m\pi$, $\theta=\frac{\pi}{2}$。

例 1.4.6 确定指向为 $\boldsymbol{p}=\hat{x}p_x+\hat{y}p_y+\hat{z}p_z$，偶极矩 $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$ 的赫兹偶极子的静电场。

解 对 p_z 分量，直角坐标系中的电场矢量可由式(1.4.13a)得到，

$$\boldsymbol{E}_{pz}=\frac{p_z}{4\pi\varepsilon_0}\left[\hat{x}\,\frac{3}{r^3}\left(\frac{xz}{r^2}\right)+\hat{y}\,\frac{3}{r^3}\left(\frac{yz}{r^2}\right)+\hat{z}\,\frac{3}{r^3}\left(\frac{z}{r}^2\right)-\hat{z}\,\frac{1}{r^3}\right]$$

由此从所有三个分量可得总电场，

$$\boldsymbol{E}=[3\hat{\boldsymbol{r}}(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{p})-\boldsymbol{p}]\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=[(\boldsymbol{p}\times\hat{\boldsymbol{r}})\times\hat{\boldsymbol{r}}+2\hat{\boldsymbol{r}}(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{p})]\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

例 1.4.7 对一个偶极矩 $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$ 的偶极子，其磁场可由式(1.4.11)求出，电场可由式(1.4.13a)求出。

$$\boldsymbol{H}=\frac{\omega k}{4\pi r}[\boldsymbol{p}\times\hat{\boldsymbol{r}}]\left[\frac{1}{kr}\sin(kr-\omega t)-\cos(kr-\omega t)\right] \tag{1.4.21}$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{k^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\Big\{[(\boldsymbol{p}\times\hat{\boldsymbol{r}})\times\hat{\boldsymbol{r}}+2\hat{\boldsymbol{r}}(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{p})]\left[\frac{1}{k^2r^2}\cos(kr-\omega t)+\frac{1}{kr}\sin(kr-\omega t)\right]-[(\boldsymbol{p}\times\hat{\boldsymbol{r}})\times\hat{\boldsymbol{r}}]\cos(kr-\omega t)\Big\} \tag{1.4.22}$$

例 1.4.8 应用毕奥－萨伐尔定律推导无限长线的磁场，可首先利用式(1.4.21)中的第一项并取如同式(1.4.11)中的近似，得

$$\boldsymbol{H}\approx\frac{\omega k}{4\pi r}[\boldsymbol{p}\times\hat{\boldsymbol{r}}]\frac{1}{kr}\sin(-\omega t)=\frac{1}{4\pi r^2}\left[\frac{\mathrm{d}(q\cos\omega t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{l}\times\hat{\boldsymbol{r}}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2}[Il \times \hat{r}] = \frac{1}{4\pi r^3}[Il \times r]$$

其中,I 为线中电流,l 为电流单元的长度和方向。矢量 $r = \hat{\rho}\rho + \hat{z}z'$ 由电流元指向观察点。我们令观察点位于原点处,并令 $l = \hat{z}\delta z'$,然后对 z' 在 $-\infty$ 到 $+\infty$ 区间进行积分,如图 1.4-8 所示,因此得到

$$H = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{I\hat{z} \times \hat{r}}{(z'^2 + \rho^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{I\hat{\Phi}\rho}{(z'^2 + \rho^2)^{3/2}} = \hat{\Phi}\frac{I}{2\pi\rho}$$

上面积分可以通过替换 $z' = \sec\alpha$ 得到。

上述结果也可通过对安培定律$\nabla \times H = J$ 应用斯托克斯定理得到。线积分实际上可以看做一个围绕半径为 ρ 包围电流 I 的圆柱的环路积分。其结果为 $2\pi\rho H_\phi = I$。

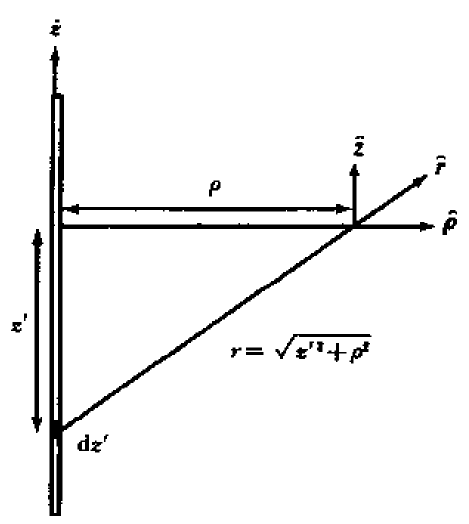


图 1.4-8 对无限长线的电流元的积分

习题

1.4.1 求用矢量赫兹位 $\Pi = \hat{z}\Pi$ 表示的 H 和 E。

1.4.2 标量位 Φ 的定义为$E = -\nabla\Phi$。由式(1.4.17)证明,

$$\Phi = -\frac{ql}{4\pi\epsilon_0}\cos\omega t \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)$$

对应于一个电偶极子,其极轴与 $\hat{z}$ 轴一致,极性交变周期为 $T = 2\pi/\omega$。

1.4.3 用时间推进的办法研究位于 $r = \lambda/2, \theta = \pi/4$ 的空间位置点处的电力线。电力线的斜率 $dr/rd\theta$ 可由下式得到

$$Q = \frac{kql}{4\pi}\sin\theta\left[-\sin^2(kr - \omega t) - \frac{1}{kr}\cos(kr - \omega t)\right]$$

证明

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{2\cos\theta}{k\sin\theta}\frac{\sin(kr - \omega t) + \frac{1}{kr}\cos(kr - \omega t)}{\left(1 - \frac{1}{k^2r^2}\right)\cos(kr - \omega t) - \frac{1}{kr}\sin(kr - \omega t)}$$

将 $kr = \pi$ 和 $\theta = \pi/4$ 代入,$dr/d\theta$ 随时间的变化即可得到。证明电力线的一个线段在 ωt 变化一个 2π 弧度的过

程中也将旋转360°。特别地，当 $\omega t=0, \mathrm{d}r/r\mathrm{d}\theta=\tan\theta_1$ 以及当 $\omega t=\pi/2, \mathrm{d}r/r\mathrm{d}\theta=\tan\theta_2$ 时，$\theta_1-\theta_2$ 等于多少。当 $\omega t=0$ 上述线段是否与 $\omega t=\pi/2$ 时正交。在 $\omega t=0$ 到 $\omega t=\pi$ 之间的几个不同的时刻，绘出该线段的图形。

1.4.4 赫兹在研究赫兹偶极子时采用的 Π 的波动方程的解如下。

$$\Pi=\frac{ql}{4\pi r}\sin(kr-\omega t)$$

推导磁场与电场矢量并证明

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}&=\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{\omega kql}{4\pi r}\sin\theta\left[\sin(kr-\omega t)+\frac{1}{kr}\cos(kr-\omega t)\right]\\&=-\frac{\omega k}{4\pi r}(\boldsymbol{p}\times\hat{\boldsymbol{r}})\left[\frac{1}{kr}\cos(kr-\omega t)+\sin(kr-\omega t)\right]\\\boldsymbol{E}&=\frac{k^2ql}{4\pi\varepsilon_o r}\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta\left[\left(1-\frac{1}{k^2r^2}\right)\sin(kr-\omega t)+\frac{1}{kr}\cos(kr-\omega t)\right]+\right.\\&\qquad\left.\hat{\boldsymbol{r}}2\cos\theta\left[\frac{1}{kr}\cos(kr-\omega t)-\frac{1}{k^2r^2}\sin(kr-\omega t)\right]\right\}\\&=\frac{k^2}{4\pi\varepsilon_o r}\left\{[(\boldsymbol{p}\times\hat{\boldsymbol{r}})\times\hat{\boldsymbol{r}}+2\hat{\boldsymbol{r}}(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{p})]\left[\frac{-1}{k^2r^2}\sin(kr-\omega t)+\frac{1}{kr}\cos(kr-\omega t)\right]+\right.\\&\qquad\left.[(\boldsymbol{p}\times\hat{\boldsymbol{r}})\times\hat{\boldsymbol{r}}]\sin(kr-\omega t)\right\}\end{aligned}$$

研究它们在 $kr\to0$ 和 $kr\gg1$ 时的极限情况。当 $\omega=0$ 时求电场。

1.4.5 利用赫兹矢量位，在位于原点很远（$kr\gg1$）的地方，可以导出磁场 $\boldsymbol{H}$ 和电场 $\boldsymbol{E}$，

$$\boldsymbol{H}=-\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{\omega kql}{4\pi r}\sin\theta\cos(kr-\omega t)$$

$$\boldsymbol{E}=-\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{k^2ql}{4\pi\varepsilon_o r}\sin\theta\cos(kr-\omega t)$$

(1) 求用时间表示的坡印廷功率密度矢量 $\boldsymbol{S}$，什么是功率密度矢量的时间平均值 $\langle\boldsymbol{S}\rangle$。

(2) 对坡印廷矢量在一个半径为 r 的球面上积分，求由赫兹偶极子辐射的时间平均功率。

(3) 赫兹偶极子上的电流幅度为 $I_o=\omega q$。利用公式 $P=1/2I_o^2R_{rad}$ 求赫兹偶极子的辐射电阻。

(4) 在距城市 15km 处有一个无线电台。发射天线可以当做具有偶极矩的赫兹偶极子模型。为在城市保证美国无线电委员会规定的 25mV/m 的电场强度，发射天线需要多大的辐射功率 P。

1.4.6 一个十字型天线由两个赫兹振子正交放置组成，其赫兹矢量位为

$$\Pi=\hat{\boldsymbol{x}}\frac{ql}{4\pi r}\cos(kr-\omega t)-\hat{\boldsymbol{y}}\frac{ql}{4\pi r}\sin(kr-\omega t)$$

求出电场与磁场矢量，并证明在 x-y 平面内当 $k\rho\gg1$ 时，电场矢量在 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 方向上，且由时变函数 $\sin(k_\rho\rho-\omega t-\phi)$ 决定。

1.4.7 毕奥－萨伐尔定律表明由位于原点沿 z 方向，载有电流 I 的一个单元线段 l 在 (r,θ,ϕ) 处产生的磁场为

$$\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{\mu_o Il}{4\pi r^2}\sin\theta$$

考虑一个在 z 方向上载有电流 I 但无限长的导线。利用毕奥－萨伐尔定律证明此导线产生的磁场为

$$\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{\mu_o I}{2\pi\rho}$$

其中，ρ 为由观察点到导线的距离。将斯托克斯定理应用到安培定理中并忽略电位移项，求 $\boldsymbol{B}$ 并佐证上述结

果。

对一个载有电流 $I=1\text{kA}$ 的高压传输线,求距离此高压线 10m 远的地方的磁场强度,比较此磁场强度和地磁场的强度,地磁场的强度大约为 $5\times10^{-5}\text{T}$。

1.5 介质中的波

1.5.1 波矢量 $\boldsymbol{k}$

介质的本构关系可写为

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E} \qquad \epsilon \text{ 为介电常数} \tag{1.5.1a}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H} \qquad \mu \text{ 为磁导率} \tag{1.5.1b}$$

其中,ε 和 μ 为与介质特征有关的标量,这样的介质称为各向同性介质。对非各向同性介质,介电常数和磁导率都是张量,且本构关系将变得相当复杂,这将在第3章中讲述。麦克斯韦方程中的电流密度项 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$ 代表外部的激励电流,其可由辐射天线产生,或为外部体电流分布,如等离子或导体中的流动电子等。在无源区中,电磁场由区外的源产生,此间的麦克斯韦方程组为:

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.5.2}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.5.3}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{1.5.4}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{1.5.5}$$

关于 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ 的波动方程可由对式(1.5.2)两边取旋度,然后将式(1.5.3)代入,再应用(1.5.4)就可容易地得到。

$$\left(\nabla^2-\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{1.5.6}$$

这就是著名的各向同性介质中的亥姆霍兹方程。考虑其解

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}\cos(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t) \tag{1.5.7}$$

其中,$\boldsymbol{E}$ 是一个常数矢量。(1.5.7)式中的电场矢量是一个线极化波。由于一个任意极化的波可以表示为两个线极化波的组合,下面的分析结果将对所有极化情况成立。

将(1.5.7)式代入(1.5.6)式,得到色散关系,

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=\omega^2\mu\varepsilon=k^2 \tag{1.5.8}$$

我们定义矢量

$$\boldsymbol{k}=\hat{x}k_x+\hat{y}k_y+\hat{z}k_z \tag{1.5.9}$$

矢量 $\boldsymbol{k}$ 称为波矢量或传播矢量,也可直接称为 $\boldsymbol{k}$ 矢量。应用色散关系(1.5.8),我们发现 $\boldsymbol{k}$ 矢量的模等于 $\omega(\mu\epsilon)^{1/2}$。

波矢量 $\boldsymbol{k}=\hat{x}k_x+\hat{y}k_y+\hat{z}k_z$ 与位置矢量 $\boldsymbol{r}=\hat{x}x+\hat{y}y+\hat{z}z$ 的点积为

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=k_xx+k_yy+k_zz$$

$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=$ 常数,实际上决定了一个等相位面,它表明平面波的波前与 $\boldsymbol{k}$ 矢量正交(见图 1.5-1)。相位波前是一个平面,且位于这个平面中的电场矢量等于常数。我们称(1.5.7)式的解为均匀平面波。如果相位波前是一个平面,但位于这个平面中的电场矢量不等于常数,则这个平面波称为非均匀平面波。由于在任何时间,等于常数的相位波前都与 $\boldsymbol{k}$ 正交,因此可以断定,这个波前沿 $\boldsymbol{k}$ 方向传播。

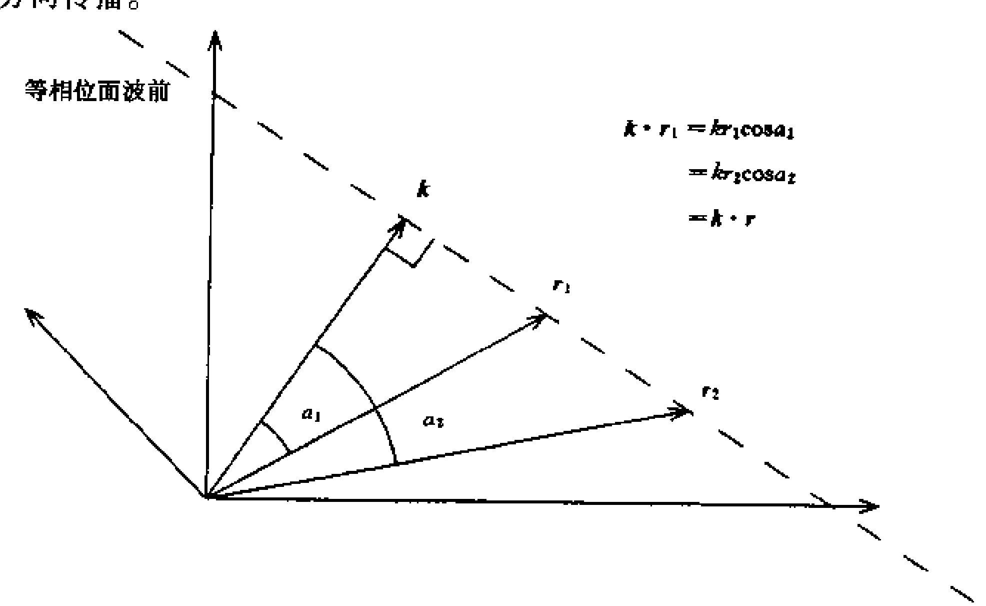


图 1.5-1 平面波前具有等相位面

应用波矢量 $\boldsymbol{k}$ 和位置矢量 $\boldsymbol{r}$,(1.5.7)式变为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t) \tag{1.5.10}$$

对磁场矢量 $\boldsymbol{H}$,有

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{H}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t) \tag{1.5.11}$$

其中,$\boldsymbol{H}$ 也是一个常数矢量。将(1.5.10)和(1.5.11)式代入(1.5.2)至(1.5.5)式,可以得到针对平面波的麦克斯韦方程组,

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}=\omega\mu\boldsymbol{H} \tag{1.5.12}$$

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}=-\omega\epsilon\boldsymbol{E} \tag{1.5.13}$$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}=0 \tag{1.5.14}$$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{H}=0 \tag{1.5.15}$$

由(1.5.14)和(1.5.15)式可见,$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都位于平面波与波矢量 $\boldsymbol{k}$ 垂直的等相位面中。

对应的坡印廷矢量的功率密度为

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{\omega\mu}\boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H})\cos^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)$$

$$=\frac{1}{\omega\mu}\boldsymbol{k}\,|\boldsymbol{E}|^2\cos^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)$$

时间平均的矢量功率密度为

$$\langle S(\boldsymbol{r},t)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}(\omega t)\,\frac{1}{\omega\mu}\boldsymbol{k}\,|\,\boldsymbol{E}\,|^2\cos^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t) = \frac{1}{2\omega\mu}\boldsymbol{k}\,|\,\boldsymbol{E}\,|^2$$

此式证明了时间平均坡印廷功率密度也向 $\boldsymbol{k}$ 方向传播。

1.5.2 导电介质中的波

导电介质的特性可由欧姆定律来描述。它将传导电流 $\boldsymbol{J}_c$ 和电场强度 $\boldsymbol{E}$ 通过电导率 σ 联系起来。

$$\boldsymbol{J}_c = \sigma\boldsymbol{E} \tag{1.5.16}$$

式(1.1.1)和(1.1.2)因此可以写为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \sigma\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.5.17}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.5.18}$$

对式(1.5.8)取旋度,得到

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}) - \nabla^2\boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{H})$$

由于 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$,将式(1.5.17)代入后得到

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 \tag{1.5.19}$$

这就是导电介质中的波动方程。

我们现在来证明

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \hat{\boldsymbol{x}}E_0\mathrm{e}^{-k_1z}\cos(k_{\mathrm{R}}z-\omega t) \tag{1.5.20}$$

是(1.5.19)式的解。将式(1.5.20)代入(1.5.19),得到

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-k_1z}[\,(k_{\mathrm{I}}^2 - k_{\mathrm{R}}^2 + \omega^2\varepsilon\mu)\cos(k_{\mathrm{R}}z-\omega t)\\ + (2k_{\mathrm{R}}k_{\mathrm{I}} - \omega\mu\sigma)\sin(k_{\mathrm{R}}z-\omega t)] = 0\end{aligned}$$

因此得到导电介质中的色散关系。

$$\begin{aligned}k_{\mathrm{R}}^2 - k_{\mathrm{I}}^2 &= \omega^2\mu\varepsilon\\ 2k_{\mathrm{R}}k_{\mathrm{I}} &= \omega\mu\sigma\end{aligned} \tag{1.5.21}$$

将上面两个式子两边平方并相加,得到

$$k_{\mathrm{R}}^2 + k_{\mathrm{I}}^2 = \sqrt{(\omega^2\mu\varepsilon)^2 + (\omega\mu\sigma)^2} = \omega^2\mu\varepsilon\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}$$

所以(1.5.20)中的 $\boldsymbol{E}(z,t)$ 确为(1.5.19)式的解,其中

$$k_{\mathrm{R}} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}+1\right)\right]^{1/2} \tag{1.5.22}$$

$$k_{\mathrm{I}} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}-1\right)\right]^{1/2} \tag{1.5.23}$$

式(1.5.20)中的时空变量 $\boldsymbol{E}(z,t) = \hat{\boldsymbol{x}}E_x(z,t)$ 示于图 1.5-2 中。

由式(1.5.20)中的电场,得到磁场的解

$$\boldsymbol{H}(z,t) = \hat{\boldsymbol{y}}\frac{E_0}{\omega\mu}\mathrm{e}^{-k_1z}[\,k_{\mathrm{R}}\cos(k_{\mathrm{R}}z-\omega t) - k_{\mathrm{I}}\sin(k_{\mathrm{R}}z-\omega t)] \tag{1.5.24}$$

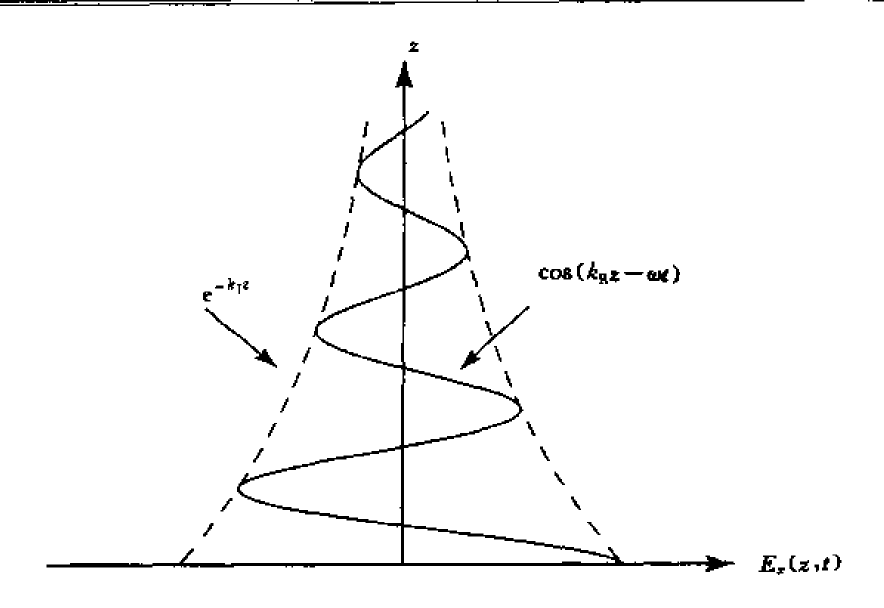


图 1.5-2 耗散介质中的波

可以证明这个解同时满足式(1.5.17)和(1.5.18)。

坡印廷功率密度矢量为

$$S(r,t)=\hat{z}\frac{E_0^2}{\omega\mu}e^{-2k_Iz}[k_R\cos^2(k_Rz-\omega t)-k_I\sin(k_Rz-\omega t)\cos(k_Rz-\omega t)] \quad (1.5.25)$$

功率密度的时间平均矢量为

$$\langle S(r,t)\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d(\omega t)E\times H=\hat{z}\frac{k_R}{2\omega\mu}E_0^2e^{-2k_Iz}$$

它是一个沿 $\hat{z}$ 方向传播的衰减波。其衰减是由于导电介质中的功率耗散引起的。

导电介质中的穿透深度

穿透深度被定义为

$$d_p=\frac{1}{k_I} \quad (1.5.26)$$

其含义为,波在传播了 d_p 距离后其幅度衰减了 e^{-1}倍。现在考虑极高电导率和极低电导率两种极端的情况。

对符合 $1\ll\sigma/\omega\varepsilon$ 条件的电导率极高的介质,可取下面近似

$$k_I=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}-1\right)\right]^{1/2}\approx\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

由此得到穿透深度

$$d_p=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}=\delta \quad (1.5.27)$$

这通常是一个很小的数,也称为趋肤深度。

对符合 $\sigma/\omega\varepsilon\ll1$ 条件的电导率极低的介质,可取下面近似

$$k_I=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}-1\right)\right]^{1/2}\approx\frac{\sigma}{2}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2}$$

并得到穿透深度

$$d_p=\frac{2}{\sigma}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} \quad (1.5.28)$$

有趣的是,式(1.5.28)所表示的穿透深度是一个与频率无关的数。然而我们这里只考虑了各向同性介质。其实对较高的频率,由于散射的原因将会有很大的衰减,这将是第6章要讨论的内容。

1.5.3 等离子体中的波

时延色散是时变场在介质中的常规现象。比如当频率由静电场变到光波频段时,水滴的介电常数可以由 $80\epsilon_o$ 降到 $1.8\epsilon_o$。介电常数随频率升高而下降的原因,是由于能够形成共向的偶极矩的水分子的排列在光频作用下的效率远不如低频高。又比如,可以考虑由中性气体电离后形成的、由自由电子和带正电的离子组成的等离子体介质。由于离子的重量比自由电子重得多,因此可以只考虑电场和自由电子的作用。设有包含自由电子密度 N 的等离子体中电子的质量是 9.1×10^{-31}kg,电子电荷为 1.6×10^{-19}C。可以通过求其体电流密度推导出等离子体的本构关系 $J_p=Nq\boldsymbol{v}$,其中 $\boldsymbol{v}$ 是电子运动速度,N 是单位体积(m^3)中的电子数。

注意:对应用电磁场与波的问题,电子的运动符合洛伦兹力定律

$$\boldsymbol{f}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\approx q\boldsymbol{E}$$

其中考虑了 $v/c\ll1$ 以及在自由空间中的平面波有 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{E}|/c$。由牛顿第二定律,$q\boldsymbol{E}=\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})/\mathrm{d}t$。

利用麦克斯韦方程

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\epsilon_o\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\boldsymbol{J}_p$$

我们可从法拉第定律导出

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu_o\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{H}=-\mu_o\frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_o\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+Nq\boldsymbol{v}\right)$$

由此给出

$$\left(\nabla^2-\mu_o\epsilon_o\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\mu_o\frac{Nq^2}{m}\right)\boldsymbol{E}=0 \tag{1.5.29}$$

将下式

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\hat{\boldsymbol{x}}E_0\mathrm{e}^{-k_Iz}\cos(k_Rz-\omega t) \tag{1.5.30}$$

代入式(1.5.29),可以得到,

$$\mathrm{e}^{-k_Iz}\left[\left(k_I^2-k_R^2+\omega^2\epsilon_o\mu_o-\mu_o\frac{Nq^2}{m}\right)\cos(k_Rz-\omega t)+(2k_Rk_I)\sin(k_Rz-\omega t)\right]=0$$

因此,等离子体的色散关系为,

$$\begin{aligned}k_R^2-k_I^2&=\omega^2\mu_o\epsilon_o\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\\ 2k_Rk_I&=0\end{aligned} \tag{1.5.31}$$

其中,

$$\omega_p=\sqrt{\frac{Nq^2}{m\epsilon_o}}\approx56.4\sqrt{N} \tag{1.5.32}$$

称为等离子体频率。对 $\omega>\omega_p$,式(1.5.31)给出

$$\begin{cases} k_{\mathrm{R}}^2 = \omega^2 \mu_o \epsilon_o \left(1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \\ k_{\mathrm{I}} = 0 \end{cases} \tag{1.5.33}$$

流动方程的解为

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(z,t) = \hat{x} E_0 \cos(k_{\mathrm{R}} z - \omega t) \\ \boldsymbol{H}(z,t) = \hat{y} \dfrac{k_{\mathrm{R}}}{\omega \mu_o} E_0 \cos(k_{\mathrm{R}} z - \omega t) \end{cases} \tag{1.5.34}$$

坡印廷功率密度矢量为

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) = \hat{z} \frac{k_{\mathrm{R}} E_0^2}{\omega \mu_o} \cos^2(k_{\mathrm{R}} z - \omega t) \tag{1.5.35}$$

功率矢量的时间平均值为

$$\langle \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}(\omega t) \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \hat{z} \frac{k_{\mathrm{R}}}{2\omega \mu_o} E_0^2$$

它沿着 z 方向传播。

凋落波

对 $\omega < \omega_p$,(1.5.31)式给出

$$\begin{cases} k_{\mathrm{I}}^2 = \omega^2 \mu_o \epsilon_o \left(\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1\right) \\ k_{\mathrm{R}} = 0 \end{cases} \tag{1.5.36}$$

相应的波动方程的解为

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(z,t) = \hat{x} E_0 \mathrm{e}^{-k_{\mathrm{I}} z} \cos(\omega t) \\ \boldsymbol{H}(z,t) = \hat{y} \dfrac{k_{\mathrm{I}}}{\omega \mu_o} E_0 \mathrm{e}^{-k_{\mathrm{I}} z} \sin(\omega t) \end{cases} \tag{1.5.37}$$

坡印廷功率密度矢量为

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) = \hat{z} \frac{k_{\mathrm{I}} E_0^2}{\omega \mu_o} \mathrm{e}^{-2k_{\mathrm{I}} z} \sin(\omega t) \cos(\omega t) \tag{1.5.38}$$

功率矢量的时间平均值为

$$\langle \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) \rangle = 0$$

这里出现功率的时间平均值为零的结果是非常重要的。这种在 z 方向上传播时以指数规律衰减且不传播时间平均功率的波被称为凋落波。

相速和群速

在色散介质中,空间频率 k 是时间频率的非线性函数。色散的等离子体介质的色散关系式为

$$k_{\mathrm{R}}(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

其中,$\omega > \omega_p$。在色散介质中,考虑两个稍微分开的时间频率,如 $\omega_1 = \omega_o + \delta\omega$ 和 $\omega_2 = \omega_o - \delta\omega$,与其对应的空间频率为 $k_{\mathrm{R1}} = k_{\mathrm{Ro}} + \delta k_{\mathrm{R}}$ 和 $k_{\mathrm{R2}} = k_{\mathrm{Ro}} - \delta k_{\mathrm{R}}$。有

$$E_x(z,t) = \cos(k_{\mathrm{R1}} z - \omega_1 t) + \cos(k_{\mathrm{R2}} z - \omega_2 t)$$

$$= 2\cos\left(\frac{k_{R1}+k_{R2}}{2}z - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cos(\delta k_{R_z} - \delta\omega t)$$
$$= 2\cos(k_{R_o}z - \omega_o t)\cos(\delta k_R z - \delta\omega t)$$

其中,应用了三角函数恒等式 $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$。在图 1.5-3 中我们给出了 $E_x(z,t)$,可以看到有一个传播波 $\cos(k_R z - \omega t)$和一个幅度调制 $\cos(\delta k_R z - \delta\omega t)$。幅度调制的传播速度为群速 $v_g = \delta\omega/\delta k_R$。载波 $\cos(k_R z - \omega t)$的传播速度为相速 $v_p = \omega/k_R$。一般来说,对于窄带信号,群速可以定义为 $v_g = 1/(\partial k_R/\partial\omega)$。

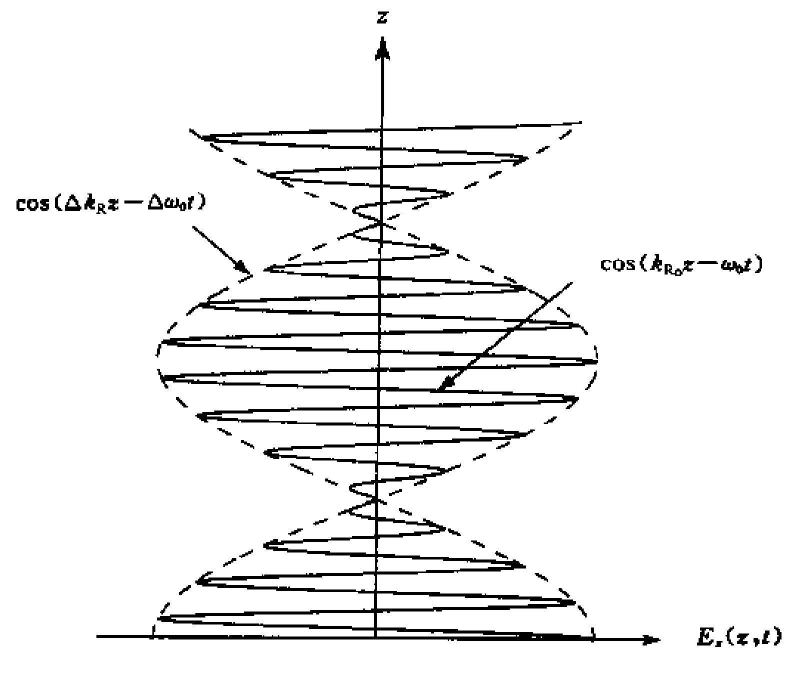


图 1.5-3 色散介质中的波

例1.5.1 考虑在等离子体中传播的窄带信号,真介质的色散关系为 $k(\omega) = \sqrt{\mu_o\varepsilon_o(\omega^2 - \omega_p^2)}$。在图 1.5-4 中,给出了这一等离子体介质 k 与 ω 的关系曲线。由于相速 $v_p = \omega/k = c/\sqrt{(1-\omega_p^2/\omega^2)}$,因此它对应图中色散曲线的斜率。而群速 $v_g = 1/[\partial k_R/\partial\omega] = c/\sqrt{(-\omega_p^2/\omega^2)}$,因此其对应于图中色散曲线的正切。此外有 $v_p v_g = c^2$。这样,当信号以群速传播时,其总是小于光速的,而相速则大于光速。

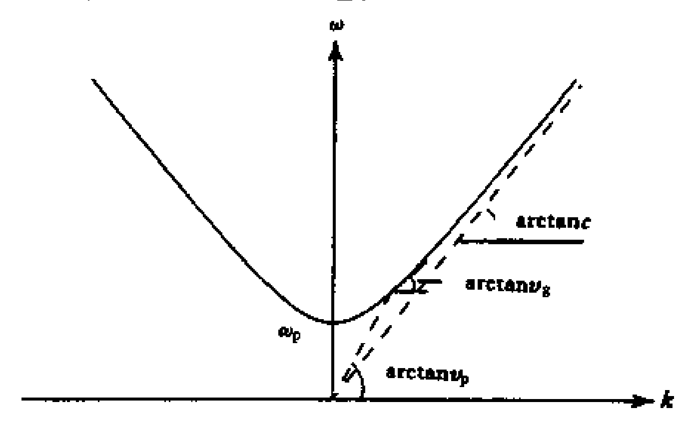


图 1.5-4 等离子体的色散关系曲线

例 1.5.2 复数 k 及其等效介电常数。

电导率为 σ 的导电介质具有如下色散关系

$$\begin{cases} k_R^2 - k_I^2 = \omega^2\mu\varepsilon \\ 2k_R k_I = \omega\mu\sigma \end{cases} \tag{1.5.39}$$

如令

$$k_R + \mathrm{i}k_I = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon + \mathrm{i}\ \omega\mu\sigma} \tag{1.5.40}$$

并取平方,(1.5.39)式也能得到满足。因此我们可以定义复数空间频率 $k = k_R + \mathrm{i}k_I$。其中实部 k_R 表示波的空间变化率,虚部 k_I 表示在介质中波幅度的指数衰减率。

等离子体介质的色散关系为

$$\begin{cases} k_R^2 - k_I^2 = \omega^2\mu_o\varepsilon_o\left(1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \\ 2k_R k_I = 0 \end{cases} \tag{1.5.41}$$

因此可设

$$k_R + \mathrm{i}k_I = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)} \tag{1.5.42}$$

如对其取平方,则其色散关系可满足。

由式(1.5.40)~(1.5.42)可见,对于导电介质和等离子体介质,其色散关系都可以表示为各向同性介质的色散关系

$$k = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon_c} \tag{1.5.43}$$

以及

$$k = \sqrt{\omega^2\mu_o\varepsilon_p} \tag{1.5.44}$$

其中,

$$\varepsilon_c = \varepsilon\left(1 + \mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right) \tag{1.5.45}$$

以及

$$\varepsilon_p = \varepsilon_o\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \tag{1.5.46}$$

称为导电介质和等离子体介质的等效介电常数。这里空间频率为复数,因此,导电介质可以被认为是具有复介电常数的各向同性介质,而等离子体介质可以被认为是介电常数小于 ε_o 或为负数(当 $\omega_p > \omega$ 时)的各向同性介质。

波矢量 $\boldsymbol{k}$ 或称空间频率 k 的幅度在一般情况下均为复数,表示为 $k = k_R + \mathrm{i}k_I$。我们已经看到在导电介质中 k_R 和 k_I 都不为零。这表明波在传播的同时也在该方向上衰减,且其时间平均功率也沿途不断耗散。在等离子体介质中,如果介质是无损的,即 ω 大于等离子体频率 ω_p,波在传播中没有衰减;但是如果 ω 小于等离子体频率 ω_p,波变为凋落波,将以指数规律衰减,且不传播任何时间平均功率。

1.5.4 单轴介质中的波

将一个导电单轴介质的本构关系写成

$$J_x = \sigma E_x \tag{1.5.47a}$$
$$J_y = \sigma_y E_y \tag{1.5.47b}$$
$$J_z = \sigma E_z \tag{1.5.47c}$$
$$D_x = \varepsilon E_x \tag{1.5.48a}$$
$$D_y = \varepsilon_y E_y \tag{1.5.48b}$$
$$D_z = \varepsilon E_z \tag{1.5.48c}$$
$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{1.5.49}$$

这个介质的光轴沿 $\hat{y}$ 方向，且其在 $\hat{y}$ 方向上的介电常数为 ε_y。消去麦克斯韦方程中的 $\boldsymbol{H}$，得到

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}) - \mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{D} - \mu\frac{\partial^2}{\partial t}\boldsymbol{J} = 0 \tag{1.5.50}$$

一般情况下，不能再继续使用$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0$，而应该代之以$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \partial/\partial y(\varepsilon - \varepsilon_y)E_y$。下面将仅研究沿 $\hat{z}$ 方向传播的波。对此有$\partial/\partial y = 0$，并仍可使用$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0$。

考虑 x 方向的场的波动方程解

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \hat{x}E_x e^{-k_{oI}z}\cos(k_{oR}z - \omega t) \tag{1.5.51}$$

代入(1.5.42)式，得到与(1.5.21)式类似的色散关系，

$$\begin{cases} k_{oR}^2 - k_{oI}^2 = \omega^2\mu\varepsilon \\ 2k_{oR}k_{oI} = \omega\mu\sigma \end{cases} \tag{1.5.52}$$

考虑 y 方向场的波动方程解

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \hat{y}E_y e^{k_{eI}z}\cos(k_{eR}z - \omega t) \tag{1.5.53}$$

得到色散关系

$$\begin{cases} k_{eR}^2 - k_{eI}^2 = \omega^2\mu\varepsilon_y \\ 2k_{eR}k_{eI} = \omega\mu\sigma_y \end{cases} \tag{1.5.54}$$

现在让我们来研究 1/4 波长板和偏振板。

对 1/4 波长板，设 $\sigma = \sigma_y = 0$。其表明 $k_{oI} = k_{eI} = 0$, $k_{oR} = k_o$, $k_{eR} = k_e$。一个沿 z 方向传播且 $E_x = E_y = E_0$ 的线极化波经过在板中一段距离 d 的传播后，在 $z + d$ 处将变为圆极化波，其中$(k_e - k_o)d = (2m+1)\pi/2$。因此具有厚度 $d = (2m+1)\pi/2(k_e - k_o)$的 1/4 波长板可以将一个线极化波变换成为一个圆极化波。这里忽略了当波入射到板的表面时由于反射系数不同对 E_x 和 E_y 产生的不同影响。

对于偏振板，我们令 $\sigma_y \ll \sigma$。它使得 x 方向的电场明显比 y 方向的电场衰减得快。因此通过偏振板传出来的波总是沿 $\hat{y}$ 方向的线极化波。

[illegible]

1.5.1 估算铜的电导率 $\sigma = -\rho_e\mu_e$，其自由电子密度 $\rho_e \approx -1.8\times10^{10}\,\mathrm{C/m^3}$，流动性 $\mu_e \approx 3.2\times10^3\,\mathrm{m^2\cdot V^{-1}\cdot s}$。对半导体，电导率是电子和空穴以及它们的流动性的函数。$\sigma = -\rho_e\mu_h + \rho_e\mu_e$，具体对硅而言，$\rho_h = -\rho_e \approx 0.011\,\mathrm{C/m^2}$，$\mu_e \approx 0.12$，$\mu_h \approx /0.025$。

1.5.2 超导现象由 Kamerlingh Onnes 于 1911 年第一次观测到。1933 年 Meissner 和 Ochsenfeld 发现磁场无法透过超导金属。当把普通金属制冷到超导状态时,磁场将被其屏蔽。宏观的超导理论由 London 于 1935 年建立,后于 1957 年由 Bardeen, Cooper 和 Sshrieffer 完善。

一个简单的超导模型可以认为是一个具有极高电子密度 N 的等离子体模型。

(1) 证明具有极高电子密度 N 的等离子体的穿透深度为

$$d_p = \sqrt{\frac{m}{Ne^2\mu_o}}$$

(2) 设 $N = 7\times10^{28}\text{m}^{-3}$,计算 d_p。

(3) 比较上面结果和一个良导体的趋肤深度。解释为什么一个频率很低的磁场可以穿透良导体但却不能穿透超导体。

1.5.3

(1) 在一个工作频率为 2.5GHz 的微波炉中有一个底部为圆形的牛排,其介电常数 $\epsilon = 40\epsilon_o$,电导率 $\sigma = 2\Omega/\text{m}$,求穿透深度。

(2) 如果 $\omega\epsilon/\sigma \ll 1$,则地球可以被认为是一个良导体,如果$\ll1$,则意味着小于 0.1,并设 $\sigma = 5\times10^{-3}\text{S/m}$, $\epsilon = 10\epsilon_o$,求在什么频率下地球可以被认为是一个良导体。

(3) 铝的介电常数、磁导率和电导率分别为 $\epsilon = \epsilon_o$, $\mu = \mu_o$, $\sigma = 3.54\times10^7\text{S/m}$。如果一个 VHF 接收天线是用木心铝皮制作,铝皮的厚度需 5 倍于铝在这个频率下的趋肤深度,确定铝皮的厚度。厨房中常用的薄膜铝皮的厚度是否能达到要求。已知 $f = 100\text{MHz}$,常用的薄膜铝皮的厚度约为 25.4mm。

(4) 分别计算海水在频率 100Hz 和 5MHz 时的损耗角正切和趋肤深度。在上述频率下,海水的电导率 $\sigma = 4\text{S/m}$,介电常数 $\epsilon = 80\epsilon_o$,磁导率 $\mu = \mu_o$。

(5) 海面上的一条船希望与深潜于水下 100m 的一艘潜艇通过电磁波通信。考虑用 ULF 频段的 1kHz 的频率直接向水下发射,求当电波到达潜艇时,其功率密度衰减了多少倍?

1.5.4 考虑一个线极化波,

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \hat{x}E_0\cos(k_z z - \omega t) + \hat{y}E_0\cos(k_z z - \omega t)$$

(1) 当有一个 1/4 波长板存在时,求 $\boldsymbol{E}(z,t)$并确定其极化。

(2) 当有一个 1/2 波长板存在时,求 $\boldsymbol{E}(z,t)$并确定其极化。

1.5.5 脉冲星是一个主要由快速旋转的中子组成的星体。当从地球上观测时,这些脉冲星周期性地每隔大约 10ms 就向地球辐射射频脉冲。由于这些窄脉冲在向地球传播时要经过星际空间,星际空间中的等离子体介质的色散就会使射频脉冲中的低频成分比高频成分传播得更慢一些。第一颗脉冲星于 1968 年在蟹状星云附近发现。光学天文观测学家确定蟹状星云距地球的距离大约是 $6\times10^{19}\text{m}$(6350 光年)。在下面问题中应用等离子体的介电常数 $\epsilon = \epsilon_o(1 - \omega_p^2/\omega^2)$进行计算,并假设 $\omega \ll \omega_p$。

(1) 对 $\omega \gg \omega_p$,求相速和群速的表达式?

(2) 假设对 110MHz 和 115MHz 的频率有 1.5s 的色散延时,即当 110MHz 和 115MHz 的频率分量到达地球的时间相差 1.5s。利用这一事实以及已知的传播距离和 v_g 的表达式,计算星际空间的电子密度(m^{-3})。

1.5.6

(1) 有一个色散的等离子体介质,如果 $\mu = \mu_o$, $\epsilon = \epsilon_o(1 - \omega_p^2/\omega^2)$,其中 $\omega_p = \sqrt{Ne^2/m\epsilon_o}$, N 为每立方米中的自由电子密度, e 为单个电子的电量(C), m 为其质量(kg),推导群速 v_g。

(2) 当一束光波($\lambda = 0.5\mu\text{m}$)和一束电磁脉冲($f = 10\text{MHz}$)同时发出时,经过 100km 的 $\omega_p = 2\pi\cdot8\text{MHz}$ 的各向同性等离子体介质,它们到达的时间差是多少?

1.5.7 一个在各向同性的等离子体介质中传播的平面波,可用下式表示

$$\boldsymbol{E} = E_o\hat{x}\sin\left(\frac{k}{\sqrt{2}}(y+z) - \omega t\right) + \frac{E_o}{\sqrt{2}}(A\hat{y} + \hat{z})\cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}(y+z) - \omega t\right)$$

其中, $k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - 4\pi^2\times10^{12}}$, ω 是用 rad/s 表示的频率, c 是自由空间中的光速。

(1) 求式中 A 的值。

(2) 求电场 $\boldsymbol{E}$ 的极化(如果不是线极化的,请指出旋向)。

(3) 将介电常数 ϵ 用 ω_p 来表示。

(4) 求等离子体频率 ω_p。

(5) 如果 $\omega = 2\pi\times10^6$(rad/s),求群速 v_g。

1.6 波的反射

考虑一个平面波从介电常数 ϵ_0,磁导率为 μ_0 的介质中入射到另一个介电常数为 ϵ_t,磁导率为 μ_t 的介质上,如图 1.6-1 所示。设两种介质的分界面位于 $x=0$ 处,入射波为电场矢量在 $\hat{y}$ 方向上的线极化波。

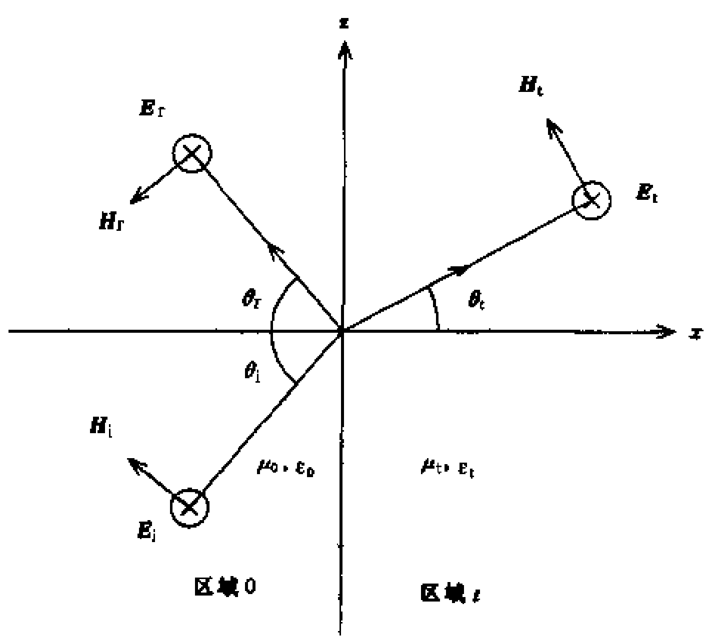


图 1.6-1 平面边界所分开的区域 0 和 t 中的反射与透射 TE 波

幅度为 1 的入射电场矢量的表达式可写为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\hat{y}E_y=\hat{y}\cos(k_x x+k_z z-\omega t) \tag{1.6.1a}$$

相应的磁场矢量表达式可由法拉第定律

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$$

得到 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\hat{x}H_x+\hat{z}H_z$。其中,

$$H_x=-\frac{k_z}{\omega\mu_0}\cos(k_x x+k_z z-\omega t) \tag{1.6.1b}$$

$$H_z=\frac{k_x}{\omega\mu_0}\cos(k_x x+k_z z-\omega t) \tag{1.6.1c}$$

将 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\hat{y}E_y$ 和 $\partial\boldsymbol{H}/\partial t=-\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)/\mu$ 代入安培定律

$$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$$

得到

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_y=0$$

这就是关于 E_y 的亥姆霍兹方程。

我们将 x-z 平面称为入射面，它在此以前的定义是由分界面法线和入射波矢量 $\boldsymbol{k}$ 定义的平面。入射波的电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 与入射面垂直，入射波的磁场 $\boldsymbol{H}$ 分量与入射面平行。我们将这样的波称为 TE(Transverse Electric)波。TE 波也称为正交极化波或水平极化波，还可以简单称为 E 波或 s 波。

一个一般极化的入射电磁波可以被分解为两个线极化的波，一个是电场垂直于入射面的 TE 波，另一个是电场平行于入射面而磁场垂直于入射面的 TM(Transverse Magnetic)波。TM 波的磁场垂直于入射面，同时也被称为平行极化波或垂直极化波，还可以简单称为 $\boldsymbol{H}$ 波或 p 波。我们先研究 TE 波入射的情况。

TE 波入射后的反射电场和磁场分量可表示如下

$$E_{ry} = R\cos(-k_{rx}x + k_{rz}z - \omega t) \tag{1.6.2a}$$

$$H_{rx} = -\frac{k_{rz}}{\omega\mu_0}R\cos(-k_{rx}x + k_{rz}z - \omega t) \tag{1.6.2b}$$

$$H_{rz} = -\frac{k_{rx}}{\omega\mu_0}R\cos(-k_{rx}x + k_{rz}z - \omega t) \tag{1.6.2c}$$

其中 R 是对电场 E_y 分量的反射系数。

入射波的波矢量 $\boldsymbol{k}_i = \hat{x}k_{ix} + \hat{z}k_{iz}$ 和反射波的波矢量 $\boldsymbol{k}_r = -\hat{x}k_{rx} + \hat{z}k_{rz}$ 都受到色散关系的控制

$$k_x^2 + k_z^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0 = k^2 \tag{1.6.3}$$

$$k_{rx}^2 + k_{rz}^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0 = k_r^2 \tag{1.6.4}$$

这可以通过将(1.6.1a)和(1.6.2a)式代入关于 E_y 和 E_{ry} 的亥姆霍兹波动方程中来证明。

在区域 t，可以写出透射 TE 波的解，

$$E_{ty} = T\cos(k_{tx}x + k_{tz}z - \omega t) \tag{1.6.5a}$$

$$H_{tx} = -\frac{k_{tz}}{\omega\mu_t}T\cos(k_{tx}x + k_{tz}z - \omega t) \tag{1.6.5b}$$

$$H_{tz} = \frac{k_{tx}}{\omega\mu_t}T\cos(k_{tx}x + k_{tz}z - \omega t) \tag{1.6.5c}$$

其中，T 为透射系数，且色散关系

$$k_{tx}^2 + k_{tz}^2 = \omega^2\mu_t\varepsilon_t = k_t^2 \tag{1.6.6}$$

决定了透射波波矢量 $\boldsymbol{k}_t = \hat{x}k_{tx} + \hat{z}k_{tz}$ 的幅度。

设两个区域的边界位于 $x=0$ 处，且 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 在边界上的切向分量对所有 z 和 t 都连续。我们得到

$$\cos(k_z z - \omega t) + R\cos(k_{rz}z - \omega t) = T\cos(k_{tz}z - \omega t) \tag{1.6.7}$$

$$\frac{k_x}{\mu_0}\cos(k_z z - \omega t) - \frac{k_{rx}}{\mu_0}R\cos(k_{rz}z - \omega t) = \frac{k_{tx}}{\mu_t}T\cos(k_{tz}z - \omega t) \tag{1.6.8}$$

由于式(1.6.7)和(1.6.8)必须对所有 z 和 t 成立，因此有

$$k_z = k_{rz} = k_{tz} \tag{1.6.9}$$

(1.6.9)式称为相位匹配条件。由色散关系(1.6.3)和(1.6.4)可求得 $k_{rx} = k_x$。式(1.6.7)和(1.6.8)因面可减化为

$$1 + R = T \tag{1.6.10}$$

$$\frac{k_z}{\mu_0}(1 - R) = \frac{k_{tx}}{\mu_t}T \tag{1.6.11}$$

在 $x=0$ 处，由于法线方向的 $\boldsymbol{B}$ 的连续性条件实际上同样可以导出式(1.6.10)且不存在法线方向的 $\boldsymbol{D}$，关于法线方向的 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 在边界上的连续性条件都得到了满足。

反射系数 R 和透射系数 T 由式(1.6.10)和(1.6.11)给出，

$$R = R_{0t}^{\mathrm{TE}} = \frac{1 - p_{0t}^{\mathrm{TE}}}{1 + p_{0t}^{\mathrm{TE}}} \tag{1.6.12}$$

和

$$T = T_{0t}^{\mathrm{TE}} = \frac{2}{1 + p_{0t}^{\mathrm{TE}}} \tag{1.6.13}$$

其中

$$p_{0t}^{\mathrm{TE}} = \frac{\mu_0 k_{tx}}{\mu_t k_x} \tag{1.6.14}$$

由于式(1.6.14)中的 p_{0t}^{TE} 是对应 TE 波的，式(1.6.12)中的 R_{0t}^{TE} 就被称为是区域 0 中的 TE 波入射到区域 0 和区域 t 分界面上时所产生的反射的菲涅耳(Fresnel)反射系数。式(1.6.13)中的 T_{0t}^{TE} 就被称为由区域 0 到区域 t 中的透射系数。

式(1.6.9)被称为是相位匹配条件，这是由边界条件导出的一个非常重要的公式。如用入射角 θ_i，反射角 θ_r，透射角 θ_t，以及式(1.6.3)和(1.6.4)中的等量关系 $k_r = k$ 来表示，相位匹配条件可写为

$$k\sin\theta_i = k_r\sin\theta_r = k_t\sin\theta_t$$

因此入射角应该等于反射角 $\theta_i = \theta_r$，且有

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{k}{k_t} = \frac{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{n_0}{n_t} \tag{1.6.15}$$

其中，$n_0 = c\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ 被称为区域 0 中的折射指数，而 $n_t = c\sqrt{\mu_t\varepsilon_t}$ 被称为区域 t 中的折射指数。式(1.6.15)也就是著名的斯涅尔(Snell)定律。

能量守恒

由入射波、反射波和透射波的表达式可以计算出它们各自的时间平均功率

$$\langle \boldsymbol{S}_i \rangle = \frac{1}{2}\left(\hat{x}\frac{k_x}{\omega\mu_0} + \hat{z}\frac{k_z}{\omega\mu_0}\right)|E_0|^2 \tag{1.6.16}$$

$$\langle \boldsymbol{S}_r \rangle = \frac{1}{2}\left(-\hat{x}\frac{k_x}{\omega\mu_0} + \hat{z}\frac{k_z}{\omega\mu_0}\right)|R|^2|E_0|^2 \tag{1.6.17}$$

$$\langle \boldsymbol{S}_t \rangle = \frac{1}{2}\left(\hat{x}\frac{k_{tx}}{\omega\mu_t} + \hat{z}\frac{k_z}{\omega\mu_t}\right)|T|^2|E_0|^2 \tag{1.6.18}$$

能量守恒可以通过观察边界面上一个测试体积单元(图 1.6-2)来判断，这需要证明进入和流出该体积单元的所有坡印廷矢量的 x 分量相等。我们定义一个功率反射指数

$$r = \frac{-\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\langle \boldsymbol{S}_r \rangle}{\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\langle \boldsymbol{S}_i \rangle} = |\boldsymbol{R}|^2 \tag{1.6.19}$$

同样我们定义一个功率透射指数

$$t=\frac{\hat{x}\cdot<S_{\mathrm{t}}>}{\hat{x}\cdot<S_{\mathrm{i}}>}=p_{0\mathrm{t}}|T|^{2} \tag{1.6.20}$$

利用公式(1.6.12)和(1.6.13),可以发现 $r+t=1$。这样就证明了边界上的反射和透射功率符合能量守恒定律。

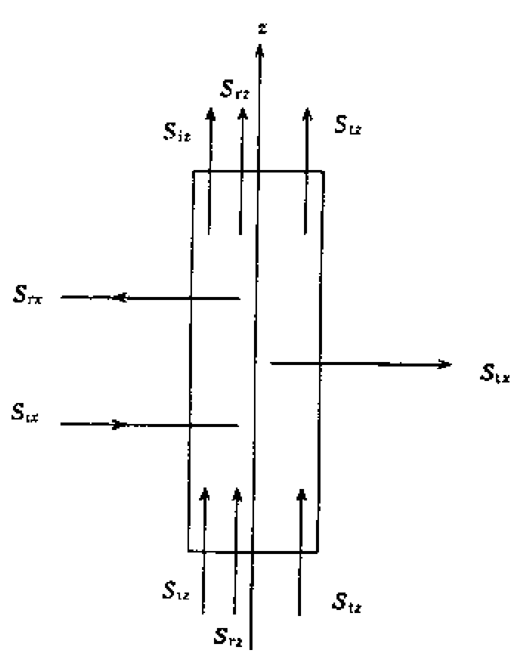


图 1.6-2 平面边界上的能量守恒定律

TM 波的反射和透射

在平面边界上 TM 波的反射和透射的分析可以参考 TE 波的情况(见图 1.6-3)。假设入射波的磁场 $\boldsymbol{H}=\hat{y}H_y$ 的幅度为 1,则其磁场和电场分量的表达式可写为

$$H_y=\cos(-k_x x+k_z z-\omega t) \tag{1.6.21a}$$

$$E_x=\frac{k_z}{\omega\epsilon_0}\cos(-k_x x+k_z z-\omega t) \tag{1.6.21b}$$

$$E_z=-\frac{k_x}{\omega\epsilon_0}\cos(-k_x x+k_z z-\omega t) \tag{1.6.21c}$$

由此入射 TM 波产生的反射波的场分量为

$$H_{\mathrm{r}y}=R^{\mathrm{TM}}\cos(-k_{\mathrm{r}x}x+k_{\mathrm{r}z}z-\omega t) \tag{1.6.22a}$$

$$E_{\mathrm{r}x}=\frac{k_{\mathrm{r}z}}{\omega\epsilon_0}R^{\mathrm{TM}}\cos(-k_{\mathrm{r}x}x+k_{\mathrm{r}z}z-\omega t) \tag{1.6.22b}$$

$$E_{\mathrm{r}z}=\frac{k_{\mathrm{r}x}}{\omega\epsilon_0}R^{\mathrm{TM}}\cos(-k_{\mathrm{r}x}x+k_{\mathrm{r}z}z-\omega t) \tag{1.6.22c}$$

其中 R^{TM}为磁场分量 H_y 的反射系数。在区域 t 中,透射波的场分量为

$$H_{\mathrm{t}y}=T^{\mathrm{TM}}\cos(k_{\mathrm{t}x}x+k_{\mathrm{t}z}z-\omega t) \tag{1.6.23a}$$

$$E_{\mathrm{t}x}=\frac{k_{\mathrm{t}z}}{\omega\epsilon_{\mathrm{t}}}T^{\mathrm{TM}}\cos(k_{\mathrm{t}x}x+k_{\mathrm{t}z}z-\omega t) \tag{1.6.23b}$$

$$E_{\mathrm{t}z}=-\frac{k_{\mathrm{t}x}}{\omega\epsilon_{\mathrm{t}}}T^{\mathrm{TM}}\cos(k_{\mathrm{t}x}x+k_{\mathrm{t}z}z-\omega t) \tag{1.6.23c}$$

其中 T^{TM}为 TM 入射波的透射系数。

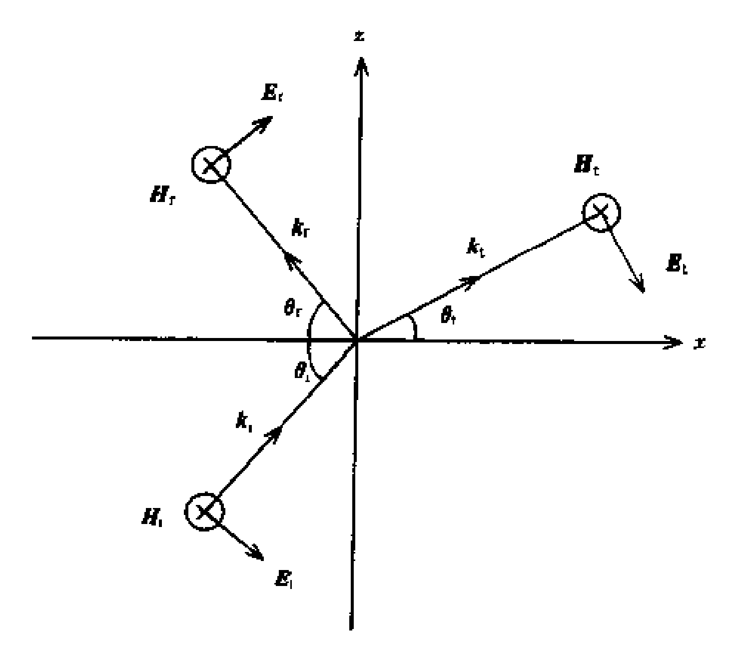


图 1.6-3 TM 波的反射和透射

入射波的波矢量为 $\boldsymbol{k}_i=\hat{x}k_{ix}+\hat{z}k_{iz}$,反射波的波矢量为 $\boldsymbol{k}_r=-\hat{x}k_{rx}+\hat{z}k_{rz}$,而透射波的波矢量满足在 TE 波入射时的色散关系(1.6.3),(1.6.4)和(1.6.6)。利用 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 在边界 $x=0$ 处的连续性条件,可以得到同样的相位匹配条件(1.6.9)式以及 TM 波入射时的反射和透射系数 R^{TM}和 T^{TM}

$$R_{0t}^{TM}=\frac{1-p_{0t}^{TM}}{1+p_{0t}^{TM}} \tag{1.6.24}$$

和

$$T_{0t}^{TM}=\frac{2}{1+p_{0t}^{TM}} \tag{1.6.25}$$

其中

$$p_{0t}^{TM}=\frac{\epsilon_0 k_{tx}}{\epsilon_t k_x} \tag{1.6.26}$$

需要指出的是,这时的菲涅耳反射系数表示的是反射波磁场与入射波磁场的比值。

练习 1.6.1 在讨论 TM 波在平面边界上的反射和透射时我们使用了与分析 TE 波时的类似分析方法,因此可以利用对称性或二元性原理并直接写出结果。采用下列替换 $\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{H}\to-\boldsymbol{E}$, $\mu_0\rightleftharpoons\epsilon_0$,以及 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 在边界 $x=0$ 处连续的边界条件,可以发现对 TE 问题(图 1.6-1)的对偶就恰好是 TM 问题(图 1.6-3)。我们将式(1.6.14)中的 p_{0t}^{TE}换为 $p_{0t}^{TM}=\epsilon_0 k_{tx}/\epsilon_t k_x$ 就得到了式(1.6.24)和式(1.6.25)中表达的反射和透射系数。

练习 1.6.2 在良导体的表面,可以通过假设 $\epsilon_t\to\infty$ 来计算反射波。发现对于 TE 波,$p_{0t}^{TE}\to\infty$, $R_{0t}^{TE}\to-1$;而对于 TM 波,$p_{0t}^{TM}\to0$, $R_{0t}^{TM}\to1$。因此电场的切向分量将在边界上消失,而磁场的切向分量将在边界上加倍以支持在导体中产生的感应电流。

布儒斯特角与零反射

我们现在讨论 $\mu_t=\mu_0$ 的非磁性材料的布儒斯特(Brewster)角。布儒斯特角 θ_B 是入射波在边界上不发生反射时的入射角。令 $R=0$ 或 $p_{0t}=1$,对 TE 波,由(1.6.14)得到

$$k_{tx}=k_x \tag{1.6.27}$$

对 TM 波,由(1.6.26)得到

$$\varepsilon_0 k_{tx}=\varepsilon_t k_x \tag{1.6.28}$$

考虑 $k_{tx}=k_x$,可见除两个区域的介电常数也相同这一情况外,对 TE 波不存在布儒斯特角。对 TM 波,由式(1.6.28)可得

$$k\cos\theta_t=k_t\cos\theta_B \tag{1.6.29}$$

其中,引用了 $\varepsilon_0/\varepsilon_t=k^2/k_t^2$ 以及 $k_z=k\cos\theta_B$,θ_B 为入射波的布儒斯特角。此外根据斯涅耳定律,

$$k\sin\theta_B=k_t\sin\theta_t \tag{1.6.30}$$

将(1.6.29)和(1.6.30)两式联解,消去 k 和 k_t,得到 $\sin2\theta_B=\sin2\theta_t$。其解 $\theta_B=\theta_t$ 再次表明两区域中的介质是相同的,因此这一解不是我们感兴趣的。当考虑到 θ_B 和 θ_t 都在 0°~90°之间这一事实,得到另一个解

$$\theta_B+\theta_t=\frac{\pi}{2} \tag{1.6.31}$$

由于反射波的方向与透射波的方向垂直,反射波矢量 $\boldsymbol{k}_r$ 也就垂直于透射波矢量 $\boldsymbol{k}_t$(见图 1.6-4)。

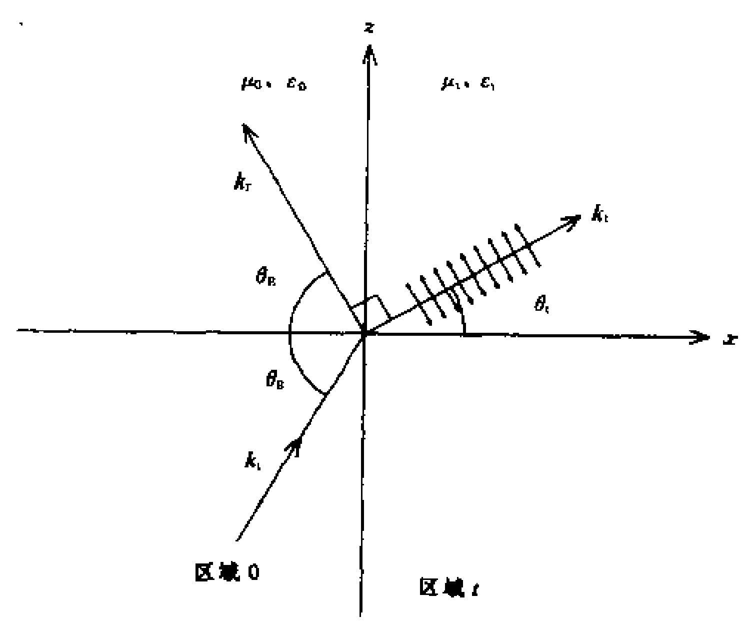


图 1.6-4 布儒斯特角入射

对这一现象可以从物理上作如下解释。想像透射区域中的介质是由许多偶极子组成,它们被透射波激励并以同样的频率反射。每一个偶极子的方向图在垂直于其极轴的方向上有最大辐射,而在其极轴的方向上辐射为零。对 TM 波激励,所有偶极子都在入射平面内沿电场方向谐振。当以布儒斯特角入射时,反射波矢量 $\boldsymbol{k}_r$ 恰好在透射介质中偶极子谐振的方向上,因此 TM 波没有反射。

将式(1.6.31)代入式(1.6.30),可以得到布儒斯特角

$$\theta_B = \arctan \frac{k_t}{k} = \arctan \sqrt{\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_0}} \tag{1.6.32}$$

在图1.6-5中，我们将反射系数作为入射角的函数绘出。一般来说，在一个固体的介质表面上，TE波的反射要强于TM波。当一个非极化的波以布儒斯特角 θ_B 入射一个各向同性介质时，反射波将变为与入射面垂直的线性极化波。因此，布儒斯特角也常被称为极化角。

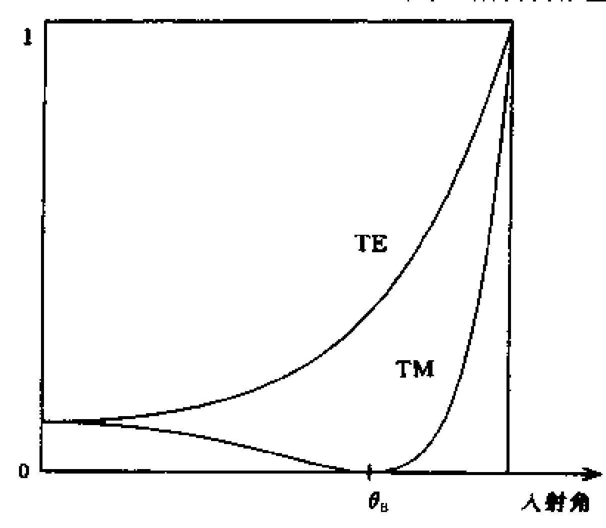


图1.6-5 TE和TM波的反射

相位匹配

相位匹配条件如公式(1.6.9)所示

$$k_z = k_{rz} = k_{tz} \tag{1.6.33}$$

它表明入射波、反射波和透射波的切向分量连续。入射波、反射波和透射波的波矢量都位于入射面之中。这些波矢量的幅度值由色散关系

$$k^2 = k_r^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \tag{1.6.34}$$

和

$$k_t^2 = \omega^2 \mu_t \varepsilon_t \tag{1.6.35}$$

决定。可用如图1.6-6所示的由波矢量定义的简图来说明相位匹配关系。设 $n_0 \leqslant n_t$，在区域0中绘出一个 k 平面，其半径小于区域 t 中的 k 平面。满足了切向方向上的 k_x 相等之后，可以得到反射波和透射波的波矢量 $\boldsymbol{k}$(见图1.6-6)。

假如区域0中的介质比区域 t 中的介质更密，即 $n_0 > n_t$。那么区域 t 和 k 面的半径小于区域0中的 k 平面(见图1.6-7)。利用相位匹配条件，可以看到由于入射波的 k_z 大于 k_t，因此在小的半圆上没有交点。区域 t 中的 k 可用下式描述

$$k_{tx}^2 + k_z^2 = k_t^2 \tag{1.6.36}$$

由于 $k_z > k_t$，k_{tx}变为一个纯虚数。正如我们前面讲到的，虚数的波分量表明波的幅度以指数规律衰减。下面我们将介绍并证明透射波在 $\hat{x}$ 方向凋落的情况(可称这种现象为全反射)。

临界角和全反射

全反射发生在 $k_z > k_t$ 的情况。设 $k_t = k_z = k\sin\theta_c$，角度 θ_c 称为临界角。当入射角大于临

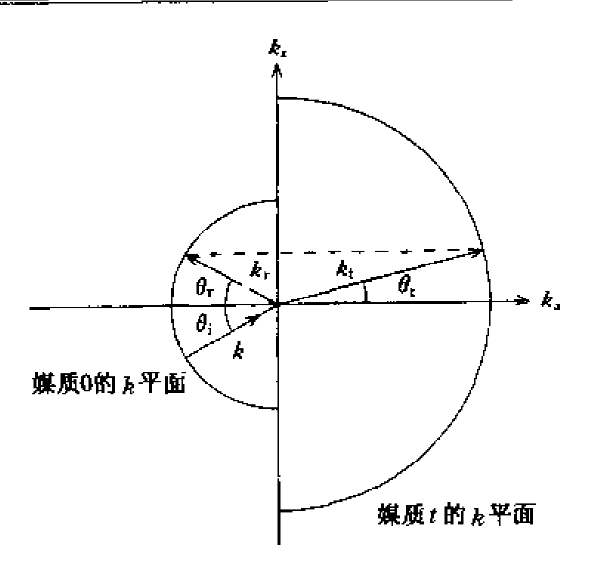


图 1.6-6 利用 k 面进行相位匹配

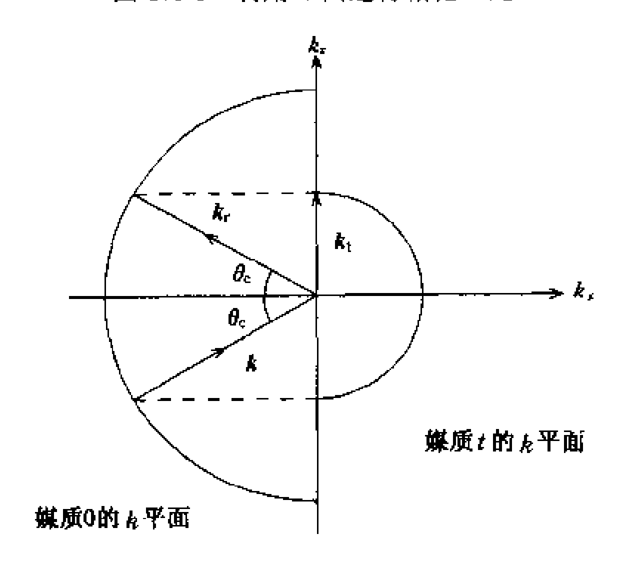


图 1.6-7 k 面在区域 0 中比在区域 t 中大的情况

界角时,将发生全反射。下面用 TE 波的情况来说明,其同样对 TM 波的情况也适用。在区域 t 中,可将透射波的表达式写为如下形式

$$E_{ty} = T_1 e^{-k_{txI}x}\cos(k_z z - \omega t) + T_2 e^{-k_{txI}x}\sin(k_z z - \omega t) \tag{1.6.37}$$

$$H_{tx} = \frac{k_z}{\omega\mu_t} T_1 e^{-k_{txI}x}\cos(k_z z - \omega t) - \frac{k_z}{\omega\mu_t} T_2 e^{-k_{txI}x}\sin(k_z z - \omega t) \tag{1.6.38}$$

$$H_{tz} = -\frac{k_{txI}}{\omega\mu_t} T_1 e^{-k_{txI}x}\sin(k_z z - \omega t) + \frac{k_{txI}}{\omega\mu_t} T_2 e^{-k_{txI}x}\cos(k_z z - \omega t) \tag{1.6.39}$$

其中 T_1 和 T_2 为电场的透射系数。反射波的电场和磁场为

$$E_{ry} = R_1\cos(-k_x x + k_z z - \omega t) + R_2\sin(-k_x x + k_z z - \omega t) \tag{1.6.40}$$

$$H_{rx} = -\frac{k_z}{\omega\mu_0} R_1\cos(-k_x x + k_z z - \omega t) - \frac{k_z}{\omega\mu_0} R_2\sin(-k_x x + k_z z - \omega t) \tag{1.6.41}$$

$$H_{rz} = -\frac{k_x}{\omega\mu_0} R_1\cos(-k_x x + k_z z - \omega t) - \frac{k_x}{\omega\mu_0} R_2\sin(-k_x x + k_z z - \omega t) \tag{1.6.42}$$

透射波和反射波的幅度由入射波的幅度确定

$$E_y = \cos(k_x x + k_z z - \omega t) \tag{1.6.43}$$

$$H_y = -\frac{k_z}{\omega\mu_0}\cos(k_x x + k_z z - \omega t) \tag{1.6.44}$$

$$H_z = -\frac{k_x}{\omega\mu_0}\cos(k_x x + k_z z - \omega t) \tag{1.6.45}$$

由边界条件,得到

$$1 + R_1 = T_1 \tag{1.6.46}$$

$$R_2 = T_2 \tag{1.6.47}$$

$$R_2 = p_{0tI} T_1 \tag{1.6.48}$$

$$1 - R_1 = p_{0tI} T_2 = p_{0tI}^2 T_1 \tag{1.6.49}$$

其中,$p_{0tI} = \mu_0 k_{txI}/\mu_t k_z$。解上面的方程,得到

$$R_1 + \frac{1 - P_{0tI}^2}{1 + P_{0tI}^2} \tag{1.6.50}$$

$$T_1 = \frac{2}{1 + P_{0tI}^2} \tag{1.6.51}$$

$$T_2 = R_2 = \frac{2p_{0tI}}{1 + P_{0tI}^2} \tag{1.6.52}$$

如果令 $p_{0tI} = \mu_0 k_{txI}/\mu_t k_z = \tan\phi$,相应的有

$$R_1 = \cos 2\phi \tag{1.6.53}$$

$$T_1 = 2\cos^2\phi = 1 + \cos 2\phi \tag{1.6.54}$$

$$T_2 = R_2 = \sin 2\phi \tag{1.6.55}$$

在区域 t 中,透射的 TE 场分量为

$$E_{ty} = 2\cos\phi\, e^{-k_{txI}x}\cos(k_z z - \omega t - \phi) \tag{1.6.56}$$

$$E_{tx} = -\frac{k_z}{\omega\mu_t} 2\cos\phi\, e^{-k_{txI}x}\cos(k_z z - \omega t - \phi) \tag{1.6.57}$$

$$E_{tz} = -\frac{k_{txI}}{\omega\mu_t} 2\cos\phi\, e^{-k_{txI}x}\sin(k_z z - \omega t - \phi) \tag{1.6.58}$$

可见透射波沿 $\hat{z}$ 方向以相速 ω/k_z 传播。这可以被看做是一个具有与边界面垂直的等相位面的平面波。它的幅度在边界处最大并在离开边界后以指数衰减。这个波称为表面波。

在区域 0 中,由于入射角 $\theta \geqslant \theta_c$,反射波的场分量为

$$E_{ry} = \cos(-k_x x + k_z z - \omega t - 2\phi) \tag{1.6.59}$$

$$H_{rx} = -\frac{k_z}{\omega\mu_0}\cos(-k_x x + k_z z - \omega t - 2\phi) \tag{1.6.60}$$

$$H_{rz} = -\frac{k_z}{\omega\mu_0}\cos(-k_x x + k_z z - \omega t - 2\phi) \tag{1.6.61}$$

相位移 2ϕ 就是熟知的 Goos-Hanchen 相移。

在全反射时,入射波、反射波和透射波的瞬时坡印廷功率矢量为

$$S_i = \hat{x}\frac{k_x E_0^2}{\omega\mu_0}\cos^2(k_x x + k_z z - \omega t) + \hat{z}\frac{k_x E_0^2}{\omega\mu_0}\cos^2(k_x x + k_z z - \omega t) \tag{1.6.62}$$

$$S_r = -\hat{x}\frac{k_x E_0^2}{\omega\mu_0}\cos^2(k_x x + k_z z - \omega t - 2\phi) + \hat{z}\frac{k_z E_0^2}{\omega\mu_0}\cos^2(-k_x x + k_z z - \omega t - 2\phi) \tag{1.6.63}$$

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{t}} = -\hat{\boldsymbol{x}}\frac{k_{\mathrm{tx}l}E_0^2}{\omega\mu_0}4\cos^2\phi \mathrm{e}^{-2k_{\mathrm{t}x}x}\sin(k_z z-\omega t-\phi)\cos(k_z z-\omega t-\phi)+$$

$$\hat{\boldsymbol{z}}\frac{k_z E_0^2}{\omega\mu_{\mathrm{t}}}4\cos^2\phi \mathrm{e}^{-k_{\mathrm{t}x}x}\cos^2(k_x x+k_z z-\omega t) \tag{1.6.64}$$

可以直接证明 $S_{ix}+S_{rx}=S_{tx}$。取它们的时间平均值,有

$$\langle \boldsymbol{S}_{\mathrm{i}}\rangle = \hat{\boldsymbol{x}}\frac{k_x E_0^2}{2\omega\mu_0}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{k_z E_0^2}{2\omega\mu_0} \tag{1.6.65}$$

$$\langle \boldsymbol{S}_{\mathrm{r}}\rangle = -\hat{\boldsymbol{x}}\frac{k_x E_0^2}{2\omega\mu_0}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{k_z E_0^2}{2\omega\mu_0} \tag{1.6.66}$$

$$\langle \boldsymbol{S}_{\mathrm{t}}\rangle = \hat{\boldsymbol{z}}\frac{k_x E_0^2}{2\omega\mu_{\mathrm{t}}}+2\cos^2\phi \mathrm{e}^{-2k_{\mathrm{t}x}x} \tag{1.6.67}$$

习 题

1.6.1 电离层由地面以上大约 50km 高处一直延伸到数个地球半径(平均地球半径为 6371km),其电离密度最大处发生在大约 300km 高度上见(图 1.6-8)。这个电离密度和抛面图示出了几个随高度变化缓慢的层段。如图所示,它们分别被称为 C,D,E,F_1 和 F_2 层。产生这些峰值的原因是由于太阳辐射和大气成分随高度

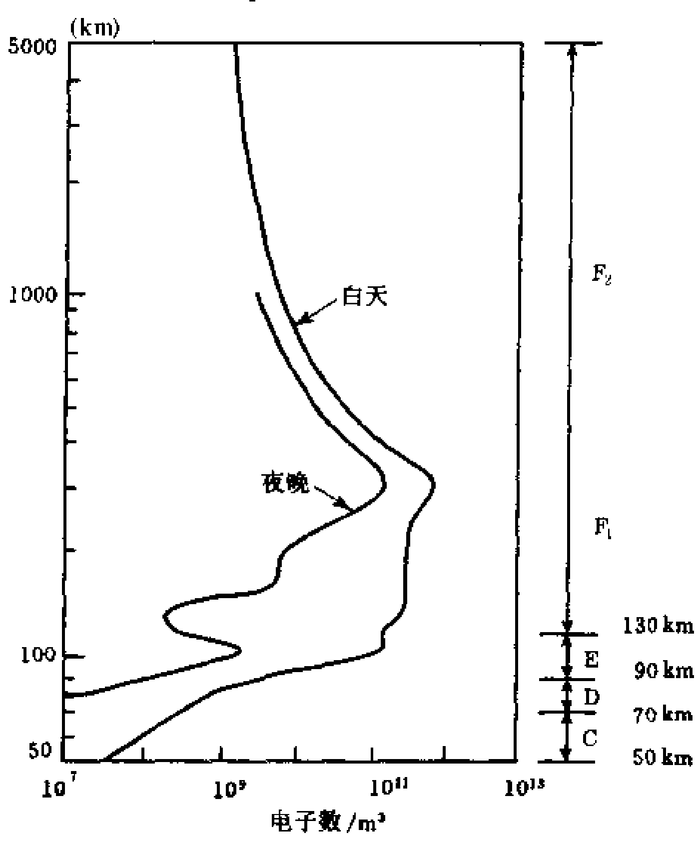


图 1.6-8 电离层电子密度

的变化。随着一天中的时间,一年中的季节,太阳黑子的周期等变化,这些层段的峰值出现的高度也发生着变化。由最低层到最高层,电子密度的变化范围大约在 $10^7\sim10^{12}/\mathrm{m}^3$ 之间。为简单起见,现假设电离层由一个 40km 厚,电子密度 $N=10^{11}/\mathrm{m}^3$ 的 E 层,和一个位于其上的 200km 厚,电子密度 $N=6\times10^{11}/\mathrm{m}^3$ 的 F 层组成。

(1) E 和 F 层中的等离子体频率各为多少。

(2) 考虑一个 10MHz 的平面波以 θ 角由下向上入射 E 层,E 层和 F 层中的透射角 θ_t 为多少。

(3) 设 θ 为 30°,问低于什么频率将在 E 层发生全反射,低于什么频率 F 层发生全反射。

1.6.2 一个均匀平面波以入射角 θ 在 $z=0$ 处入射一平面边界。其电场矢量可用下式表示。

$$\boldsymbol{E}_{\text{inc}} = E_0(\hat{x}\cos\theta + \hat{y} + \hat{z}\sin\theta)\cos(k_x x - k_z z - \omega t)$$

幅度 E_0 为常数。

(1) 证明这一电场满足高斯定律。

(2) 将入射角电场分解为 TE 和 TM 分量。

(3) 入射波是什么极化波。

(4) 求用 R^{TE}和 R^{TM}表示的反射场表达式。

1.6.3 有平面反射板反射的刺眼阳光是部分线极化的。

(1) 当相对介电常数 $\varepsilon_t = 9$ 时,求布儒斯特角。布儒斯特角 θ_B 也称为极化角。这是由于当以 θ_B 角入射时,反射波是完整的 TE 波。

(2) 假如你戴的人造偏振眼镜可以吸收入射阳光中的一个线极化分量。为了使进入眼睛的阳光最小,通过眼镜到达眼睛的光线是 TE 还是 TM 极化的,解释为什么。

1.6.4 如图 1.6-9 所示的气体激光器在气体放电管两端使用了斯布儒特角石英窗以最大限度地减少反射损耗。如果在我们关心的频率下石英的折射率为 $n = 1.46$,求角度 θ。由于石英窗的作用,激光器的输出基本上是完全极化的。求极化的方向,即 $\boldsymbol{E}$ 是垂直还是平行于纸面,为什么。

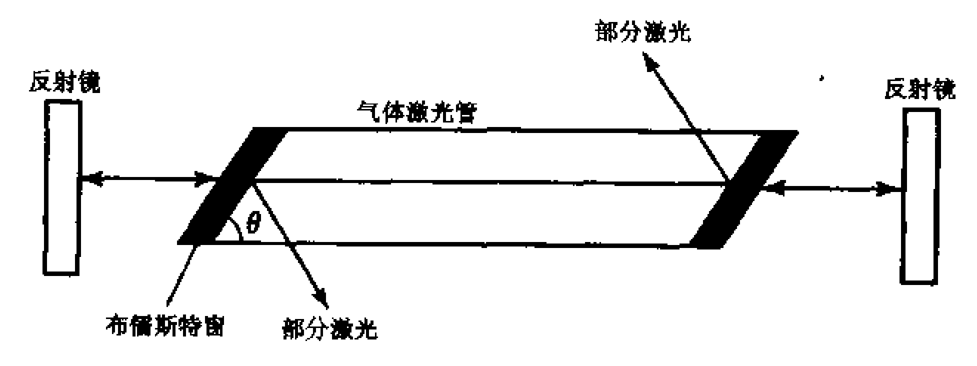


图 1.6-9　布儒斯特窗气体激光器

1.6.5 一均匀平面波在由介电介质 $\varepsilon > \varepsilon_0$ 和半自由空间形成的平面边界 $z = 0$ 处以入射角 θ 从介电介质一侧入射。其电场矢量可由下式给出

$$\boldsymbol{E}_{\text{inc}} = E_0(\hat{x}\cos\theta + \hat{y} + \hat{z}\sin\theta)\cos(k_x x - k_z z - \omega t)$$

其中,幅度 E_0 为常数。

(1) 求用 R^{TE}和 R^{TM}表示的反射场表达式。

(2) 对入射角小于临界角的情况,即 $\theta < \theta_c$,反射和透射波的极化如何。

(3) 对入射角大于临界角的情况,即 $\theta > \theta_c$,证明反射电场中 TE 和 TM 分量之间的相位差为

$$\Delta\phi = \phi_{\text{TM}} - \phi_{\text{TE}} = 2\arctan\left(\frac{\cos\theta\ \sqrt{\sin^2 - n^{-2}}}{\sin^2\theta}\right)$$

其中,n 为折射系数,定义为 $\sqrt{\mu\varepsilon}/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$。可能会用到下面恒等式:

$$\tan(A = B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$$

(4) 如果 $\varepsilon = 6\varepsilon_0$,入射角 θ 为多少时反射波为圆极化波?

1.6.6 考虑一平面波在 $z = 0$ 处从介电介质 $\varepsilon = 9\varepsilon_0$ 一侧入射。右旋圆极化入射电场为

$$\boldsymbol{E}_i = E_0(\sqrt{3}\hat{x} + \hat{z})\cos(k_x x + k_z z - \omega t) + 2\hat{y}\sin(k_x x + k_z z - \omega t)$$

其中,幅度 E_0 为常数。反射电场为

$$\boldsymbol{E}_r = E_0[2R^{\text{TE}}\hat{y}\sin(k_x x + k_z z - \omega t) + R^{\text{TM}}(-\sqrt{3}\hat{x} + \hat{z})\cos(k_x x + k_z z - \omega t)]$$

(1) 证明入射角为 30°。

(2) 对 $k_x = 1\text{m}^{-1}$,求区域 1 中的频率(Hz)和波长(m)。

(3) 当入射角等于临界角时,求相对介电常数 $\epsilon_t(0<\epsilon_t<\infty)$和反射波的极化。

(4) 当反射波为线极化时,求相对介电常数 $\epsilon_t(0<\epsilon_t<\infty)$。

1.6.7 考虑一厚度为 d 的介质平板,如图 1.6-10 所示,其特性由下面介电常数和电导率张量描述

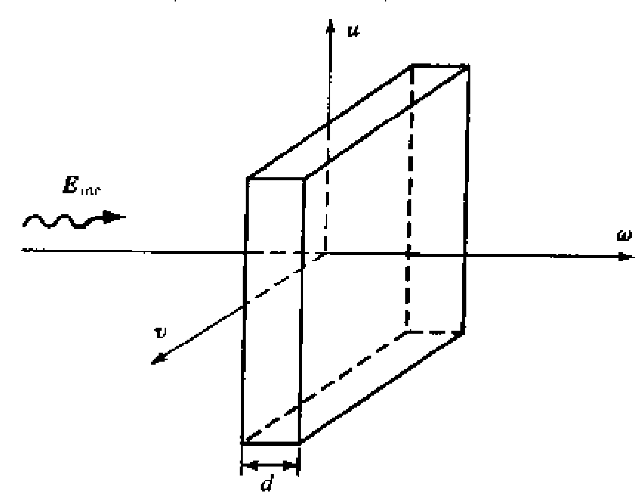


图 1.6-10 单轴平板

$$\boldsymbol{\epsilon}=\begin{bmatrix}\epsilon_x & 0 & 0\\ 0 & \epsilon_y & 0\\ 0 & 0 & \epsilon_z\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_z\end{bmatrix}$$

其中,$\epsilon_x=12\epsilon_0,\epsilon_y=\epsilon_0,\epsilon_z=4\epsilon_0$ 且 $\mu=\mu_0$。极化波沿 z 方向的电导率为 $\sigma_z=0.2\epsilon_0\omega$ S/m。

这种介质可以用来制造偏振器,1/4 波长板和 1/2 波长板,设入射波沿 $\hat{\omega}$ 方向入射偏振器。

极化器

(1) 将 x,y,z 代入 u,v,ω(顺序无关)使得对任何极化的入射电场以及足够厚的介质板透射场都为线极化波。

(2) 求用自由空间波长表示的最小厚度 d,使得入射波中不需要的极化在经过介质板后衰减 $1/e$。

1/4 波长板

(3) 将 x,y,z 代入 u,v,ω(顺序无关),使得对一线极化的入射电场,透射场转变为圆极化波。特别是在轴线上,使得功率无吸收。给出一个入射波的表达式和介质板厚度 d,使得透射波为圆极化波。

(4) 对 1/4 波长板和(3)中的入射波表达式,求用自由空间波长表示的最小厚度 d,使得透射波为左旋的圆极化波。

1/2 波长板

(5) 将 x,y,z 代入 u,v,ω(顺序无关),使得对一线极化的入射电场,透射场为与入射电场正交的线极化波。

(6) 对(5)中的 1/2 波长板,求用自由空间波长表示的最小厚度 d。

1.7 波导

1.7.1 平行板波导中的波

考虑有一由位于 $x=0$ 和 $x=d$ 处两个理想导体平板组成的电磁波导引装置(图1.7-1)。两平板之间的介质为各向同性的均匀介质。平板在 y 方向上的宽度为 w,这里假设 $w\gg d$,且其边缘效应可以被忽略。此外,设场在 y 方向上的变化率为零,因此有$\partial/\partial y=0$。

麦克斯韦方程组可以被分解为横向电场分量(TE)和横向磁场分量(TM)。由于$\partial/\partial y=0$,

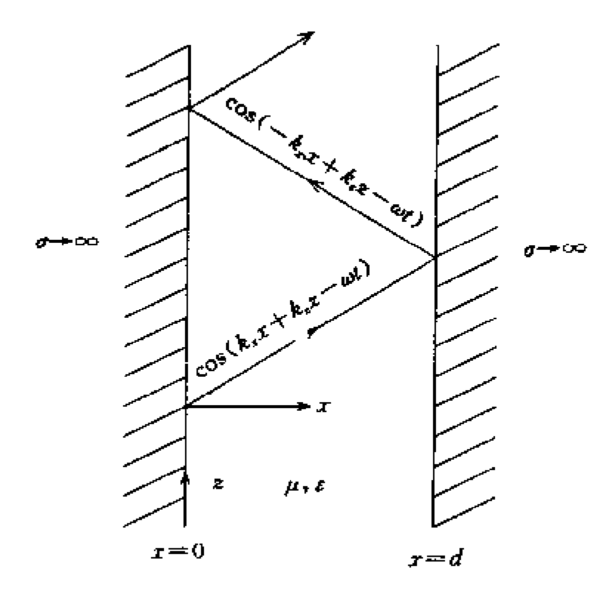


图 1.7-1 平行板波导

法拉第定律和安培定律变为

$$-\frac{\partial}{\partial z}E_y = -\mu\frac{\partial}{\partial t}H_x \tag{1.7.1a}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}E_x - \frac{\partial}{\partial x}E_z = -\mu\frac{\partial}{\partial t}H_y \tag{1.7.1b}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}E_y = -\mu\frac{\partial}{\partial t}H_z \tag{1.7.1c}$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}H_y = \epsilon\frac{\partial}{\partial t}E_x \tag{1.7.2a}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}H_x - \frac{\partial}{\partial x}H_z = \epsilon\frac{\partial}{\partial t}H_y \tag{1.7.2b}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}H_y = \epsilon\frac{\partial}{\partial t}E_z \tag{1.7.2c}$$

将式(1.7.1a)和(1.7.1c)代入(1.7.2b),得到关于 E_y 的波动方程。将其与(1.7.1a)和(1.7.1c)一同写出

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E_y = 0 \tag{1.7.3a}$$

$$\mu\frac{\partial}{\partial t}H_x = \frac{\partial}{\partial z}E_y \tag{1.7.3b}$$

$$\mu\frac{\partial}{\partial t}H_z = -\frac{\partial}{\partial x}E_y \tag{1.7.3c}$$

这就是关于横向电场(TE)波的麦克斯韦方程组。与其相同,将式(1.7.2a)和(1.7.2c)代入(1.7.1b),得到如下方程并与式(1.7.2a)和(1.7.2c)一同写出

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)H_y = 0 \tag{1.7.4a}$$

$$\epsilon\frac{\partial}{\partial t}E_x = \frac{\partial}{\partial z}H_y \tag{1.7.4b}$$

$$\epsilon\frac{\partial}{\partial t}E_z = \frac{\partial}{\partial x}H_y \tag{1.7.4c}$$

这就是关于横向磁场(TM)波的麦克斯韦方程组。根据边界条件要求,位于 $x=0$ 和 $x=d$ 处的

切向电场应该为零。在平行板波导中波是向 $\pm\hat{z}$ 方向导引的。对向 $+\hat{z}$ 方向传播的波，TM 波的解为

$$H_y = (A\cos k_x x + B\sin k_x x)\cos(k_z z - \omega t) \tag{1.7.5a}$$

将式(1.7.5a)代入(1.7.4a)，得到色散关系

$$k_z^2 + k_x^2 = \omega^2\mu\varepsilon = k^2 \tag{1.7.6}$$

电场分量可由(1.7.4b)和(1.7.4c)得到，有

$$E_x = \frac{k_z}{\omega\epsilon}(A\cos k_x x + B\sin k_x x)\cos(k_z z - \omega t) \tag{1.7.5b}$$

$$E_z = -\frac{k_z}{\omega\epsilon}(A\sin k_x x - B\cos k_x x)\sin(k_z z - \omega t) \tag{1.7.5c}$$

边界条件要求在 $x = 0$ 处 $E_z = 0$，由此给出 $B = 0$ 和导引条件

$$k_x d = m\pi \tag{1.7.7}$$

因此得到平行板波导中的各个场分量

$$H_y = A\cos k_x x\cos(k_z z - \omega t) \tag{1.7.8a}$$

$$E_x = \frac{k_z}{\omega\epsilon}A\cos k_x x\cos(k_z z - \omega t) \tag{1.7.8b}$$

$$E_z = -\frac{k_x}{\omega\epsilon}A\sin k_x x\sin(k_z z - \omega t) \tag{1.7.8c}$$

在图 1.7-2 中，给出了当 $m = 1,2,3$ 时的 H_y。可以看到，当 x 方向上的空间频率 $k_x = m\pi/d$ 中的 m 取更高的值时，波导间隙 d 中还可以容纳更多的空间变化。

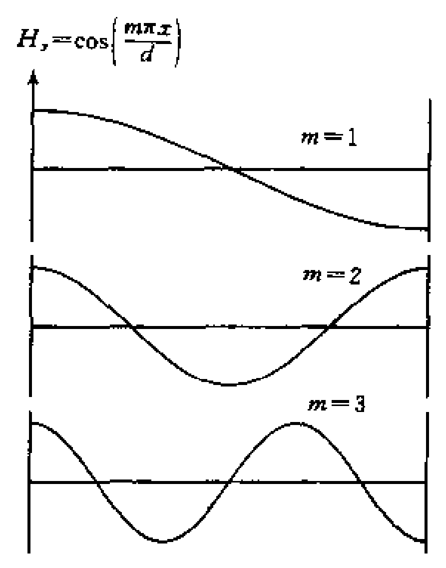


图 1.7-2　TM_1，TM_2 以及 TM_3 模的场的幅度值

如果用平面波在导电平面上的反射来解释上述结果，可以将(1.7.8)式变为如下形式：

$$H_y = \frac{A}{2}[\cos(k_x x + k_z z - \omega t) + \cos(-k_x x + k_z z - \omega t)] \tag{1.7.9a}$$

$$E_x = \frac{k_z A}{2\omega\epsilon}[\cos(k_x x + k_z z - \omega t) + \cos(-k_x x + k_z z - \omega t)] \tag{1.7.9b}$$

$$E_z = -\frac{k_x A}{2\omega\epsilon}[\cos(k_x x + k_z z - \omega t) - \cos(-k_x x + k_z z - \omega t)] \tag{1.7.9c}$$

式(1.7.9)中三个方程表示的是在平行板波导中的两个平面波的叠加,如图 1.7-1 所示,其波矢量为 $\boldsymbol{k}=\hat{x}k_x+\hat{z}k_z$ 和 $\boldsymbol{k}=-\hat{x}k_x+\hat{z}k_z$。

导引条件(1.7.7)表明,平行板波导中跳跃式传播的波在 $\hat{x}$ 方向上必须与 $2k_xd=2m\pi$ 从结构上相关才能存在。能够在波导中传播的波的 k_x 值是一组离散数

$$k_x=\frac{m\pi}{d}=\frac{m}{2d}\mathrm{K_o} \tag{1.7.10}$$

其中,m 为整数,如图 1.7-3 所示。因此,作为边界条件在 $x=0$ 和 $x=d$ 处得到满足的一个结果,在 $2d$ 距离中,波导中的波在 x 方向上的空间变化数就一定是一个整数。

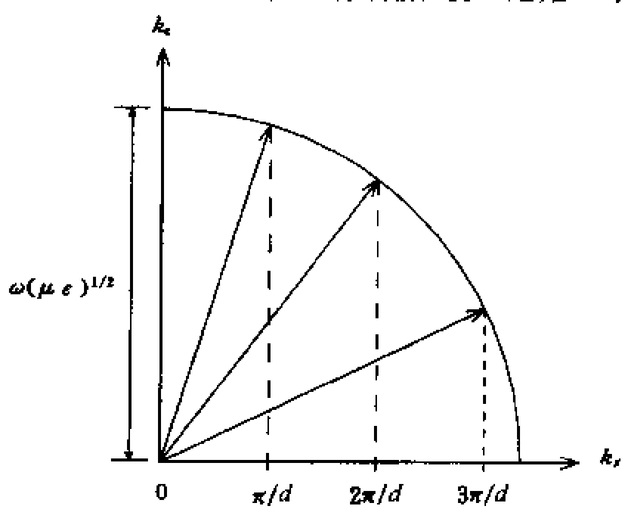


图 1.7-3 导引条件的解释

将导引条件(1.7.10)代入色散关系式(1.7.6),可以得到

$$k_z^2+k_{cm}^2=k^2 \tag{1.7.11}$$

其中

$$k_{cm}=\frac{m\pi}{d} \tag{1.7.12}$$

可见如果 $k<k_{cm}$,$k_z<\mathrm{i}k_{zI}$变为虚数,表明波导中的波将在 $\hat{z}$ 方向上衰减。满足麦克斯韦方程组和边界条件的场分量变为

$$H_y=A\cos k_xx\mathrm{e}^{-k_zz}\cos\omega t \tag{1.7.13a}$$

$$E_x=\frac{k_{zI}}{\omega\varepsilon}A\cos k_xx\mathrm{e}^{-k_{zI}z}\cos\omega t \tag{1.7.13b}$$

$$E_z=-\frac{k_x}{\omega\varepsilon}A\sin k_xx\mathrm{e}^{-k_{zI}z}\cos\omega t \tag{1.7.13c}$$

在 $\hat{z}$ 方向上的时间平均功率为零,且对 $k<k_{cm}$波导中的模式为凋落波模式。

在 $k_z=0$ 处的空间频率称为截止空间频率 k_{cm}

$$k_{cm}=m\pi/d=m/2d(\mathrm{K_o}) \tag{1.7.14}$$

由于 m 取不同的值,因此平行板波导中的 TM 波被分类为 TM_m 模。为使第 m 阶模的 TM 波可以在波导中传播,其空间频率 k 必须大于 k_{cm}。另外注意如果 TM_m 模的波可以在波导中传播,那么所有 TM_l 模的波 $l<m$ 也都可以在其中传播。因此,对一个给定的空间频率 k,如果 $k_{cm}<k<k_{c(m+1)}$,波导将可以接受 m 个不同的 TM 模的波传播。最低阶的 TM 模为 TM_0,其对应的截止空间频率 $k_{c0}=0$。

由于 $k_x=0, k_z=k$，TM_0 模的电场和磁场为

$$H_y = A\cos(kz-\omega t) \tag{1.7.15a}$$

$$E_x = \frac{kA}{\omega\varepsilon}\cos(kz-\omega t) \tag{1.7.15b}$$

它同沿 $\hat{z}$ 方向传播的平面波是相同的。TM_0 模又称为平行板波导中的基本模式 TEM 模。

练习 1.7.1 求与截止空间频率 $k_{cm}=m\pi/d$ 相对应的截止波长 λ_{cm} 和截止角频率 ω_{cm}。

答 与其相对应的截止波长 $\lambda_{cm}=2d/m$，截止角频率 $\omega_{cm}=m\pi/d(\mu\varepsilon)^{1/2}$。

例 1.7.1 平行板波导中的 TE 模。

我们写出 TE 模的解

$$E_y=(A\cos k_x x+B\sin k_x x)\cos(k_z z-\omega t) \tag{1.7.16}$$

将式(1.7.16)代入(1.7.3a)，得到与(1.7.6)相同的色散关系。由于边界条件要求在 $x=0$ 处 $E_y=0$，因此得到 $A=0$ 以及与(1.7.7)相同的导引条件。相关的磁场分量由(1.7.3b)和(1.7.3c)得到。由此写出平行板波导中的 TE 波的场分量

$$E_y=B\sin k_x x\cos(k_z z-\omega t) \tag{1.7.17a}$$

$$H_x=-\frac{k_z}{\omega\mu}B\sin k_x x\cos(k_z z-\omega t) \tag{1.7.17b}$$

$$H_z=\frac{k_x}{\omega\mu}B\cos k_x x\sin(k_z z-\omega t) \tag{1.7.17c}$$

与 TM 波相同，上面结果可以解释为在导电平板之间平面波的叠加。但有一个重要的不同点是 TE 波不存在 TE_0 模，其最低阶的模式为 TE_1 模。

例 1.7.2 平行板波导中的功率。

TE 波的坡印廷功率密度为

$$\boldsymbol{S}=-\hat{z}E_yH_x+\hat{x}E_yH_z$$

时间平均坡印廷功率密度为

$$\langle \boldsymbol{S}\rangle=\hat{z}\,\frac{k_z}{2\omega\mu}B^2\sin^2 k_x x$$

当 $k<k_{cm}, k_z=k_{zI}$ 时，可将 TE 波的解写为

$$E_y=B\sin k_x x\,\mathrm{e}^{-k_{zI}z}\cos\omega t \tag{1.7.18a}$$

$$H_x=-\frac{k_z}{\omega\mu}B\sin k_x x\,\mathrm{e}^{-k_{zI}z}\cos\omega t \tag{1.7.18b}$$

$$H_z=\frac{k_x}{\omega\mu}B\cos k_x x\,\mathrm{e}^{-k_{zI}z}\sin\omega t \tag{1.7.18c}$$

可见其在 $\hat{x}$ 和 $\hat{z}$ 方向上的时间平均坡印廷功率均为零。

例 1.7.3 相速和群速。

在截止频率以上，沿 $\hat{z}$ 方向的相速 v_p 为

$$v_p=\frac{\omega}{k_z}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left[1-\left(\frac{k_{cm}}{k}\right)^2\right]^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left[1-\left(\frac{\omega_{cm}}{\omega}\right)^2\right]^{-1/2}$$

其中，$\omega_{cm}=m\pi/d\sqrt{\mu\varepsilon}$。当频率趋于无穷大时，$v_p$ 将趋于这一介质中的光速(见图1.7-4)。对于有限的 ω，相速永远大于 $(\mu\varepsilon)^{-1/2}$。这是由于 k_z 总是小于 k。相速决定频率这一事实表明波导是一个色散的传输系统。传播的群速为

$$v_g=\left(\frac{\partial k_z}{\partial\omega}\right)^{-1}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left[1-\left(\frac{k_{cm}}{k}\right)^2\right]^{1/2}$$

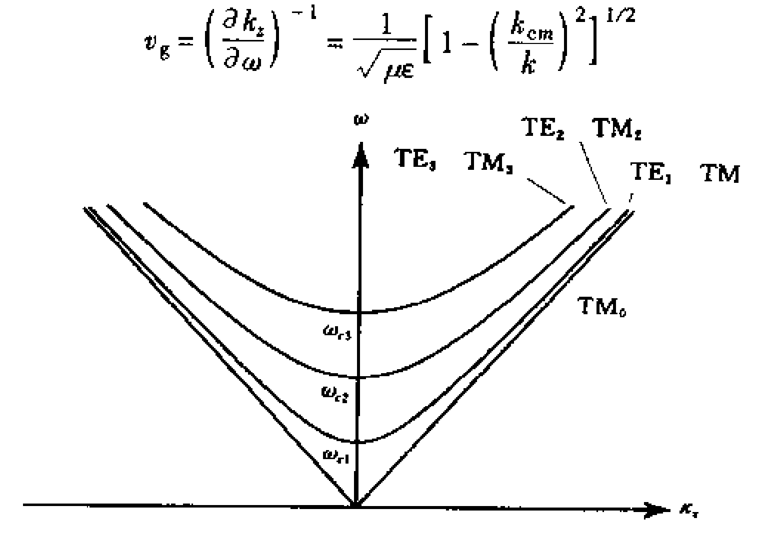


图1.7-4 $\omega-k_z$ 图

因此 $v_pv_g=\frac{1}{\mu\varepsilon}$。群速永远小于此介质中的光速。事实上，

$$v_g=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{k_z}{k}$$

就等于波在此介质中的传播速度在传播方向 z 上的投影。

1.7.2 矩形波导中的波

在讨论沿 $\hat{z}$ 方向传播的导行波时，所有以 z,t 为变量的场矢量都写为 $\cos(\pm k_zz-\omega t)$ 和 $\sin(\pm k_zz-\omega t)$ 的形式，其中 k_z 为传播常数，± 号表示传播方向 $\hat{z}$ 的正向或反向。采用这样的表示方法，可以将 $\partial^2/\partial z^2$ 替换为 $-k_z^2$，$\partial^2/\partial t^2$ 替换为 $-\omega^2$。根据其在波导理论中的惟一性，$\hat{z}$ 方向可以用来描述波导中波的模式。由麦克斯韦方程组，得到

$$\frac{\partial}{\partial z}H_y-\frac{\partial}{\partial z}H_y=\epsilon\frac{\partial}{\partial t}E_x \tag{1.7.19a}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}H_x-\frac{\partial}{\partial x}H_z=\epsilon\frac{\partial}{\partial t}E_y \tag{1.7.19b}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}H_y-\frac{\partial}{\partial y}H_x=\epsilon\frac{\partial}{\partial t}E_z \tag{1.7.19c}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}E_z-\frac{\partial}{\partial z}E_y=-\mu\frac{\partial}{\partial t}E_x \tag{1.7.20a}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}E_x-\frac{\partial}{\partial x}E_z=-\mu\frac{\partial}{\partial t}H_y \tag{1.7.20b}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}E_y-\frac{\partial}{\partial y}E_x=-\mu\frac{\partial}{\partial t}H_z \tag{1.7.20c}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}E_x+\frac{\partial}{\partial y}E_y+\frac{\partial}{\partial z}E_z=0 \tag{1.7.21}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}H_x + \frac{\partial}{\partial y}H_y + \frac{\partial}{\partial z}H_z = 0 \tag{1.7.22}$$

可以将所有场分量都表示为与 z 轴平行的分量。利用时间微分式(1.7.19a),并将式(1.7.20b)代入式(1.7.19a),得到

$$\mu \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y}H_z - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}E_x - \frac{\partial}{\partial x}E_z\right) = -\omega^2\omega\epsilon E_x$$

由此可以进一步将 E_x 表示为 E_z 和 H_z。用同样的方式,可求得所有与 $\hat{z}$ 方向垂直的场分量,

$$E_x = \frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}E_z - \mu\frac{\partial^2}{\partial y\partial t}H_z\right) \tag{1.7.23a}$$

$$E_y = \frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}E_z + \mu\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}H_z\right) \tag{1.7.23b}$$

$$H_x = \frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}H_z + \mu\frac{\partial^2}{\partial y\partial t}E_z\right) \tag{1.7.24a}$$

$$H_y = \frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}H_z - \mu\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}E_z\right) \tag{1.7.24b}$$

为求径向场分量 E_z,可将式(1.7.20a,b)代入式(1.7.19c)并利用(1.7.21)式。为求径向场分量 H_z,我们可将式(1.7.19a,b)代入式(1.7.20c)并利用式(1.7.22)。其结果为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E_z = 0 \tag{1.7.23c}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)H_z = 0 \tag{1.7.24c}$$

方程组(1.7.23)和(1.7.24)是研究具有相同截面的柱形波导的基础方程。我们现在研究具有矩形截面的矩形波导。

考虑一在 x 方向边长为 a,在 y 方向边长为 b 的矩形金属波导(见图 1.7-5),我们来研究 $E_z = 0$ 且所有电场分量都垂直于 $\hat{z}$ 的情况下的横向(TE)电场。设 $H_z = H_0\cos k_x x\cos k_y y\cos(k_z z - \omega t)$ 为一个沿 $\hat{z}$ 方向传播的波,如下场分量就是(1.7.23)和(1.7.24)的解。

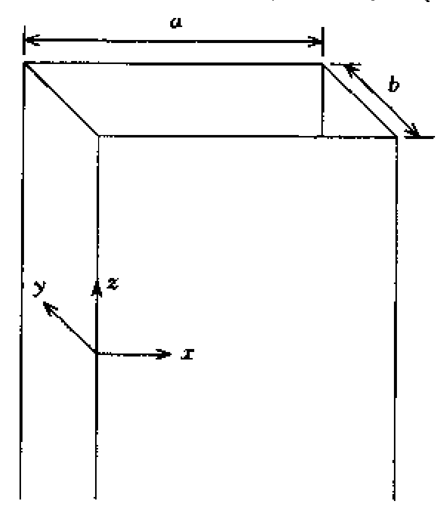


图 1.7-5 矩形金属波导

$$E_z = 0 \tag{1.7.25}$$

$$E_x = \frac{\omega\mu k_y}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}H_0\cos k_x x\sin k_y y\sin(k_z z - \omega t) \tag{1.7.26}$$

$$E_y = \frac{-\omega\mu k_x}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2} H_0 \sin k_x x \cos k_y y \sin(k_z z - \omega t) \tag{1.7.27}$$

$$H_x = \frac{k_x k_z}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2} H_0 \sin k_x x \cos k_y y \sin(k_z z - \omega t) \tag{1.7.28}$$

$$H_y = \frac{k_y k_z}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2} H_0 \cos k_x x \sin k_y y \sin(k_z z - \omega t) \tag{1.7.29}$$

$$H_z = H_0 \cos k_x x \cos k_y y \cos(k_z z - \omega t) \tag{1.7.30}$$

上述公式满足在 $x=0$ 和 $y=0$ 处 E_z 和 E_y 趋于零的边界条件。同时边界条件也要求在 $x=a$ 和 $y=b$ 处 E_z 和 E_y 也趋于零。由此得到了导引条件

$$k_x a = m\pi \tag{1.7.31a}$$

$$k_y b = n\pi \tag{1.7.31b}$$

其中，m 和 n 为整数。

将(1.7.30)代入(1.7.24c)式，得到色散条件

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2\mu\varepsilon = k^2 \tag{1.7.32}$$

将导引条件和色散条件结合，求得传播常数

$$k_z = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - (m\pi/a)^2 - (n\pi/b)^2} \tag{1.7.33}$$

对于确定 m 和 n 值，矩形波导中的 TE 波被区分为不同的 TE_{mn} 模。第一个下标 m 表示场在 $\hat{x}$ 方向上变化的周期数，第二个下标 n 表示场在 $\hat{y}$ 方向上变化的周期数。将导引条件(1.7.31)代入场的表达式，可以看到当 m 较大时，在 x 方向上场的变化周期将很多；当 n 较大时，在 $\hat{y}$ 方向上场的变化周期将很多。

当 k_z 为虚数时，波在传播方向上按指数规律衰减出现截止。对某一 TE_{mn} 模，截止空间频率为

$$k_{cmn} = \sqrt{(m\pi/a)^2} + \sqrt{(n\pi/b)^2} \tag{1.7.34}$$

最低阶的 TE 模为 TE_{10}，其中，$k_{c10} = \pi/a = 1/2a\mathrm{K}_o$ 是矩形波导中的基模。例如设 $a = 2\mathrm{cm}$，$b = 1\mathrm{cm}$，则 TE_{10} 的截止空间频率为 $k_{c10} = 25\mathrm{K}_o$ 截止时间频率为 $f = 7.5\mathrm{GHz}$。

注意，对于 TE_{00} 模，$k_x = k_y = 0$ 且 $k_{c10} = 0$。其截止频率为零。我们将证明这不是导行模式。由(1.7.30)得

$$H_z = H_0 \cos(k_z z - \omega t)$$

由于，$k_z = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ 式(1.7.23)和(1.7.24)将无助于推导横截场分量。由(1.7.22)可得

$$k_z H_0 \cos(k_z z - \omega t) = 0 \tag{1.7.35}$$

因此 $k = k_z = 0$，在 $\hat{z}$ 方向上只有静电场存在。

例 1.7.4 波导中的 TM 模。

对 TM 场，所有磁场都在与传播方向 $\hat{z}$ 正交的方向上。由于有 $H_z = 0$ 因此所有场量都可以由惟一的径向分量 E_z 推导出来。可以写为

$$E_z = E_0 \sin k_x x \sin k_y y \cos(k_z z - \omega t) \tag{1.7.36}$$

求得所有的场分量

$$E_x = \frac{-k_x k_z}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2} E_0 \cos k_x x \cos k_y y \sin(k_z z - \omega t) \tag{1.7.37}$$

$$E_y = \frac{-k_y k_z}{\omega^2 \mu\varepsilon - k_z^2} E_0 \sin k_x x \cos k_y y \sin(k_z z - \omega t) \qquad (1.7.38)$$

$$E_z = E_0 \sin k_x x \sin k_y y \cos(k_z z - \omega t) \qquad (1.7.39)$$

$$H_x = \frac{-\omega\pi k_y}{\omega^2 \mu\varepsilon - k_z^2} E_0 \sin k_x x \cos k_y y \sin(k_z z - \omega t) \qquad (1.7.40)$$

$$H_y = \frac{\omega\mu k_x}{\omega^2 \mu\varepsilon - k_z^2} E_0 \cos k_x x \sin k_y y \sin(k_z z - \omega t) \qquad (1.7.41)$$

$$H_z = 0$$

色散关系与(1.7.32)式相同。由上式可见在 $x=0$ 和 a 处 E_z 和 E_y 趋于 0,在 $y=0$ 和 b 处,E_z 和 E_x 趋于 0,另外还有

$$k_x a = m\pi \qquad (1.7.42)$$

$$k_y b = n\pi \qquad (1.7.43)$$

这是与(1.7.31)等同的导引条件。传播常数与(1.7.33)相同,还可以看出对 TM_{mn}模,某截止波数 k_c 与(1.7.34)式相同。然而 TE 模和 TM 模有本质上的区别。我们注意到对 TM_{mn}模,其 m 和 n 都不能为 0。而对 TE_{mn}模 m 和 n 可以分别为 0。最低阶的 TM 模为 TM_{11}模。例如,设 $a=3\text{cm}$, $b=1.5\text{cm}$,我们要求 TM_{11}模的截止波数为 $k_{c11}=234\text{m}^{-1}=37.3\text{K}_o$。

例 1.7.5 矩形波导中的功率。

对 TE 波有

$$E_z = 0 \qquad (1.7.44)$$

$$H_y = H_0 \cos k_x x \cos k_y y \cos(k^z z - \omega t) \qquad (1.7.45)$$

$$E_x = \frac{-\mu}{\omega^2 \mu\varepsilon - k_z^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial t} H_z\right) \qquad (1.7.46a)$$

$$E_y = \frac{\mu}{\omega^2 \mu\varepsilon - k_z^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} H_z\right) \qquad (1.7.46b)$$

$$H_x = \frac{1}{\omega^2 \mu\varepsilon - k_z^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} H_z\right) \qquad (1.7.47a)$$

$$H_y = \frac{1}{\omega^2 \mu\varepsilon - k_z^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} H_z\right) \qquad (1.7.47b)$$

坡印廷功率密度为

$$\boldsymbol{S} = \hat{z}\langle E_x H_y - E_y H_x \rangle + \hat{y} E_z H_x - \hat{x} E_z H_y$$

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \hat{z}\langle E_x H_y - E_y H_x \rangle = \hat{z}\,\frac{\omega\varepsilon k_z k_y^2}{(\omega^2 \mu\varepsilon - k_z^2)}(H_0 \cos k_x x \cos k_y y)^2$$

对 TM 模,有

$$H_z = 0 \qquad (1.7.48a)$$

$$E_z = E_0 \sin k_x x \sin k_y y \cos(k z_z - \omega t) \qquad (1.7.48b)$$

$$E_x = \frac{1}{\omega^2 \mu\varepsilon - k_z^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} E_z\right) \qquad (1.7.49a)$$

$$E_y = \frac{1}{\omega^2 \mu\varepsilon - k_z^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} H_z\right) \qquad (1.7.49b)$$

$$H_x = \frac{\varepsilon}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial t}E_z\right) \tag{1.7.50a}$$

$$H_y = \frac{-\varepsilon}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}E_z\right) \tag{1.7.50b}$$

平时平均的坡印廷功率密度为

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \hat{z}\langle E_x H_y - E_y H_x \rangle = \hat{z}\ \frac{\omega\mu k_z k_y^2}{(\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2)}(E_0 \sin k_x x \sin k_y y)^2$$

因此，无论对 TE 模还是 TM 模，波的功率都是沿 z 方向传播的。当 $k < k_{cmn}$，$k_z = \mathrm{i}k_{zI}$时，波导中的模为凋落模。对 TE 模

$$H_z = H_0 \cos k_x x \cos k_y y \mathrm{e}^{-k_{zI}z}\cos\omega t \tag{1.7.51}$$

对 TM 模

$$E_z = E_0 \sin k_x x \sin k_y y \mathrm{e}^{-k_{zI}z}\cos\omega t \tag{1.7.52}$$

这时无论是 TE 模还是 TM 模，其平时平均的坡印廷功率密度均为 0。

1.7.3　矩形谐振腔

一个在 $\hat{z}$ 方向上横截面相等的谐振腔可以被看为一两端封闭了的波导。其中的波不是沿 z 方向向前传播面是在 $\hat{z}$ 方向上形成了驻波。一个驻波是由一向 $+\hat{z}$ 方向传播的行波和一向 $-\hat{z}$ 方向传播的行波叠加而成。分析波导时使用的公式也可以用来分析谐振腔。

考虑一个如图 1.7-6 所示的矩形谐振腔。它是一个在 $z=0$ 和 $z=d$ 两端用金属板封闭的波导。

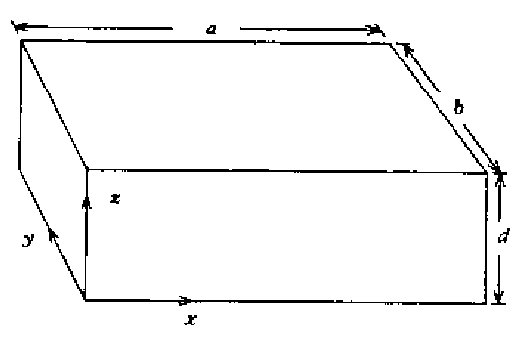


图 1.7-6　矩形谐振腔

对 TM 模求得，

$$E_z = E_0 \sin k x_x \sin k_y y \cos k_z z \cos\omega t \tag{1.7.53a}$$

$$E_x = \frac{-k_x k_z}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}E_0 \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \cos\omega t \tag{1.7.53b}$$

$$E_y = \frac{-k_y k_z}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}E_0 \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \cos\omega t \tag{1.7.53c}$$

$$H_x = \frac{\omega\varepsilon k_y}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}E_0 \sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z \sin\omega t \tag{1.7.53d}$$

$$H_y = \frac{\omega\varepsilon k_x}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}E_0 \cos k_x x \sin k_y y \cos k_z z \sin\omega t \tag{1.7.53e}$$

对 TE 模求得，

$$H_z = H_0\cos k_x x\cos k_y y\sin k_z z\cos\omega t \tag{1.7.54a}$$

$$H_x = \frac{-k_x k_z}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}H_0\sin k_x x\cos k_y y\cos k_z z\cos\omega t \tag{1.7.54b}$$

$$H_y = \frac{-k_y k_z}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}H_0\cos k_x x\sin k_y y\cos k_z z\cos\omega t \tag{1.7.54c}$$

$$E_x = \frac{-\omega\mu k_y}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}H_0\cos k_x x\sin k_y y\sin k_z z\sin\omega t \tag{1.7.54d}$$

$$E_y = \frac{\omega\mu k_x}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}H_0\sin k_x x\cos k_y y\sin k_z z\sin\omega t \tag{1.7.54e}$$

为满足边界条件，有

$$k_x a = m\pi \tag{1.7.55a}$$

$$k_y b = n\pi \tag{1.7.55b}$$

$$k_z d = p\pi \tag{1.7.55c}$$

它们被称为谐振腔的谐振条件。

对 TE 和 TM 模的色散关系为

$$k_r^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2 + (p\pi/d)^2$$

它给出了谐振状态下的空间频率或波数 $k_r = \omega_r(\mu\varepsilon)^{1/2}$。$TM_{mnp}$ 模和 TE_{mnp} 模的谐振空间频率相等。有趣的现象是 TM_{mn0} 模与波导中的截止模相对应，其 $k_z = 0$。

当谐振腔的尺寸 $a > b > d$，最低阶模 $m = n = 1$ 和 $p = 0$ 的谐振空间频率可求得为

$$k_r = \sqrt{(\pi/a)^2 + \pi/b)^2} \tag{1.7.56}$$

腔内的模为 TM_{110}。TM_{110} 模的各场分量为

$$E_z = E_0\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\cos\omega t \tag{1.7.57a}$$

$$H_x = \frac{n\pi}{\omega\mu b}E_0\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\omega t \tag{1.7.57b}$$

$$H_y = \frac{m\pi}{\omega\mu a}E_0\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\omega t \tag{1.7.57c}$$

场的分布示于图 1.7-7。可以看到在 $z = 0$ 和 $z = d$ 处电场的方向与上下板垂直，并集中于腔的中心部位，这样就使得其在 $x = 0, a$ 和 $y = 0, b$ 处的切向分量为 0。举例而言，如设 $a = 4$cm，$b = 3$cm及 $d = 2$cm，可求得对 TM_{110} 模的谐振空间频率为 $k_r = 21K_o$。

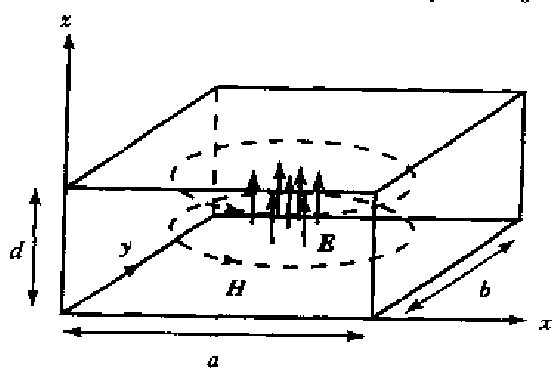


图 1.7-7 矩形谐振腔中的 TM_{110} 模

例1.7.6 从数学的角度而言，形如(1.7.24c)的亥姆霍兹方程可以通过分离变量法求解。在分离变量法中，设

$$H_z(x,y,t)=X(x)Y(y)Z(z)T(t)$$

代入波动方程中，得到

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}+\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}+\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}-\mu\varepsilon\frac{1}{T(t)}\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}=0$$

然后再设

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\mathrm{d}^2 X(x)}{\mathrm{d}x^2}=-k_x^2$$

$$\frac{1}{Y(y)}\frac{\mathrm{d}^2 Y(y)}{\mathrm{d}y^2}=-k_y^2$$

$$\frac{1}{Z(z)}\frac{\mathrm{d}^2 Z(z)}{\mathrm{d}x^2}=-k_z^2$$

$$\frac{1}{T(t)}\frac{\mathrm{d}^2 T(t)}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2$$

其中 k_x,k_y,k_z 和 ω 由下式相互联系的是分离参数

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=\omega^2\mu\varepsilon$$

对上面四个常微分方程，每个都对应两个独立的解。但是在所有16项中，由于物理概念和边界条件的限制，许多项都不存在。例如，

$$\cos k_x x\cos\omega t+\sin k_x x\sin\omega t=\cos(k_x x-\omega t)$$

代表沿 $\hat{x}$ 方向传播的平面，还有

$$\cos k_x x\cos k_z z\cos\omega t+\cos k_x x\sin k_z z\sin\omega t=\cos k_x x\cos(k_z z-\omega t)$$

是平行板波导中沿 $\hat{z}$ 方向上的驻波。如果分离参数中的一个已知，比如 $k_z=\mathrm{i}k_{zI}$，则其两个独立的解就为 $\cosh k_z z$ 和 $\sinh k_z z$ 或 $\mathrm{e}^{k_{zI}z}$ 和 $\mathrm{e}^{-k_{zI}z}$，它们表示沿 z 方向上的增长波和衰减波。

习题

1.7.1 考虑一个如图1.7-8所示的在 $z>0$ 处填充介质的理想导体平板波导。填充介质的介电常数为 ε_1。工作频率为 $30/(2\pi)$GHz。导行的波沿 $\hat{z}$ 方向传播。

(1) 设 $d=2\sqrt{3}\pi$cm，且波导中没有填充介质 $\varepsilon_1=\varepsilon_0$ 时的情况，什么样的 TE_m 和 TM_m 模可以在其中传播？

(2) 在没有填充介质时，求 TM_2 模的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 场表达式。

(3) 在没有填充介质时，对这一工作频率，TM_2 模的相速和群速是多少？

(4) 设 $\varepsilon_1>3\varepsilon_0$，$d=2\sqrt{3}\pi$cm。对沿 $+\hat{z}$ 方向传播的波，当 m 为何值时，TM_m 模的波将在介质边界处完全反射回来？为什么？

(5) 当 m 为何值时，TM_m 模的波将得到完全透射(无反射)？

1.7.2 在隧道中行驶的一辆汽车上的调幅无线电收音机无法收到任何信号。假设这个遂道就是1939年建造的，位于纽约豪森河下面的林肯隧道。它的截面如图1.7-9所示。在进行分析时，可忽略隧道中的排气管道，假设其关闭。由此建立一个 6.55m×4.19m 的矩形波导模型。

(1) 给出波导中可传播的主模 TE_{10} 模的频率范围。

(2) 解释为什么在隧道中不能接收到AM信号。

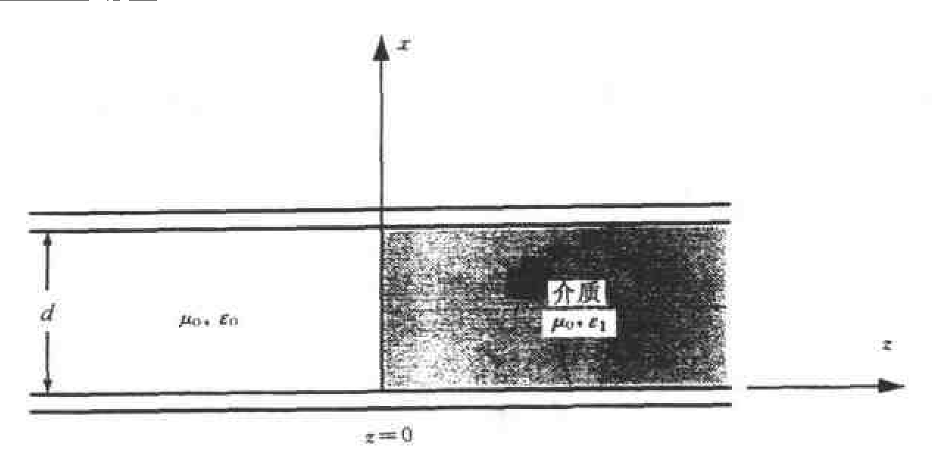


图 1.7-8 平板波导

废气管道
4.19m
6.55m
新鲜空气管道

图 1.7-9 隧道波导模型

(3) 是否能接收到 FM 信号，高于什么频率才可以接收。

1.7.3 考虑一个中间填充空气，并工作在 $f = 7.5\text{GHz}(k = 50\pi\text{m}^{-1})$ 的金属矩形波导，如图 1.7-10 所示其尺寸为 $a = 3\text{cm}, b < a$。

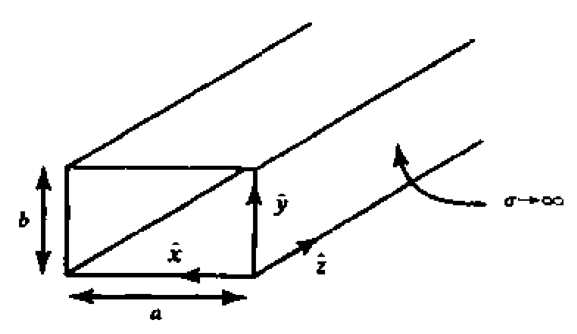


图 1.7-10 金属矩形波导

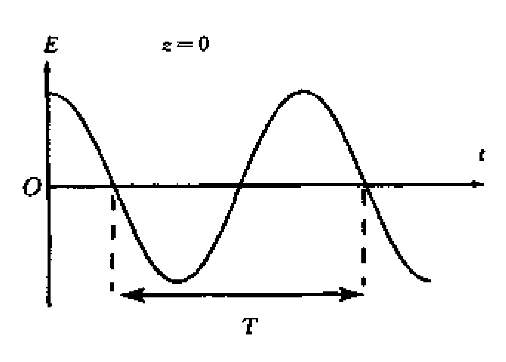
(1) 对主模(TE_{10}模)确定：① 截止频率；② 传播常数 k_z；③相速。

(2) 考虑一工作在 $f = 7.5\text{GHz}(k = 50\pi\text{m}^{-1})$ 的传播模式。其在 $z = 0$ 和 $z = 1\text{cm}$ 处 E 与时间的关系由图 1.7-11 示出。

① 确定周期 T。② 计算相速。③ 证明 $kz = 30\pi\text{m}^{-1}$。④ 求波导中传播的模(即 TE_{mn} 或 TM_{mn})中角标 m 和 n。⑤ 计算用 cm 表示的 b。

1.7.4

(1) 一空气填充的矩形波导的尺寸为 2cm × 4cm。列出频率为 15GHz 时所有可在其传播的模式，并求出它们相应的截止频率。



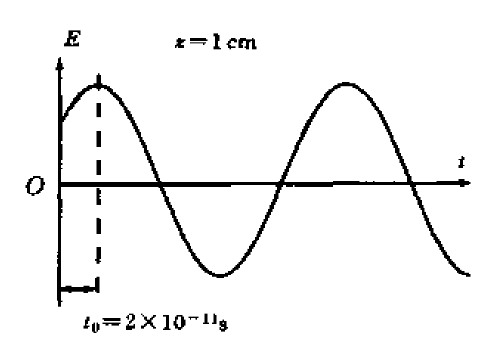


图 1.7-11 作为时间函数的电场

(2) 波导壁上可以开窄槽且不会显著影响其中传播的波,但是所开的槽不应切断波导壁上的电流,即应与电流方向平行。比如在波导顶部中心沿 $\hat{z}$ 方向的槽(见图 1.7-12)将不会显著影响 TE_{10} 和 TE_{30} 模,或其他模。对下面波导模确定不显著影响传播模的所有开槽位置与方向。① TE_{10},② TE_{11},③ TM_{21}。

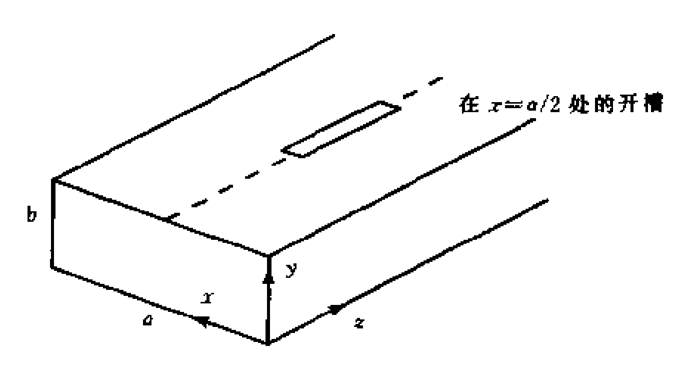


图 1.7-12 开槽波导

1.7.5 一金属矩形波导的尺寸为 1.5cm × 0.75cm,

(1) 确定前 5 个模的截止频率。

(2) 写出 TM_{11} 模的电场与磁场的表达式。

(3) 画出 x-y 截面上电场的分布图。

(4) 将波导在 $z=0$ 和 $z=3$cm 处截断并封闭,TM_{11} 模将变为主谐振场 TM_{110},求谐振频率。

(5) 如果谐振腔的前壁($z=0$ 处)或后壁($z=3$cm 处)的中心部位有一点向内凹,TM_{110} 模的谐振频率将会升高还是降低。

1.7.6 考虑一个两端由金属管截断得到的长度为 d 的同轴线谐振腔,如图 1.7-13 所示。

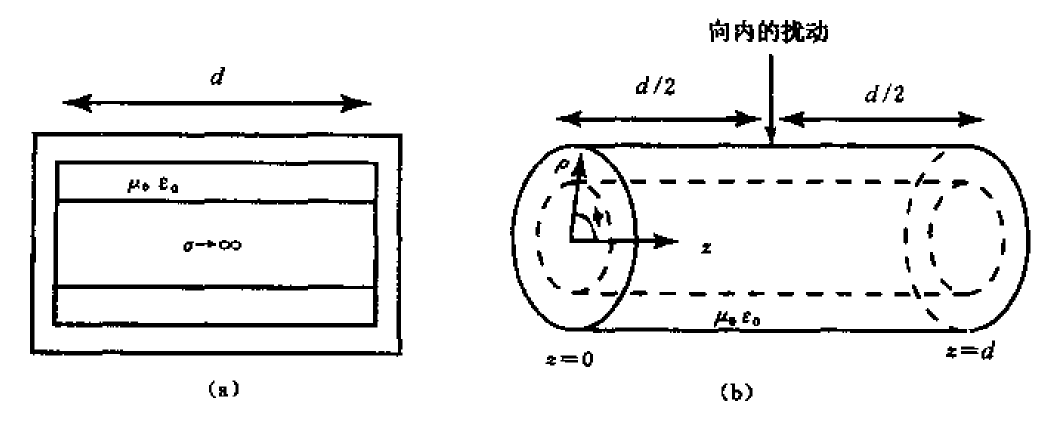


图 1.7-13 同轴线谐振腔

(1) 求 TEM 模的电场和磁场表达式。提示:无限长同轴线中的 TEM 波沿 $+z$ 方向传播,其电场与磁场为

$$E_\rho=\frac{E_0}{\rho}\cos(kz-\omega t),\ H_\phi=\frac{E_0}{\eta\rho}\cos(kz-\omega t)$$

(2) 设 $d=10\text{cm}$。求非零的最低谐振频率(其对应的模为 TEM_1)。

(3) 绘出 TEM_2 模的电场与磁场的幅度随 z 变化的曲线。

(4) 假设谐振腔中已经激励起 TEM_2 模,且由于在其中部($z=d/2$)加入了一个完全导体的螺钉使其受到干扰,如图 1.7-13b 所示,其谐振频率将会升高还是降低?

1.7.7 考虑一个同轴线,其内导体的半径为 a,外导体的半径为 b,且 $b=a+\delta\simeq a$,δ 为一个非常小的数,如图 1.7-14 所示。已知这样的同轴线可以传播 TEM 波且没有截止频率。问题是什么时候会出现高阶模且它们对应的截止频率是什么。严格的求解需要引入贝塞尔(Bessel)函数和纽曼(Neumann)函数。然而,当考虑到 $a\simeq b$ 时,可以将两导体中间的空间假设为平板传输线时的情况从而得到非常精确的解。注意为了近似这一同轴线,场在 $x=2\pi a\simeq 2\pi b$ 和 $x=0$ 处必须相等。

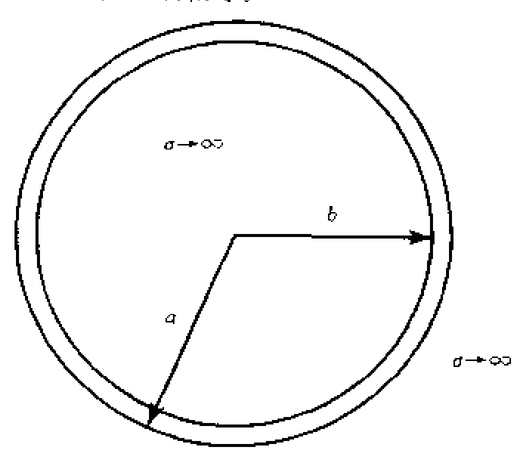


图 1.7-14 同轴线

(1) 按截止频率增加的顺序和矩形波导中的模式约定陈述前 3 个模式。

(2) 确定它们的截止频率。

1.7.8 一个矩形谐振腔 $1\text{cm}\times 2\text{cm}\times 3\text{cm}$ 中填充了介电常数为 $4\epsilon_0$,磁导率为 μ_0 的介质。

(1) 列出最低的四个谐振频率并写出模式名称(TE_{mnp},TM_{mnp})。

(2) 如图 1.7-15 绘出的谐振频率 ω_0 是多少?模式名称(TE_{mnp},TM_{mnp})是什么?

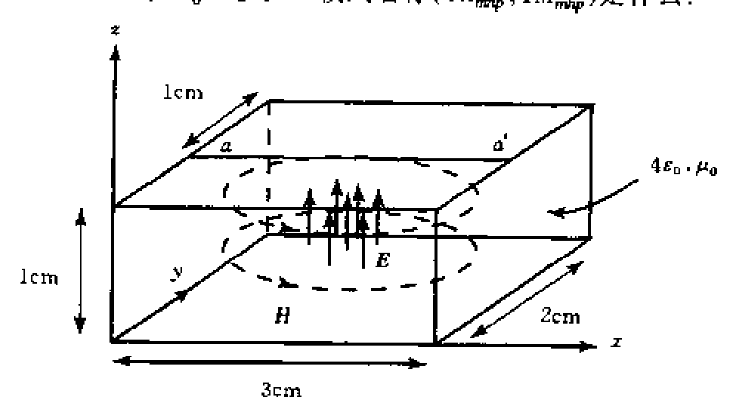


图 1.7-15 矩形谐振腔

(3) 如想用一个圆头的锤子敲打谐振腔以微调其谐振频率。指出大概在腔体的什么区域敲击将会使频率升高,又在什么区域敲击将会使频率降低。准确计算在 aa' 连线上两区域的分界点,即对最低的模式敲击将不会影响谐振频率。

1.7.9 如谐振腔中填充了导电介质,将会产生损耗。由于谐振条件约束了 k_x,k_y 和 k_z 的值,腔中的场将随时间衰减。TM_{110}模的场分量如下

$$E_z=\mu_0 A\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}(\omega_R\cos\omega_R t-\omega_I\sin\omega_R t)e^{-\omega_I t}$$

$$H_x=-\frac{n\pi}{b}A\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\omega_R t e^{-\omega_I t}$$

$$H_y = \frac{m\pi}{a}A\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\omega_R t e^{-\omega_I t}$$

确定随时间的衰减率，并求 ω_R 比无耗谐振腔改变了多少。

1.8 本构关系

麦克斯韦方程组是自由空间和介质空间中电磁场的基本定律。

$$\nabla\times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.8.1}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{1.8.2}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \rho(\boldsymbol{r},t) \tag{1.8.3}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{1.8.4}$$

对(1.8.1)式取散度，并引入(1.8.3)得到

$$\nabla\times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{1.8.5}$$

这是关于电荷与电流密度的守恒定律。将式(1.8.5)作为基本方程，可以由对式(1.8.1)取散度推导出式(1.8.3)。式(1.8.4)同样可以由对式(1.8.2)取散度得到。对式(1.8.2)取散度得到$\partial[\nabla\cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)]/\partial t = 0$，或解释为$\nabla\cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$是独立于时间的常数。这样的一个常数，如果不等于零，将表示磁荷的存在，其与自由电荷相似。由于至今未发现磁单极子的存在，这一常数将为零。这样就得到了(1.8.4)式。

到此为止未曾涉及与其他物理学科相关的不同介质的特性，如等离子体物理，连续力学，固体物理，流体物理，统计物理，热力学，生物物理等。所有这些学科都与电磁场理论有这样或那样的联系。现在已经到了讲述我们将如何讨论这一巨大的“外部”世界的时候了。从电磁波的观点来看，关心的是当有介质存在时电磁场如何响应，波是否会发生反射、折射或散射，介质如何变化，波是否会移动或变形则只是第二位的。因此我们将物质介质抽象为所谓的本构关系，以描述各种不同特性的介质。

从下面的数学表达式就可以看出为麦克斯韦方程组引入本构关系的必要性。在大多数情况下都假设产生电磁场的源是已知的，因此 $\boldsymbol{J}$ 和 ρ 是已知的，且其满足如式(1.8.5)的守恒定律。现在考察一下麦克斯韦方程组，看其方程数是否足够以用来求解其中的未知变量。4 个矢量 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H},\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 共有 12 个标量。如前述(1.8.3)式和(1.8.4)式不是相互独立的方程，它们可以由式(1.8.1)，(1.8.2)和(1.8.5)推导出来。真正独立的方程是式(1.8.1)和式(1.8.2)，其可以分解为 6 个标量方程，因此还需要 6 个方程。其就是本构关系。

各向同性介质中的本构关系可直接写为

$$\boldsymbol{D} = \epsilon\boldsymbol{E} \quad \text{其中 } \epsilon \text{ 为介电常数} \tag{1.8.6a}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H} \quad \text{其中 } \mu \text{ 为磁导率} \tag{1.8.6b}$$

这里各向同性意味着场矢量 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 平行，$\boldsymbol{H}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 平行。在没有任何物质存在的自由空间中，$\mu = \mu_o$ 且 $\epsilon = \epsilon_o$，

$$\mu_o = 4\pi\times 10^{-7}\text{H/m}$$

$$\epsilon_o \approx 8.85\times 10^{-12}\text{F/m}$$

在物质介质中，介电常数 ϵ 取决于介质的电特性，而磁导率 μ 取决于介质的磁特性。

一个电介质介质可以被描述成由一个自由空间部分和一个介质部分组成。其介质部分可由一个极化矢量 $\boldsymbol{P}$ 来描述，比如

$$\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E}=\epsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P} \tag{1.8.7}$$

这个极化矢量体现了介质介质每单位体积中的电偶极矩。当有外电场存在时，这个极化矢量可能是由感应电偶极矩，介质中一致取向的固有偶极矩或离子移动产生的。

一个磁介质介质也可以被描述成由一个自由空间部分和一个磁化矢量 $\boldsymbol{M}$ 部分组成，即

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}=\mu_0\boldsymbol{H}+\mu_0\boldsymbol{M} \tag{1.8.8}$$

当介质 $\mu<\mu_0$ 称为抗磁介质，当 $\mu>\mu_0$ 称为顺磁介质。抗磁性是由于在物质内部产生了与外加磁场方向相反的感应磁矩。顺磁性则是同向磁矩的作用。当被放置于一个非均匀的磁场中时，抗磁介质将有向磁场较弱的地方移动的倾向；而顺磁介质将有向磁场较强的地方移动的倾向。铁磁性和反铁磁性都是高度非线性的效应。铁磁性物质在居里温度以下具有自然磁性。其性质同时也取决于曾给施加于其上的磁场，在大多数情况下，其磁化曲线形成一个磁滞回线。在反铁磁性物质中，在尼尔(Neel)温度以下由自旋产生的次级晶格将在不平行排列的状态中呈自发的磁化。

导电介质的特性则遵循欧姆定律，

$$\boldsymbol{J}_c=\sigma\boldsymbol{E} \tag{1.8.9}$$

其将传导电流 $\boldsymbol{J}_c$ 和电场强度 $\boldsymbol{E}$ 通过电导率 σ 联系了起来。

1.8.1 各向异性和双向异性介质

各向异性介质中的本构关系通常写为

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E} \quad \text{其中 } \boldsymbol{\varepsilon} \text{ 为介电常数张量} \tag{1.8.10a}$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{H} \quad \text{其中 } \boldsymbol{\mu} \text{ 为磁导率张量} \tag{1.8.10b}$$

这里电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 不再与 $\boldsymbol{D}$ 平行，$\boldsymbol{H}$ 也不再与 $\boldsymbol{B}$ 平行。一个电各向异性的介质，其介电常数 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为张量，磁导率 $\boldsymbol{\mu}$ 为标量；而一个磁各向异性的介质，其磁导率 $\boldsymbol{\mu}$ 为张量，介电常数 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为标量。一个介质如果其 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$ 如式(1.8.10)所示，则它同时是电各向异性和磁各向异性的。

水晶通常由对称的介电常数张量表示。对于对称形式的矩阵，总存在一个坐标变换，可将其变换成一个对角线矩阵。在这个新的坐标系下，称为主系统

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon_x & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_y & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_z\end{bmatrix} \tag{1.8.11}$$

其中，三个坐标轴称为水晶体的主轴。对于立方水晶体，$\boldsymbol{\varepsilon}_x=\boldsymbol{\varepsilon}_y=\boldsymbol{\varepsilon}_z$ 呈现各向同性。对四边形、六边形和菱形水晶体，三个参数中总有两个相等。这样的水晶称为单轴晶体。这里有一个二维退化现象，其呈现各向异性的主轴称为光轴。对一个具有如下介电常数张量的单轴晶体

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_z\end{bmatrix} \tag{1.8.12}$$

其中，z 轴为其光轴。如果 $\varepsilon_z>\varepsilon$，称为正单轴晶体；如果 $\varepsilon_z<\varepsilon$，称为负单轴晶体。对正交晶系，单斜晶系以及三斜晶系，其所有晶轴方向上的介电常数都不相等。对 $\varepsilon_x\neq\varepsilon_y\neq\varepsilon_z$ 的介质，称其为双轴介质。

无论对各向同性或各向异性介质，本构关系将两个电场矢量以及两个磁场矢量通过一个标量或一个张量联系起来。将一介质放入电场，它将被极化；将其放入磁场，它将被磁化。一个双各向异性介质可以将电场和磁场交叉联系起来。双各向异性介质的本构关系可以写为

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{H} \tag{1.8.13a}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{H} \tag{1.8.13b}$$

当其置身于电场或磁场中时，双各向异性介质将同时被极化和磁化。

由 Landau 及 Lifshitz(1957 年)和 Dzyaloshinskii(1959 年)从理论上预言的磁电物质于 1960 年被 Astrov 通过实验在反铁磁物质氧化铬中发现。由 Dzyaloshinskii 提出的对氧化铬的本构关系具有如下形式。

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix}\cdot\boldsymbol{E} + \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & \xi_z \end{bmatrix}\cdot\boldsymbol{H} \tag{1.8.14a}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & \xi_z \end{bmatrix}\cdot\boldsymbol{E} + \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix}\cdot\boldsymbol{H} \tag{1.8.14b}$$

此后由 Indenbom(1960 年)和 Birss(1963 年)证明，有 58 种不同种类的磁性晶体都具有磁电效应。Rodo(1964 年)证明这种效应不仅限于反铁磁物质，铁磁性的镓铁氧化物也具有磁电效应。

1948 年，Tellegen 在电阻、电容和电感以及理想变压器之外，又引入了一种新的元器件称为回旋器，用以描述一个网络。为了实现他的新网络元件，Tellegen 想像了一种具有如下本构关系的物质

$$\boldsymbol{D} = \epsilon\boldsymbol{E} + \xi\boldsymbol{H} \tag{1.8.15a}$$

$$\boldsymbol{B} = \xi\boldsymbol{E} + \mu\boldsymbol{H} \tag{1.8.15b}$$

其中 $\xi^2/\mu\epsilon$ 接近等于 1。Tellegen 认为这一物质模型具有相互平行或交叉的永久性的电偶极子和磁偶极子元素，以至于当有电场施加于其上时，电场不但将电偶极子的方向顺化，同时也将磁偶极子的方向顺化。当有磁场施加于其上时，磁场不但将磁偶极子的方向顺化，同时也将电偶极子的方向顺化。Tellegen 还写出了本构关系的一般表达式(1.8.13)并用能量守恒定律检验了其对称性。

手征物质，包括许多种糖的溶液，氨基酸，DNA 等许多自然物质，都具有如下本构关系

$$\boldsymbol{D} = \epsilon\boldsymbol{E} - \chi\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{1.8.16a}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H} + \chi\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{1.8.16b}$$

其中，χ 是手征参数。可以用如同(1.8.15)和(1.8.16)式的本构关系来描述的物质是双各向同性介质。

人类在电磁理论研究中第一次对双各向异性介质产生关注，是针对运动中的介质。1888 年 Roentgen 发现在电场中移动的介质会被磁化。1905 年，Wilson 证明在均匀磁场中移动的介质会被电极化。几乎所遇的物质在运动中都会呈双各向异性。在第 7 章中，我们将用场矢量的洛伦兹变换来推导均匀运动介质的本构关系。

用相对论的观点来看，描述物质的双各向异性特征是非常重要的。相对论原理假定所有物理定律都可以用固定形式的数学方程来描述且不依赖观察者而变化。对电磁理论，麦克斯

韦方程组对任何观察者来说,尽管其场量的数值会依不同的观察者而不同,但是其形式都是不变的。本构关系如果用双各向异性方式写出其形式也是不变的。在第7章中将详细讲述狭义相对论和电磁波理论。

专题1.8.A 本构矩阵

用最为一般性的形式,本构关系可以写为,

$$c\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E} + \boldsymbol{L}\cdot c\boldsymbol{B} \tag{1.8.17a}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{E} + \boldsymbol{Q}\cdot c\boldsymbol{B} \tag{1.8.17b}$$

其中,$c = 3\times10^8 \mathrm{m/s}$ 为真空中的光速,$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q},\boldsymbol{L}$ 以及 $\boldsymbol{M}$ 都为 3×3 的矩阵。它们的元素称为本构参数。在本构关系的定义中,本构矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 将电场和磁场联系起来。当 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 不同时为零时,此物质就为双各向异性的。当电场和磁场之间没有耦合,即 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{M}=0$ 时,此物质就为各向异性的。对一个各向异性物质,如果 $\boldsymbol{P}=c\epsilon\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{Q}=(1/c\mu)\boldsymbol{I}$,其中 $\boldsymbol{I}$ 为 3×3 的单位矩阵,此物质就为各向同性的。我们将本构关系写成现在这种形式的原因是基于相对论的考虑。首先,场 $\boldsymbol{E}$ 和 $c\boldsymbol{B}$,以及 $c\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都可以在四维空间中组成一个单一张量。其次,如式(1.8.17)所示的本构关系是洛伦茨协变的。这些内容将在第7章中讲述。

方程(1.8.17)可以改写为

$$\begin{bmatrix} c\boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{H} \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}\cdot\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ c\boldsymbol{B} \end{bmatrix} \tag{1.8.18a}$$

其中,$\boldsymbol{C}$ 为一个 6×6 的本构矩阵

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P} & \boldsymbol{L} \\ \boldsymbol{M} & \boldsymbol{Q} \end{bmatrix} \tag{1.8.18b}$$

其量纲为导纳。

本构矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可以是时空坐标的函数,也可以是热力学和连续力学变量的函数或电磁场强度的函数。根据 $\boldsymbol{C}$ 的泛函的依赖性,可以将众多物质分为下面几个种类。①非均匀介质,其 $\boldsymbol{C}$ 是空间坐标的函数。②非稳定介质,其 $\boldsymbol{C}$ 是时间的函数。③时间耗散介质,其 $\boldsymbol{C}$ 是时间微分的函数。④空间耗散介质,其 $\boldsymbol{C}$ 是空间微分的函数。⑤非线性介质,其 $\boldsymbol{C}$ 是电磁场强度的函数。在一般情况下,$\boldsymbol{C}$ 可能是一个积分-微分算子的函数,且与其他物理分支学科的泛函方程相耦合。

我们通过将 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 用 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 来表示定义了本构关系。也可以将本构关系表示 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的函数形式:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}_{EH}\cdot\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{H} \end{bmatrix} \tag{1.8.19a}$$

参看(1.8.13)和(1.8.17),

$$\boldsymbol{C}_{EH} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon} & \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\zeta} & \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} \boldsymbol{P}-\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{Q}^{-1}\cdot\boldsymbol{M} & \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{Q}^{-1} \\ -\boldsymbol{Q}^{-1}\cdot\boldsymbol{M} & \boldsymbol{Q}^{-1} \end{bmatrix} \tag{1.8.19b}$$

这里 $\boldsymbol{C}_{EH}$ 为用 $\boldsymbol{EH}$ 表示的本构矩阵。如用 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 来描述 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$,有

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{H} \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}_{DB}\cdot\begin{bmatrix} \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \tag{1.8.20a}$$

其中

$$\boldsymbol{C}_{DB} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\kappa} & \boldsymbol{\chi} \\ \boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{\nu} \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} \boldsymbol{P}^{-1} & -\boldsymbol{P}^{-1}\cdot\boldsymbol{L} \\ \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{P}^{-1} & \boldsymbol{Q}-\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{P}^{-1}\cdot\boldsymbol{L} \end{bmatrix} \tag{1.8.20b}$$

这里 C_{DB}为用$\boldsymbol{DB}$表示的本构矩阵。其他结构形式的表示如用 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 来表示 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 在此不作叙述,因为后面不会用到这种形式。

我们可以证明对具有对称结构的 C_{EH}的线性双向异性介质,坡印廷定理变为

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{S}=-p \tag{1.8.21}$$

其中,

$$W=\frac{1}{2}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})=\text{总的存储能量密度} \tag{1.8.22}$$

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\text{坡印廷功率密度矢量} \tag{1.8.23}$$

$$-p=-\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}=\text{外部施加的功率密度} \tag{1.8.24}$$

这是描述能量守恒定律的一个一般形式。

练习 对线性,均匀,双各向异性且具有对称的本构矩阵 C_{EH}的介质,推导式(1.3.6)。

习题

1.8.1 本构关系 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E}$ 也可以表示为一个自由空间部分 $\varepsilon_o\boldsymbol{E}$ 和一个描述介质特性的极化矢量 $\boldsymbol{P}$。我们写出

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_o\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$$

对感应偶极矩的情况,极化矢量 $\boldsymbol{P}$ 正比于单位体积中的极化能力 $N\alpha$,其中 N 为单位体积中的偶极子的数量,α 为每一个偶极子的极化能力。

$$\boldsymbol{P}=N\alpha\boldsymbol{E}_{loc}$$

其中,本地电场 $\boldsymbol{E}_{loc}$是位于感应偶极子处的外加场和周围偶极子产生的场的和。在准静电场近似条件下,可以证明本地电场为

$$\boldsymbol{E}_{loc}=\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_o}$$

证明

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_o}=\frac{1+(2N\alpha/3\varepsilon_o)}{1-(N\alpha/3\varepsilon_o)}$$

这就是著名的 Clausius-Mossotti 或洛伦兹-洛伦茨公式。

1.8.2 与本构关系表达式 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E}=\varepsilon_o\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$ 相似,本构关系 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{H}$ 也可以表示为一个自由空间部分 $\mu_o\boldsymbol{H}$ 和一个磁化矢量 $\boldsymbol{M}$,形如

$$\boldsymbol{B}=\mu_o\boldsymbol{H}+\mu_o\boldsymbol{M}$$

注意,由于 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 具有相同的量纲,$\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 也具有相同的量纲。

对介质本身具有永久矩量的情况,其极化矢量 $\boldsymbol{P}$ 和磁化矢量 $\boldsymbol{M}$ 由 Langevin 经典公式给出,

$$L(x)=\coth x-\frac{1}{x}$$

对一个具有矩量 Nm 的顺磁物质,

$$M=NmL\left(\frac{mH}{kT}\right)$$

其中,$k=1.38\times10^{-23}$J/K 为玻耳兹曼常数,T 为用开尔文表示的绝对温度。证明在低场强的极限条件下,由于 $mH\ll kT$,介质是线性的。

1.8.3 对如下每一个本构关系,说明所给介质是否①各向同性/各向异性/双向异性,②线性/非线性,③空间/时间耗散,④均匀/非均匀。

(1) 胆固醇液晶可用具有如下本构关系的螺旋结构模型来描述，

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\epsilon(1+\delta\cos Kz) & \epsilon\delta\sin Kz & 0\\ \epsilon\delta\sin Kz & \epsilon(1-\delta\cos Kz) & 0\\ 0 & 0 & \epsilon_z\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{E}$$

其中螺旋方向是沿着 z 方向的。

(2) 在观察石英晶体的光学特征时发现其本构关系可由其现象表述为

$$E_j=k_{ij}D_i+\frac{1}{\mu_0\epsilon_0}G_{ij}\frac{\partial}{\partial t}B_i$$

$$H_j=\frac{1}{\mu_0}B_j-\frac{1}{\mu_0\epsilon_0}G_{ij}\frac{\partial}{\partial t}D_i$$

(3) 当对一载有电流的导体施加磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 时，将建立起一场 $\boldsymbol{E}$，称其为霍尔(Hall)效应。假设导体以正比于 $R\sigma\boldsymbol{E}$ 的平均速度 $\boldsymbol{v}$ 运动，具有霍尔效应的本构关系由下式给出，

$$\boldsymbol{J}=\sigma(\boldsymbol{E}+R\sigma\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}_0)$$

其中，σ 是电导率，R 是霍尔系数。对铜 $\sigma\approx6.7\times10^7\mathrm{S/m}$，$R\approx-5.5\times10^{-11}\mathrm{m^3/C}$。

(4) 自然光学活动现象可以由如下本构关系来解释(Landau 和 Lifshitz, 1957)

$$D_i=\epsilon_{ij}E_j+\gamma_{ijk}\frac{\partial E_j}{\partial x_k}$$

其中，ϵ_{ij}和 γ_{ijk}是频率的函数，且 $\gamma_{ijk}=-\gamma_{jik}$。

(5) 当对晶体加热时，可以观测到其热电现象。热电介质的本构关系可以表示为，

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}_0=\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{E}$$

其中，$\boldsymbol{D}_0$ 是一个即使没有外加场也存在的自发项。

(6) 当对其施加机械压力时，能够出现感应偶极矩现象的晶体称为压电晶体。一个压电介质的特性由压电张量 $\gamma_{i,kl}=\gamma_{i,lk}$描述如下

$$D_i=D_{0i}+\epsilon_{ik}E_k+\gamma_{i,kl}s_{kl}$$

其中，s_{kl}是电场中的二阶压力张量。所有热电介质也是压电介质。

(7) 一个各向同性介质在电场中会呈现 Kerr 效应。这时介电常数可以写为

$$\epsilon_{ij}=\epsilon\delta_{ij}+\sigma E_iE_j$$

其中，ϵ 是未受到干扰时的介电常数。ϵ_{ij}的主轴与电场方向重合。

(8) 具有 Pockel 效应的光电介质，其本构关系可写为

$$D_i=\epsilon_{ij}E_j+\sigma_{ijk}E_jE_k$$

其中，$\sigma_{ijk}=\sigma_{jik}$是一个 i 和 j 对称的三阶张量，因此其有 18 个独立变量。

1.8.4 在弱磁场中的超导体的本构关系可以用第一 London 方程宏观地来描述，

$$\frac{\partial\boldsymbol{J}_{\text{sup}}}{\partial t}=\alpha\boldsymbol{E}$$

也可用第二 London 方程来描述

$$(\nabla\times\boldsymbol{J}_{\text{sup}})=-\alpha_1\boldsymbol{B}$$

其中，$\boldsymbol{J}_{\text{sup}}$为超导电流，$\alpha=n_sq^2/m$ 且有 $\alpha_1\simeq\alpha$，这里 n_s, m 和 q 分别表示数量密度，有效质量和应用充电的 Boson 流体模型所描述的 Cooper 对儿的超导电荷。

(1) 由第一 London 方程，用不带位移电流的静电场的麦克斯韦方程$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_{\text{sup}}$为 $\dot{\boldsymbol{B}}=\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ 推导一个方程。证明

$$\nabla^2\dot{\boldsymbol{B}}=\mu_0\alpha\dot{\boldsymbol{B}}$$

且推导出时变磁场穿透深度为$(\mu_0\alpha)^{-1/2}$。

(2) 由第二 London 方程$\nabla\times\boldsymbol{H}\boldsymbol{J}_{\text{sup}}$，为 $\boldsymbol{B}$ 推导一个方程，且证明静磁场的穿透深度为$(\mu_0\alpha_1)^{-1/2}$。因此对静电磁场，其电流和磁场都只局限于穿透深度量级的很薄的表层之中。由超导现象引起的静电场例外，其是

1933年通过实验发现的,即常说的 Meissner 效应。

1.9 边界条件

麦克斯韦方程组已由微分形式来表示。在其导数不连续处,需要提供边界条件或初始条件。其中边界条件可以由麦克斯韦方程的积分形式导出。场量 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B},\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 在边界处可以是不连续的,但一定是有限的。然而,电流和电荷密度 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{\rho}$ 有可能是无限的,如在理想导体的表面处,可以定义表面电流密度 $\boldsymbol{J}_s=\delta\boldsymbol{J}$ 为当 $\delta\rightarrow0$ 和 $\boldsymbol{J}\rightarrow\infty$ 时的 $\boldsymbol{J}_s$,并定义表面电荷密度 $\rho_s=\delta\rho$ 为当 $\delta\rightarrow0$ 和 $\rho\rightarrow\infty$ 时的 ρ_s。面电流密度的量纲为 A/m,面电荷密度的量纲为 $\mathrm{C/m^2}$。

对区域1和区域2之间的一个静止的边界,可令面法线矢量 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 由区域2指向区域1。边界条件如下:

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=0 \tag{1.9.1}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{J}_s \tag{1.9.2}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=0 \tag{1.9.3}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\rho_s \tag{1.9.4}$$

其中,下角标1和2分别表示区域1和2中的场量。从原理上讲,边界条件表明 $\boldsymbol{E}$ 在边界上的切向分量以及 $\boldsymbol{B}$ 在边界上的法向分量是连续的,而 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量在边界上的不连续恰好等于电流密度 $\boldsymbol{J}_s$,同样 $\boldsymbol{D}$ 的法向分量在边界上的不连续恰好等于电流密度 ρ_s。

专题1.9.A 边界条件的推导

我们首先考虑矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在一个由封闭面 S 包围的体积 V 上的积分,$\hat{s}$ 为表面法线矢量。下面公式将会很有用

$$\iiint \mathrm{d}V\,\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\oiint \mathrm{d}S\hat{s}\cdot\boldsymbol{A} \tag{1.9.5a}$$

$$\iiint \mathrm{d}V\,\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\oiint \mathrm{d}S\hat{s}\times\boldsymbol{A} \tag{1.9.5b}$$

其中,(1.9.5a)式是我们已经熟悉的高斯定理,它将矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度在体积 V 上的积分与其在包围面体积 V 的封闭面 S 上的面积分联系了起来。公式(1.9.5b)是由公式(1.9.5a)以及矢量恒等式 $\nabla\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=-\boldsymbol{C}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}$ 导出的,其中,$\boldsymbol{C}$ 是一个与位置无关的常矢理。将高斯定理(1.9.5a)应用到 $\nabla\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})$ 上,得到

$$-\boldsymbol{C}\cdot\iiint \mathrm{d}V\,\nabla\times\boldsymbol{A}=\oiint \mathrm{d}S\hat{s}\cdot\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{C}\cdot\oiint \mathrm{d}S\hat{s}\times\boldsymbol{A}$$

这就是式(1.9.5b)但两边同乘了 $\boldsymbol{C}$。令 $\boldsymbol{C}$ 为任意矢量,其结果就是(1.9.5b)。

现考虑一个将区域1和区域2分开的分界面(见图1.9-1),假设跨边界有一个扁圆盒子形的小体积。应用式(1.1.1)~(1.1.4)的积分在其上并应用式(1.9.5),得到

$$\oiint \mathrm{d}S\hat{s}\times\boldsymbol{E}+\iiint \mathrm{d}V\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}=0 \tag{1.9.6}$$

$$\oiint \mathrm{d}S\hat{s}\times\boldsymbol{H}-\iiint \mathrm{d}V\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}=\iiint \mathrm{d}V\boldsymbol{J} \tag{1.9.7}$$

$$\oiint \mathrm{d}S\hat{s}\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{1.9.8}$$

$$\oiint \mathrm{d}S\hat{s}\cdot\boldsymbol{D}=\iiint \mathrm{d}V\rho \tag{1.9.9}$$

这就是积分形式的麦克斯韦方程组,并可用其来推导固定的和移动的边界条件。

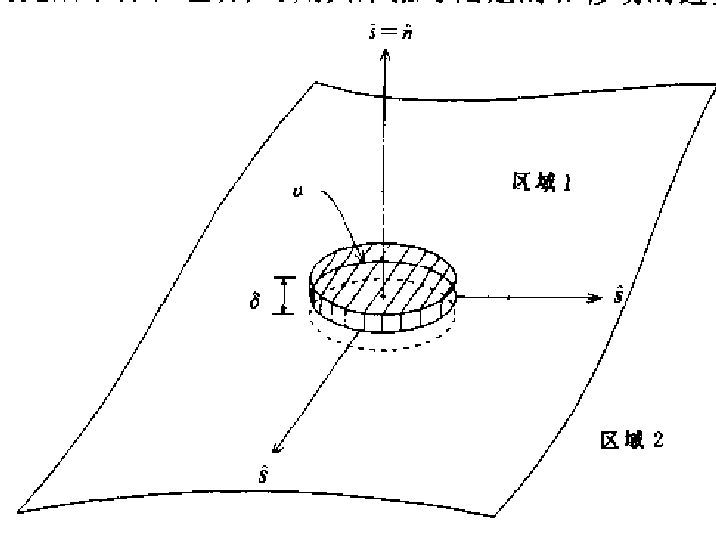


图 1.9-1　推导边界条件时用的扁形盒子

如果假设边界是固定的,则所有与时间有关的偏微分项$\partial/\partial t$都可以被移到积分符号之外。由于积分是对体积而言的,其结果自然只是时间的函数,这样偏微分项就可变为全微分。因此,对固定边界,积分形式的麦克斯韦方程组就为

$$\oiint \mathrm{d}S\hat{s}\times\boldsymbol{E}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint \mathrm{d}V\boldsymbol{B} \tag{1.9.10}$$

$$\oiint \mathrm{d}S\hat{s}\times\boldsymbol{H}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint \mathrm{d}V\boldsymbol{D}+\iiint \mathrm{d}V\boldsymbol{J} \tag{1.9.11}$$

$$\oiint \mathrm{d}S\hat{s}\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{1.9.12}$$

$$\oiint \mathrm{d}S\hat{s}\cdot\boldsymbol{D}=\iiint \mathrm{d}V\rho \tag{1.9.13}$$

现在令小扁圆盒子的带状厚度δ在上下底面积a趋于零之前首先趋于零,由此使得其体积也趋于零。现在具体讨论与δ同阶的无限小项。

场矢量$\boldsymbol{E},\boldsymbol{B},\boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{H}$被假设为有限,但是可以在边界处不连续。然而体电流密度和体电荷密度$\boldsymbol{J}$和$\boldsymbol{\rho}$可能是无限的,如在理想导体的表面处,可以定义表面电流密度$\boldsymbol{J}_s=\delta\boldsymbol{J}$为当$\delta\to0$和$J\to\infty$时的$\boldsymbol{J}_s$,并定义表面电荷密度$\rho_s=\delta\rho$为当$\delta\to0$和$\rho\to\infty$时的$\rho_s$。而电流密度的量纲为 A/m,而电荷密度的量纲为 C/m^2。

首先应注意在式(1.9.10)和(1.9.11)中由于时间微分项正比于δ可被忽略。这样就可以认为式(1.9.11)和式(1.9.13)的右边分别变为$\delta a\boldsymbol{J}$和$\delta a\rho$。如果$\boldsymbol{J}$和ρ是有限的,由于它们正比于δ,因此都会变为 0。当边界处有表面电流和表面电荷时,式(1.9.11)和式(1.9.13)的右边则会变为$a\boldsymbol{J}_s$和$a\rho_s$。因此可以得到所有包含$\hat{s}$的点积和叉积运算的面积分项都可变为沿$\hat{\boldsymbol{n}}$和$-\hat{\boldsymbol{n}}$两个方向上与面积a的乘积。将公式两边的a同时消去后,就式(1.9.10)~(1.9.13)得到了如式(1.9.1)~(1.9.4)所示的边界条件。

专题 1.9.B　移动边界的边界条件

式(1.9.1)~(1.9.4)所示为固定边界的边界条件。当边界移动时,不能再将式(1.9.6)和

(1.9.7)中的偏微分项移到积分号之外。为了推导移动边界的边界条件,令边界处的小扁圆盒子随边界移动。根据运动学定理,对一个以速度 $\boldsymbol{v}$ 移动的体积

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint \mathrm{d}V\boldsymbol{A} &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\iiint_{t+\Delta t}\mathrm{d}V\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\iiint_{t}\mathrm{d}V\boldsymbol{A}(t)\right\} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\left[\iiint_{t}\mathrm{d}V+\oiint \mathrm{d}S(\hat{s}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}\Delta t)\right]\left[\boldsymbol{A}(t)+\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\Delta t\right]-\iiint_{t}\mathrm{d}V\boldsymbol{A}(t)\right\} \\
&= \iiint \mathrm{d}V\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}+\oiint \mathrm{d}S(\hat{s}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{A} \qquad (1.9.14)
\end{aligned}
$$

其中,$\boldsymbol{A}$ 表示任意的场矢量。面积分是由于边界运动产生的,由此得到对移动边界。积分形式的麦克斯韦方程组变为

$$\oiint \mathrm{d}S[\hat{s}\times\boldsymbol{E}-(\hat{s}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{B}] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{V}\mathrm{d}V\boldsymbol{B} \qquad (1.9.15)$$

$$\oiint \mathrm{d}S[\hat{s}\times\boldsymbol{H}+(\hat{s}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{D}] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{V}\mathrm{d}V\boldsymbol{D}+\iiint_{V}\mathrm{d}V\boldsymbol{J} \qquad (1.9.16)$$

$$\oiint \mathrm{d}S(\hat{s}\cdot\boldsymbol{B}) = 0 \qquad (1.9.17)$$

$$\oiint \mathrm{d}S(\hat{s}\cdot\boldsymbol{D}) = \iiint \mathrm{d}V_{\rho} \qquad (1.9.18)$$

将小扁圆盒子的体积用与前面相同的方式缩小,与 δ 同阶的项将可以被忽略。这样得到边界条件

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)-(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=0 \qquad (1.9.19)$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)+(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\boldsymbol{J}_s \qquad (1.9.20)$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=0 \qquad (1.9.21)$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\rho_s \qquad (1.9.22)$$

当 $\boldsymbol{v}=0$ 时,它们将退化为式(1.9.1)~(1.9.4)。特别要注意的是,当 $\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}=0$ 时,它们同样可能退化为式(1.9.1)~(1.9.4)。因此,速度方向与边界平行时,其边界上的边界条件与固定边界上的边界条件相同。

习题

1.9.1 考虑在时刻 t 由一边界 C_1 包围的表面 S_1(见图 1.9-2)。令 $\boldsymbol{v}$ 为表面元 d$\boldsymbol{S}$ 移动的瞬时速度。表面 S_1 连同其边界 C_1 可能会随时间变化其形状,因此 $\boldsymbol{v}$ 对所有面积元不是常数,在时刻 $t+\Delta t$,S_1 和 C_1 变为 S_2 和 C_2(如图 1.9-2 所示)。

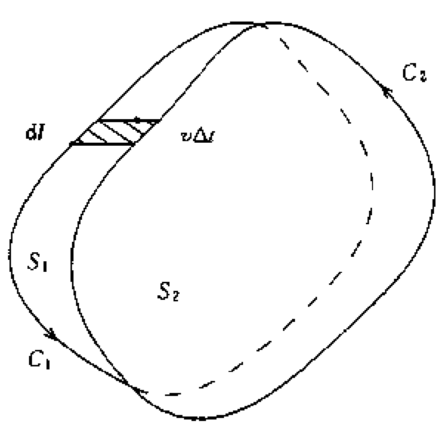


图 1.9-2 边界 C_1 包围的表面

(1) 应用散度定理于由 S_1, S_2 围成的体积和由 C_1, C_2 构成的微分条带的面积 $d\boldsymbol{l}\times \boldsymbol{v}\Delta t$

$$\iint_S (d\boldsymbol{S}\cdot \boldsymbol{v}\Delta t)(\nabla\cdot \boldsymbol{A}) = \iint_{S_2} d\boldsymbol{S}_2\cdot \boldsymbol{A} - \iint_{S_1} d\boldsymbol{S}_1\cdot \boldsymbol{A} + \oint_C (d\boldsymbol{l}\times \boldsymbol{v}\Delta t)\cdot \boldsymbol{A}$$

证明矢场 $\boldsymbol{A}$ 的面积分的全时间微分为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\iint_S d\boldsymbol{S}\cdot \boldsymbol{A} &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\iint_{S_2} d\boldsymbol{S}_2\cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t+\Delta t) - \iint_{S_1} d\boldsymbol{S}_1\cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)\right\}\\ &= \iint_S d\boldsymbol{S}\cdot \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) + \iint_S d\boldsymbol{S}\cdot \boldsymbol{v}\nabla\cdot \boldsymbol{A} - \oint_C (d\boldsymbol{l}\times \boldsymbol{v})\cdot \boldsymbol{A}\\ &= \iint_S d\boldsymbol{S}\cdot\left[\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \nabla\times(\boldsymbol{A}\times \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}\nabla\cdot \boldsymbol{A}\right]\end{aligned}$$

可见 $\boldsymbol{A}$ 在面积 S 上的通量率决定于三个过程。第一项为对一固定边界包围的面积中的 A 的时间变化率。第二项为由于边界 C 的移动产生的 $\boldsymbol{A}$ 在面积上的通量变化。最后一项的存在决定于是否表面 S 在产生 $\boldsymbol{A}$ 的源区域中移动。当可以确定 $\boldsymbol{A}$ 为感应磁场 $\boldsymbol{B}$ 时，最后一项将不存在。

(2) 将 $\boldsymbol{A}$ 用场矢量 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 代替，并应用法拉第和安培定律得到

$$\oint d\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times \boldsymbol{B}) = -\frac{d}{dt}\iint d\hat{\boldsymbol{S}}\cdot \boldsymbol{B}$$

$$\oint d\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{v}\times \boldsymbol{D}) = \frac{d}{dt}\iint d\hat{\boldsymbol{S}}\cdot \boldsymbol{D} + \iint d\hat{\boldsymbol{S}}\cdot(\boldsymbol{J} - \boldsymbol{v}\rho)$$

将这些积分应用于如图 1.1-17 所示中的带状区域。其随着边界移动而移动。确定区域 1 中 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{H}_1$ 之间的关系和区域 2 中 $\boldsymbol{E}_2$ 和 $\boldsymbol{H}_2$ 之间的关系。

1.9.2 在假设小扁圆盒子随边界移动的情况下，推导出了移动边界的边界条件。如果边界移动时小扁圆盒子不移动，则(1.9.15)和(1.9.16)式中的 $v=0$，这是由于 v 在定义时就是小扁圆盒子的移动速度。

$$\oiint d\hat{\boldsymbol{S}}\times \boldsymbol{E} = -\frac{d}{dt}\iiint_V dV\boldsymbol{B}$$

$$\oiint d\hat{\boldsymbol{S}}\times \boldsymbol{H} = \frac{d}{dt}\iiint_V dV\boldsymbol{D} + \iiint_V dV\boldsymbol{J}$$

如图 1.9-3 所示，边界表面由 t 时刻到 $t+\Delta t$ 时刻移动了距离 $v\Delta t$。证明对矢量场 $\boldsymbol{A}$，

$$\iiint_t dV\boldsymbol{A} = a\int_0^{\delta_0} dz\boldsymbol{A} + a\int_{\delta_0}^{\delta} dz\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_2 a\delta_0 + \boldsymbol{A}_1 a(\delta - \delta_0)$$

以及

$$\begin{aligned}\iiint_{t+\Delta t} dV\boldsymbol{A} &= a\int_0^{\delta_0+v\Delta t} dz\boldsymbol{A} + a\int_{\delta_0+v\Delta t}^{\delta} dz\boldsymbol{A}\\ &= \boldsymbol{A}_2 a(\delta_0 + v\Delta t) + \boldsymbol{A}_1 a(\delta - \delta_0 - v\Delta t)\end{aligned}$$

$$\iiint_{t+\Delta t} dV\boldsymbol{A} - \iiint_t dV\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_2 av\Delta t - \boldsymbol{A}_1 av\Delta t$$

其中，a 是小扁圆盒子上底或下底的面积，$\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 分别为区域 1 和区域 2 中的矢量场 $\boldsymbol{A}$，将 $\boldsymbol{A}$ 用 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 替换，确定区域 1 中 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{H}_1$ 之间的关系和区域 2 中 $\boldsymbol{E}_2$ 和 $\boldsymbol{H}_2$ 之间的关系。

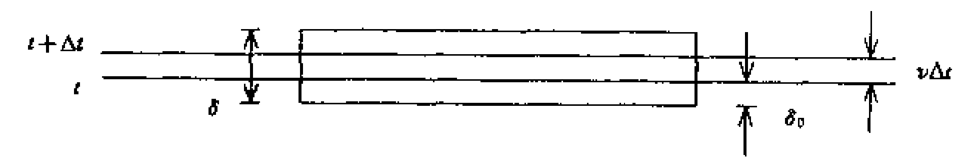


图 1.9-3 以速度 v 移动的边界

部分习题答案

1.1.1 对于安培定理中所有场分量，有

$$\frac{\partial}{\partial y}H_z - \frac{\partial}{\partial z}H_y = \frac{\partial}{\partial t}D_x + J_x \tag{1a}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}H_x - \frac{\partial}{\partial x}H_z = \frac{\partial}{\partial t}D_y + J_y \tag{1b}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}H_y - \frac{\partial}{\partial y}H_x = \frac{\partial}{\partial t}D_z + J_z \tag{1c}$$

对法拉第定理有

$$\frac{\partial}{\partial y}E_z - \frac{\partial}{\partial z}E_y = -\frac{\partial}{\partial t}B_x \tag{2a}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}E_x - \frac{\partial}{\partial x}E_z = -\frac{\partial}{\partial t}B_y \tag{2b}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}E_y - \frac{\partial}{\partial y}E_x = -\frac{\partial}{\partial t}B_z \tag{2c}$$

对库仑定理有

$$\frac{\partial}{\partial x}D_x + \frac{\partial}{\partial y}D_y + \frac{\partial}{\partial z}D_z = \rho \tag{3}$$

对高斯定理有

$$\frac{\partial}{\partial x}B_x + \frac{\partial}{\partial y}B_y + \frac{\partial}{\partial z}B_z = 0 \tag{4}$$

以及对连续定理有

$$\frac{\partial}{\partial x}J_x - \frac{\partial}{\partial y}J_y + \frac{\partial}{\partial z}J_z = -\frac{\partial}{\partial t}\rho \tag{5}$$

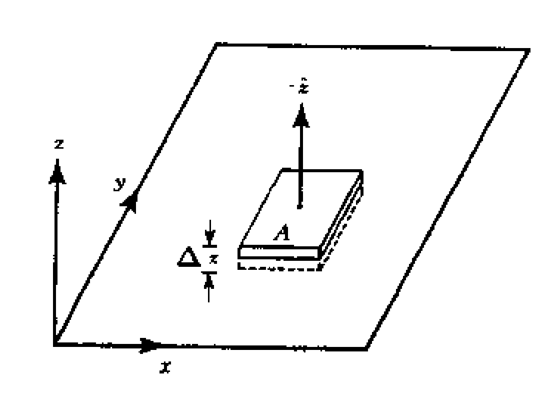
连续性方程(5)可由$\partial(1a)/\partial x$,$\partial(1b)/\partial y$以及$\partial(1c)/\partial z$三项之和,并应用式(3)导出。可以看出在确定了连续性定理之后,库仑定理可由安培定理导出。同样高斯定理可由法拉第定理导出。因此式(3)和(4)不是独立的标量方程,它们可由式(1)和(2)导出。

1.1.2 如果对$\nabla\times\boldsymbol{H}$的面积分是在一个封闭面上进行的,将不存在一个外部的廓线包围这个封闭面且积分值为零。

$$\oint\!\!\!\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H}) = 0 \tag{6}$$

这个标量关系公式不应该与前面在推导包围体积V的封闭面积分时得到的旋度定理(1.1.45)相混淆,旋度定理表述的是矢量关系。

1.1.3 我们在x-y平面的一个小扁盒子上应用旋度定理(见下图),其面积为A,厚度为无限小Δz。令$\Delta z\to 0$的速度比$A\to 0$的速度快,这样包含Δz的各项就可以被忽略。



$$\iiint dV\,\nabla\times\boldsymbol{H}\approx A\hat{z}\times(\boldsymbol{H}_{z>0}-\boldsymbol{H}_{z<0})$$

这一结果对推导麦克斯韦方程组的边界条件有用。对安培定理 $\Delta\times H=\partial\boldsymbol{D}/\partial t+\boldsymbol{J}$ 在小扁盒子上积分,有

$$A\hat{z}\times(\boldsymbol{H}_{z>0}-\boldsymbol{H}_{z<0})=A\Delta z\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+A\Delta z\boldsymbol{J}$$

上面等式右边第一项可以被忽略,因为 $\partial\boldsymbol{D}/\partial t$ 在物理上是有限的。然而,如果 $\boldsymbol{J}$ 在小扁盒子中是无限的,则 $\Delta z\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_s$ 是有限的,其中,$\boldsymbol{J}_s=\hat{z}\times(\boldsymbol{H}_{z>0}-\boldsymbol{H}_{z<0})$。称 $\boldsymbol{J}_s$ 为表面电流。

1.1.4

$k_0=100\mathrm{K_o}=200\pi\mathrm{m}^{-1}$。

波长 $\lambda=2\pi/k_o=0.01\mathrm{m}$。

频率 $f=c/\lambda=30\mathrm{GHz}$。

对 $\lambda=632.8\mathrm{nm}$, $k=1/\lambda=1.58\times10^6\mathrm{K_o}$。

对 $f=2.4\mathrm{GHz}$, $k=f/c=(2.4\times10^9)\mathrm{Hz}/(3\times10^8)\mathrm{m/s}=8\mathrm{K_o}$。

1.1.5

$\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_5$ 是电磁波。

$\boldsymbol{E}_2$ 和 $\boldsymbol{E}_4$ 违背高斯定理 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$。

H_3 违背在 $x=z$ 处,$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$。

1.1.10

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=0$; $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=-2\boldsymbol{C}$。

1.1.11

$r=\sqrt{7},\theta=\pi/3,\phi=\pi/4;\rho=\sqrt{3},\phi=\pi/4,z=2$。

1.1.12

$\hat{c}=\hat{x}0.6+\hat{z}0.8$。

1.2.1

(1) 这个波是椭圆极化。

(2) $\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}[\hat{x}\cos(kx-\omega t)+\hat{y}\sin(kz-\omega t)]+\frac{1}{2}[\hat{x}\cos(kx-\omega t)-\hat{y}\sin(kz-\omega t)]$。

(3) $\boldsymbol{E}=\hat{x}\cos(kz-\omega t+\pi/4)+\hat{y}\cos(kz-\omega t-\pi/4)$。

1.2.3 非极化或称为随机极化的太阳光,照射激励大气中的分子并产生蚂蚁可以看见的散射光。被激励的大气分子产生的散射光可以被认为是来自两个相互正交的赫兹偶极子。每一个偶极子都产生线极化的光,其合成结果沿光线看去是无极化的。如果直接向太阳看去,其散射光是无极化的。举例而言,如果昆虫在日落时向天顶看去,也就是说这时看向大气分子的视线与阳光激励这些分子的入射线正交,散射场将只来自于与地面平行的偶极子。这样蚂蚁只接收到线极化波,而看向天空其他的方向,天光将呈现出部分极化的特性。

1.3.1

由 $mv^2/R=Ze^2/4\pi\epsilon R^2$ 和 $Z=1$,可得到 $R=4\pi\epsilon n^2\hbar^2/Zme^2\approx0.52n^2\times10^{-10}\mathrm{m}$

1.3.2

(1) 8.33min。

(2) $1.93\times10^{14}\mathrm{kW}$。

(3) $S=P$(每赫兹功率密度)$\times W$(宽带)$=10^{-11}\mathrm{W/m^2}$。$E=\sqrt{2\eta S}=8.68\times10^{-5}\mathrm{V/m}$。

1.3.3

(1) 当 $J=0$ 且为静电场情况时 $\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=0$,因此在任何一点都没有净功率流。

(2) 进入电阻的总的坡印延功率流为 $P=2\pi alEH=\frac{\pi a^2lJ^2}{\sigma}$,此问题中的能源是由电流 J 提供的。

1.3.6

(1) $\gamma = q/2m$。

(2) $\omega = \gamma B_0$,此即为常用的 Larmor 频率。

1.4.1

$H = \frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{\Pi}$。

$E = \frac{1}{\epsilon_0}\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{\Pi})$。

1.4.5

(1) $\langle S\rangle = \hat{r}\frac{\omega k^3}{2\epsilon_0}\left(\frac{ql}{4R\pi r}\right)^2\sin^2\theta$。

(2) 辐射功率为 $P = \int_0^\pi d\theta 2\pi r^2\sin\theta\left[\frac{\omega k^3}{2\epsilon_0}\left(\frac{ql}{4\pi r}\right)^2\sin^2\theta\right] = \frac{4\pi\omega k^3}{3\epsilon_0}(\frac{ql}{4\pi})^2$。

(3) 辐射电阻为 $R_{rad} = \frac{2P}{I_0^2} = \frac{8\pi k^3}{3\epsilon_0\omega}\left(\frac{l}{4\pi}\right)^2$。

(4) $P = \frac{2\pi\omega k^3}{3\epsilon_0}\left(\frac{ql}{4\pi}\right)^2 = \frac{2\pi}{3\eta_o}(E_o r)^2 = 781.25\text{W}$。

1.4.7

$b = 2\times10^{-5}\text{T}$。

1.5.1

对于铜,$\sigma\approx5.8\times10^7\text{S/m}$。

对于银,$\sigma\approx1.6\times10^{-3}\text{S/m}$。

1.5.2

(1) 对非常大的 N, $d_p = \frac{1}{k_I} = \sqrt{\frac{m}{Ne^2\mu_o}}$。

(2) 对电子 $m = 9.1\times10^{-31}\text{kg}, e = 1.6\times10^{-19}\text{C}, d_p = 2.0\times10^{-8}\text{m}$。

(3) 对良导体,$d_p = \frac{1}{k_I} = \sqrt{\frac{m}{Ne^2\mu_o}}$与频率无关。

1.5.3

(1) 对圆底牛排,$d_p = \frac{1}{k_I} = \frac{1}{58.7}\text{m} = 1.7\text{cm}$。对聚苯乙烯泡沫,$d_p\approx\frac{2}{\sigma\eta} = \frac{2\sqrt{1.03}}{4\times10^{-6}\times377} = 1346.0\text{m}$。

(2) 对良导体,$f_{max} = \frac{\omega}{2\pi} = 0.899\text{MHz}$。

(4)

① 当 $f = 100\text{Hz}$ 时,$d_p\approx\sqrt{\frac{2}{\omega\mu_o\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi\times100\times4\pi\times10^{-7}\times4}} = 25.2\text{m}$。

② 当 $f = 5\text{MHz}$ 时,$d_p\approx\sqrt{\frac{2}{\omega\mu_o\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi\times5\times10^6\times4\pi\times10^{-7}\times4}} = 0.11\text{m}$。

(5) 辐射功率的衰减项为 $e^{-2k_I r} = e^{-2\times\frac{100}{7.96}} = 1.22\times10^{-11} = -109.1\text{dB}$。

1.5.4

(1) $E(z,t) = \hat{x}E_0\cos(k_z z-\omega t)+\hat{y}E_0\cos(k_z z-\omega t)$波是圆极化的。

(2) $E(z,t) = \hat{x}E_0\cos(k_z z-\omega t)-\hat{y}E_0\cos(k_z z-\omega t)$波是线极化的,但是在圆极化方向上旋转了 90°。

1.5.5

(1) $N = 2.65\times10^4\text{m}^{-3}$。

1.5.6

(1) $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{k}{\omega\mu_o\epsilon_o} = c\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$。

(2) $v_g = c\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = c\sqrt{1-\frac{8^2}{(6\times10^8)^2}} = c(1-8.89\times10^{-17}) \approx 3.0\times10^8\text{ms}$。

对无线是电脉冲，$\omega = 2\pi\times10$(MHz)

$$v_g = c\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = c\sqrt{1-\frac{8^2}{10^2}} = 0.6c \approx 1.8\times10^8\text{ms}$$

经过 100km 传播后的延时为 $\delta t = d\left(\frac{1}{v_{g1}}-\frac{1}{v_{g2}}\right) = 100\times10^3\left(\frac{1}{0.6c}-\frac{1}{c}\right) \approx 2.22\times10^{-4}\text{s}$。

1.5.7

(1) $A = -1$。

(2) 场 $\boldsymbol{E}$ 是右旋圆极化的。

(3) $\varepsilon = \varepsilon_0\left(1-\frac{4\pi^2\times10^{12}}{\omega^2}\right)$。

(4) $\omega_p = 2\pi\times10^6\text{rad/s}$。

(5) $v_g = 0$。

1.6.1

(1) 等离子体频率与电子密度的关系，$\omega_p = 56.349\sqrt{N}$。

E 层：$N = 10^{11}\text{m}^{-3}$，$\omega_p = 56.349\sqrt{10^{11}} = 1.78\times10^7\text{rad/s}$。

F 层：$N = 6\times10^{11}\text{m}^{-3}$，$\omega_p = 56.349\sqrt{6\times10^{11}} = 4.36\times10^7\text{rad/s}$。

(2)E 层：$\theta_t^F = \sin\left(\frac{n_0}{n_E}\sin\theta\right) = \arcsin(1.0427\sin\theta)$。

F 层：$\theta_t^I = \arcsin\left(\frac{n_0}{n_F}\sin\theta\right) = \arcsin(1.3888\sin\theta)$。

(3)E 层：$f = \frac{\omega}{2\pi} \leqslant \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\omega_p = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} = 1.78\times10^7\text{Hz} = 3.28\text{MHz}$。

F 层：$f \leqslant \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\omega_p = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} = 4.36\times10^7\text{Hz} = 8.10\text{MHz}$。

1.6.2

(2) TE 波：$\boldsymbol{E}_{inc}^{TE} = E_0\hat{y}\cos(k_x x - k_z z - \omega t)$。

TM 波：$\boldsymbol{E}_{inc}^{TM} = E_0(\hat{x}\cos\theta + \hat{z}\sin\theta)\cos(k_x x - k_z z - \omega t)$。

(3) 线极化。

(4) 总反射场为 $\boldsymbol{E}_r = E_0(-\hat{x}R^{TM}\cos\theta + \hat{y}R^{TE} + \hat{z}R^{TM}\sin\theta)\cos(k_x x + k_z z - \omega t)$。

1.6.3

(1) $\varepsilon_t = 9$ 时的布儒斯特角为 $\theta_B = \arctan\sqrt{\varepsilon_t}\arctan\sqrt{9} = 71.57°$。

(2) 阳光中主要成分为 TE 极化波。人造偏振镜片吸收了入射的 TE 极化成分，因此 TE 极化成分能够通过偏振镜片到达眼睛。

1.6.4

$\theta = 90° - \theta_B = 34.41°$。

1.6.5

(1) $\boldsymbol{E}_r = E_0(-\hat{x}R^{TM}\cos\theta + \hat{y}R^{TE} + \hat{z}R^{TM}\sin\theta)\cos(k_x x + k_z z - \omega t)$。

(2) 对 $\theta < \theta_c$，反射波和透射波都是线极化的。

1.6.7

(2) 对入射电场的 z 分量，最小厚度为 $d = \frac{\lambda}{0.1\pi} = 3.18\lambda$。

(6) $d = \frac{1}{2\sqrt{3}-1}\frac{\lambda}{2}$。

1.7.1

(1) $m < \frac{d\omega\sqrt{\mu_o\varepsilon_o}}{\pi} = \frac{dw}{\pi c} = \frac{30\times10^9\times2\sqrt{3}\pi\times10^{-2}}{3\times10^8\pi} = 3.46$。

所以可能的传输模式为 $TM_m(m=0,1,2,3,)$ 和 $TE_m(m=1,2,3)$。

(2) 对 TM_2 模：$E = \frac{H_o}{\varepsilon_o\omega}\left[\hat{x}k_z\cos\frac{2\pi x}{d}\cos(k_zz-\omega t)+\hat{z}\frac{2\pi}{d}\sin\frac{2\pi x}{d}\sin(k_zz-\omega t)\right]$。

(3) $v_g = \frac{dw}{dk_z} = \frac{k_z}{\omega\mu_o\varepsilon_o} = \frac{c^2k_z}{\omega} = \frac{c^2}{v_p} = \frac{(3\times10^8)^2}{3.67\times10^8} = 2.45\times10^8\text{m/s}$。

(4) 由于 $\varepsilon_1=3\varepsilon_o>\varepsilon_o$，对任何模都不存在全反射情况。

(5) TM_3 波可完全透射。

1.7.9

随时间的衰减率为 $\omega_I=\sigma/2\varepsilon_o$，$\omega_R$ 依 $\mu_0\sigma^2/4\varepsilon_0$ 自没有因导体电导率引起的色散起开始减小。

1.8.2

低场强极限 $M\approx\frac{Nm^2H}{3kT}$，且介质为线性。

1.8.3

(1) 这个胆固醇液晶的本构关系是① 各向异性。② 线性。④ 非均匀：$\boldsymbol{\varepsilon}$ 与位置相关。

(2) 这个石英晶体的本构关系是① 双各向异性。② 线性。③ 时间色散。④ 均匀。或① 各向异性。② 线性。③ 空间色散。④ 均匀。

(3) 霍尔效应，其本构关系为① 各向异性。② 线性。③ 时间色散，介电常数与 ω 相关。④ 均匀。

(4) 考虑色散关系 $D_i=\varepsilon_{ij}E_j+\gamma_{ijk}\frac{\partial E_j}{\partial xk}$，其本构关系为① 各向异性：$\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 之间不是标量关系。② 线性。③ 空间色散：本构关系中包括 $\boldsymbol{E}$ 的空间位置导数。④ 均匀。$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_{ijk}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 无关。

(5) 热电介质的本构关系是① 各向异性。② 线性：$\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 之间的变化的关系是线性的。$\boldsymbol{\delta D}=\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\delta E$。④ 均匀。

(6) 压电晶体的本构关系是① 各向异性。② 线性：$\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 之间的变化的关系是线性。$\boldsymbol{\delta D}=\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\delta E$。④ 均匀。

(7) Kerr 效应的本构关系是① 各向异性。② 非线性。④ 均匀。

(8) Pockel 效应的光电介质的本构关系是① 各向异性。② 非线性。③ 均匀。

1.8.4

$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_{sup}$；$\nabla\times\boldsymbol{H}=\alpha\boldsymbol{E}$；

$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\alpha\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu_0\alpha\boldsymbol{B}$；$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\nabla^2\boldsymbol{B}=-\mu_0\alpha\boldsymbol{B}$。

由于 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，得到 $\nabla^2\boldsymbol{B}=\mu_0\alpha\boldsymbol{B}$，对 $\nabla^2=\partial/\partial x^2$ 算子的解为 $\boldsymbol{B}=\exp(\pm\mu_0\alpha x)$。穿透深度 $(\mu_0\alpha)^{-1/2}$ 在 10^{-7}m 的数量级上。第一 London 公式与理想导体的结果相似。上述结果表明，时变磁场为零且静磁场可在 $(\mu_0\alpha)^{-1/2}\to0$ 的极限下，在理想导体中被冻结。

$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_{sup}$；$\nabla\times\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{J}_{sup}=-\alpha_1\boldsymbol{B}$；$-\nabla^2\boldsymbol{B}=-\mu_0\alpha_1\boldsymbol{B}$。

对 $\nabla^2=\partial^2/\partial x^2$ 算子的解为 $\boldsymbol{B}=\exp(\pm\mu_0\alpha_1x)$。小穿透深度 $(\mu_0\alpha)^{-1/2}$ 表明静磁场在超导体中为零。注意 London 第二公式可以解释 Meissner 效应，但是无法解释为什么超导体在强磁场中会出现色散。理想导体与超导体的一个区别是静磁场在前者中冻结，而在后者中却完全不存在。

1.9.1

$\hat{\boldsymbol{n}}\times[(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_1)-(\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_2)]=0$。

$\hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)-\hat{\boldsymbol{n}}\times[\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)]=\boldsymbol{J}_s-\boldsymbol{v}\rho_s$。

第2章 传 输 线

2.1 传输线理论

为了推导传输线(TL,Transmission Line)理论,用平行板传输线作为一个典型例子。当然采用其他的传输线结构也能得到相同的传输线理论结果。考虑平行板之间的距离为 d,板的宽度为 w,如图2.1-1所示。当 $w \gg d$ 时,可以假设所有的电磁场都分布在两块平行板之间,在平行板之外的区域没有边缘场的存在。平行板引导电磁波沿 $\hat{z}$ 方向传播,电场 $\boldsymbol{E}$ 的方向为 $\hat{x}$ 方向,磁场 $\boldsymbol{H}$ 的方向为 $\hat{y}$ 方向。我们称这种电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 的方向都与电磁波传播方向垂直的电磁波为横电磁波(TEM,Transverse Electromagnetic)。

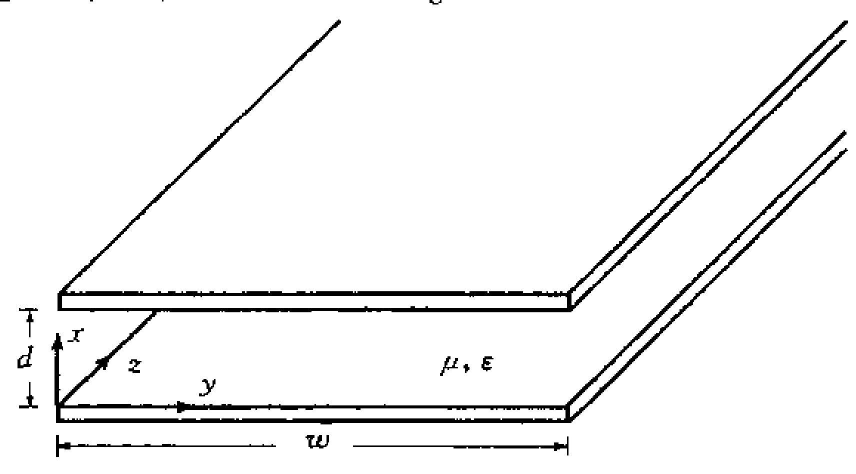


图2.1-1 平行板传输线

将电场和磁场表示为

$$\boldsymbol{E} = \hat{x}E_x(z,t) \tag{2.1.1}$$

$$\boldsymbol{H} = \hat{y}H_y(z,t) \tag{2.1.2}$$

那么麦克斯韦方程可以简化为下列方程

$$\frac{\partial}{\partial z}E_x(z,t) = -\mu\frac{\partial}{\partial t}H_y(z,t) \tag{2.1.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}H_y(z,t) = -\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}E_x(z,t) \tag{2.1.4}$$

定义传输线上的电压和电流分别为 $V(z,t) = E_x(z,t)d$ 和 $I(z,t) = H_y(z,t)w$,那么对于平行板波导,可以进一步定义单位长度上的电感

$$L = \frac{\mu d}{w} \quad (\text{H/m}) \tag{2.1.5}$$

和单位长度上的电容

$$C = \frac{\varepsilon w}{d} \quad (\text{F/m}) \tag{2.1.6}$$

引入上面的定义后，公式(2.1.3)和(2.1.4)变为

$$\frac{\partial}{\partial z}V(z,t) = -L\frac{\partial}{\partial t}I(z,t) \tag{2.1.7}$$

和

$$\frac{\partial}{\partial z}I(z,t) = -C\frac{\partial}{\partial t}V(z,t) \tag{2.1.8}$$

这一对关于电压 $V(z,t)$ 和电流 $I(z,t)$，以及电路参数电感 L 和电容 C 的方程(2.1.7)、(2.1.8)就是我们所说的传输线方程。对于同轴线、双导线传输线和微带线上的 TEM 波我们可以推导出相同的传输线方程。通常可以用两条平行的粗线表示传输线，如图 2.1-2 所示。细线用来连接传输线和电路单元。在这些细线上，电压和电流波动以无限的速度传播，因而不考虑其长度。

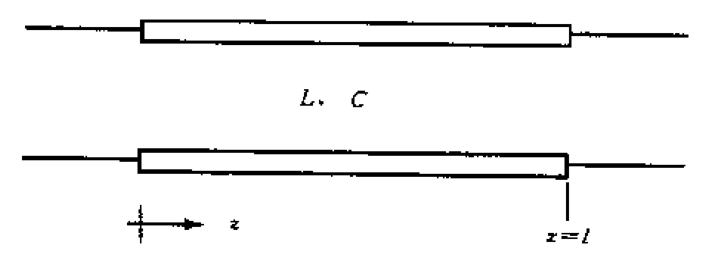


图 2.1-2 传输线的表示

注意，传输线引导的横电磁波(TEM 波)的电场 $\boldsymbol{E}$ 垂直于磁场 $\boldsymbol{H}$，并且 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都垂直于电磁波沿传输线的传播方向。传输线由两个相互平行的导体构成。传输线的横截面在传播方向上的每一点都是相同的。平行板传输线由两个有固定间距的相互平行的导体板构成，在两个导体板之间可以均匀填充介电材料。微带线是由贴在带有导体地板的介质基片上的薄的导体窄带构成的。双导线传输线是由一对有固定间距的平行导线构成的，面同轴传输线则是由内导体和外导体屏蔽壳构成的，在内、外导体之间用介质填充。沿传输线传播的除了 TEM 模式外，还存在其他传输线理论不能覆盖的电磁波模式。

例 2.1.1 同轴传输线。

同轴线由内外导体和内外导体之间的填充介质构成，内外导体的半径分别是 a 和 b，并且满足 $a<b$。电场和磁场矢量分别为

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{\rho}}E_\rho = \hat{\boldsymbol{\rho}}V(z,t)/\rho \tag{2.1.9}$$

$$\boldsymbol{H} = \hat{\boldsymbol{\phi}}H_\phi = \hat{\boldsymbol{\phi}}J_s(z,t)/\rho \tag{2.1.10}$$

那么麦克斯韦方程简化为下列形式

$$\frac{\partial}{\partial z}E_\rho(z,t) = -\mu\frac{\partial}{\partial t}H_\phi(z,t) \tag{2.1.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}H_\phi(z,t) = -\epsilon\frac{\partial}{\partial t}E_\rho(z,t) \tag{2.1.12}$$

定义电压 $V(z,t)$ 为

$$V(z,t) = -\int_a^b \mathrm{d}\rho E_\rho(z,t) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)E_\rho(z,t)$$

定义电流 $I(z,t)$ 为

$$I(z,t) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\phi\rho H_\phi(z,t) = 2\pi H_\phi(z,t)$$

对同轴线,我们可以进一步定义单位长度上的电感为

$$L = \mu \frac{\ln(b/a)}{2\pi} \quad (\mathrm{H/m}) \tag{2.1.13}$$

定义单位长度上的电容为

$$C = \epsilon \frac{2\pi}{\ln(b/a)} \quad (\mathrm{F/m}) \tag{2.1.14}$$

引入上面的定义后,方程(2.1.11)和(2.1.12)将变为

$$\frac{\partial}{\partial z}V(z,t) = -L\frac{\partial}{\partial t}I(z,t) \tag{2.1.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}I(z,t) = -C\frac{\partial}{\partial t}V(z,t) \tag{2.1.16}$$

这一结果与方程(2.1.7)、(2.1.8)得到的结果相同。

2.1.1 波动方程和波动解

消去方程(2.1.7)和(2.1.8)中的 $I(z,t)$或 $V(z,t)$得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - LC\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)V(z,t) = 0 \tag{2.1.17}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - LC\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)I(z,t) = 0 \tag{2.1.18}$$

方程(2.1.17)和(2.1.18)正是关于 $V(z,t)$和 $I(z,t)$的波动方程。$V(z,t)$的波动方程的解可以表示为

$$V(z,t) = \cos(kz - \omega t) \tag{2.1.19}$$

将式(2.1.19)代入(2.1.17)可以得到色散方程

$$k^2 = \omega^2 LC \tag{2.1.20}$$

传播速度为

$$v = \frac{\omega}{k} = 1/\sqrt{LC} \tag{2.1.21}$$

这一速度被称为传输线的特征速度。对于平行板传输线和同轴线,可以发现

$$v = \frac{\omega}{k} = 1/\sqrt{\mu\epsilon} \tag{2.1.22}$$

即传输线的特征速度等于光速。上述结果是基于$\sqrt{LC} = \sqrt{\mu\varepsilon}$的关系。实际上,这一关系对于一般的传输线都是成立的。

由公式(2.1.7),(2.1.8)可以得到 $I(z,t)$的解

$$I(z,t) = \sqrt{\frac{C}{L}}\cos(kz - \omega t) \tag{2.1.23}$$

我们定义传输线的特征阻抗

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{2.1.24}$$

Z_0 具有阻抗的量纲,并且电压 V 和电流 I 具有 $V = Z_0 I$ 的关系。方程(2.1.19)和(2.1.23)表示

沿 $\hat{z}$ 方向传播的正弦波，这是由于随着时间 t 的增加，z 也必须增加以保持相位为常数，即保持 $kz-\omega t=$ 常数。

> **练习 2.1.1** 求一个与式(2.1.19)类似的，但沿 $-\hat{z}$ 方向传播的电压波动 $V(z,t)$，电压 $V(z,t)$ 和电流 $I(z,t)$ 的关系是什么？
>
> **答** $V(z,t)=\cos(kz+\omega t)$，$I(z,t)=-\dfrac{1}{Z_0}V(z,t)$。

一般，沿 $\hat{z}$ 方向传播的电压波动可以表示为

$$V_+(z,t)=f(z-vt) \tag{2.1.25}$$

而沿 $-\hat{z}$ 方向传播的电压波动表示为

$$V_-(z,t)=f(z+vt) \tag{2.1.26}$$

相应的电流波动分别表示为

$$I_+(z,t)=\frac{1}{Z_0}f(z-vt) \tag{2.1.27}$$

和

$$I_-(z,t)=-\frac{1}{Z_0}f(z+vt) \tag{2.1.28}$$

方程(2.1.25)～(2.1.28)是满足传输线方程(2.1.7)和(2.1.8)的电压和电流的一般波动解，并且电压和电流之间通过特征阻抗 Z_0 相联系。

2.1.2 坡印廷定理

将公式(2.1.7)与 I 的乘积和公式(2.1.8)与 V 的乘积相加，就能得到传输线的坡印廷定理

$$\frac{\partial}{\partial z}(VI)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}LI^2+\frac{1}{2}CV^2\right)$$

我们知道 VI 是功率流量，$W_m=\dfrac{1}{2}LI^2$ 是磁场能量，$W_e=\dfrac{1}{2}CV^2$ 是电场能量，因此，坡印廷定理实际上是传输线上所有的点在所有的时刻能量守恒的一种表达方式。

例 2.1.2 考虑平行板波导内沿 $+\hat{z}$ 方向传播的电磁波，电场和磁场分别为

$$E_x(z,t)=E_0\cos(kz-\omega t) \tag{2.1.29}$$

$$H_y(z,t)=H_0\cos(kz-\omega t) \tag{2.1.30}$$

式中，$E_0/H_0=\sqrt{\mu/\epsilon}$。在 $x=0$ 的平板上，满足电场 $\boldsymbol{E}$ 的切向分量为零和磁场 $\boldsymbol{B}$ 的法向分量为零的边界条件。由电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的边界条件可以决定单位长度上的面电荷密度

$$\rho_s=\hat{x}\cdot\epsilon\boldsymbol{E}=\epsilon E_x(z,t)=\epsilon E_0\cos(kz-\omega t)$$

由磁场切向分量的边界条件可以决定单位长度上的面电流密度

$$\boldsymbol{J}_s=\hat{x}\times\boldsymbol{H}=\hat{z}H_y(z,t)=\hat{z}H_0\cos(kz-\omega t)$$

由上面的结果可以证明面电荷密度和面电流密度之间满足

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_s=-\frac{\partial}{\partial t}\rho_s$$

这一关系保证了面电荷和面电流的守恒。在 $x=d$ 的平板上，面电荷和面电流的分布与 $x=0$

的平板上的面电荷和面电流大小相等,符号相反。图 2.1-3 给出了 $t=0$ 时刻的面电荷和面电流分布。

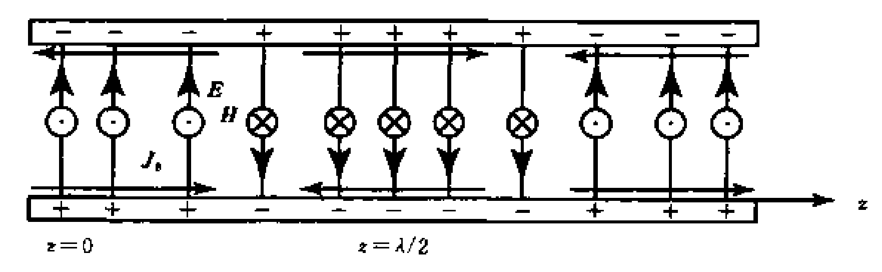


图 2.1-3 平行板波导上的面电荷和面电流

可以看到在 $z=0$ 处的电压与 $z=\lambda/2$ 处的电压相反,而基尔霍夫电压定律(KVL, Kirchhoff Voltage Law)则要求这两处的电压相同。在 $z=0$ 处的电流与 $z=\lambda/2$ 处的电流也是大小相等,方向相反,而基尔霍夫电流定律(KCL, Kirchhoff Current Law)则要求流入一个节点的电流与流出该节点的电流相等。

专题 2.1.A 电路理论

电路定律是麦克斯韦方程的特殊情况。

基尔霍夫电流定律 流入一个节点的电流等于流出一个节点的电流。基尔霍夫电流定律是电流连续性定律的结果。当某一点上没有电荷积累,即$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$时,我们有$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$,其积分形式为 $\oint\!\!\!\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J}=0$,定义流入该点的电流为 $I_1=\iint \mathrm{d}\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{J}$,它与流出该点的电流的和必然为零。

基尔霍夫电压定律 沿着一个闭合环路的电压降的和为零。基尔霍夫电压定律是法拉第定律的静态结果。当沿闭合环路没有时变场时,根据法拉第定律有$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$,或有积分形式 $\oint \mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{E}=0$,所以定义 $V_1=\int \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{E}$ 电压降的和为零。

注意,从麦克斯韦方程的角度看,在自由空间中$\partial\boldsymbol{B}/\partial t=\mu_o\partial\boldsymbol{H}/\partial t=0$ 在数学上等价于$\mu_o=0$。因此在电路理论中光速是无限的。

基本电路单元包括电阻、电感和电容。电导 G 是由欧姆定律$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$ 定义的。在一个面积为 A,长度为 L 的柱体上对电流进行积分,可以得到电导的表达式 $G=\sigma A/L$。我们令电流为 $I=JA$,电压为 $V=EL$,则有 $I=GV$。由于电流与电压之间满足 $V=RI$,所以电阻 R 是电导的倒数。

电感是由法拉第定律定义的。在以一个闭合环路为边界的面积 A 上进行积分,如图2.1-4 所示,根据斯托克斯(Stokes)定理,有

$$\oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{E}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B} \tag{2.1.31}$$

或

$$V=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi$$

式中 Φ 是连通环路的总的电通量。用沿环路的电流 I 表示有 $\Phi=L_0 I$,式中 L_0 是电感。从面可以得到

$$V = L_0 \frac{dI}{dt}$$

公式(2.1.31)给出的积分形式也是楞次(Lenz)定律的一种表述,即当有穿过环路的时变磁场时,会在环路上产生电压,这个电压产生的电流将阻止穿过环路的变化磁场。

电容是根据安培定律通过在以闭合环路为边界的面积 A 上的积分得到的。考虑半径为 a 的导线,导线上的电流将产生围绕导线的磁场 $\boldsymbol{H}$(见图 2.1-5a)。将导线分成间隙为 d 的两段(见图 2.1-5b),在导线的间隙区域沿磁场方向取一廓线 C, C 所包围的面积为 A,根据斯托克斯定理,有

$$\int_C d\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{H} = \varepsilon \frac{d}{dt}\iint d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{E} \tag{2.1.32}$$

令 $V = Ed$,并令公式(2.1.32)的左边等于电流 I,可以得到

$$I = C_0 \frac{dV}{dt} \tag{2.1.33}$$

式中 $C_0 = \varepsilon A/d$。两段导线之间的间隙就是一个电容。流过电容的电流称为位移电流,位移电流伴随着时变电压。电容是一个开路电路,所以直流电流不能流过电容。电流的连续性是由时变场中的位移电流实现的。位移电流的引入是麦克斯韦方程的一个重要结果,它保证了电流连续性的有效。

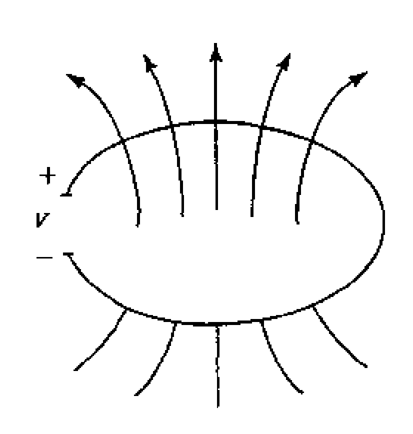




图 2.1-4 连通环路的通量

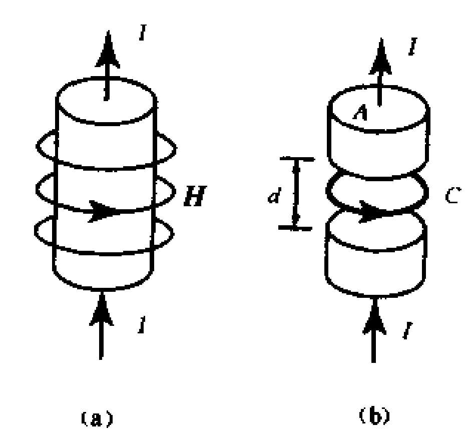


图 2.1-5 位移电流

公式(2.1.33)中的电容是一个联系电流 I 和电压随 V 随时间变化的常数。假设在静态的极限情况下,给电容充电的总电荷为 Q,对公式(2.1.33)进行时间积分,积分时间为一个充电周期,那么电压 V 与总充电电量 Q 的关系为

$$C_0 = \frac{Q}{V} \tag{2.1.34}$$

公式(2.1.34)就是电容 C_0 在静态场条件下的定义。

需要指出的是在电路理论中没有引入空间坐标,电路分布的空间维数为零。另外需要注意电路理论的不一致性。基尔霍夫电流和电压定律是安培定律和法拉第定律在时间导数为零的特殊形式,但电路单元电感和电容的定义却用到了安培定律和法拉第定律中的时间导数项,所以电路理论只是麦克斯韦方程在小时间变化的条件下的有限表述。在电磁波理论中,这一条件等效 $k \approx 0$,因此电路理论只适用于频率很低或波长很大的情况。当所考虑的对象的物理尺寸大于波长时,就必须用传输线理论取代电路理论。

例 2.1.3 在长度为 l 终端开路的传输线上可以存在正的和负的行波(见图 2.1-6)。

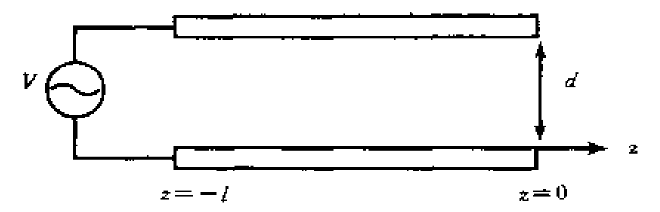


图 2.1-6 开路传输线作为电容

令

$$V(z,t)=V_+\cos(kz-\omega t)+V_-\cos(kz+\omega t) \tag{2.1.35}$$

$$I(z,t)=I_+\cos(kz-\omega t)+I_-\cos(kz+\omega t) \tag{2.1.36}$$

式中,$V_+=Z_0I_+$,$V_-=-Z_0I_-$。这里我们约定 z 轴的原点位于传输线的右端点,连接到源的左端点为 $z=-l$。由于在 $z=0$ 处电流为零,我们可以得到 $I_+=-I_-$,所以有

$$V(z,t)=2V_+\cos kz\cos\omega t \tag{2.1.37}$$

$$I(z,t)=2I_+\sin kz\sin\omega t \tag{2.1.38}$$

从传输线的输入端看,可以用一个电容 C_0 来建立电流 I 和电压 V 的时间导数之间的关系 $I=C_0\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$。可以看到,对于平行板波导,当 $-kz=kl\ll1$ 时,有

$$C_0=-\frac{I_+}{\omega V_+}\tan kz\approx\frac{1}{\omega Z_0}kl=\epsilon\frac{wl}{d}$$

这种情况就是一个面积为 wl,间距为 d 的电容。

习题

2.1.1 考虑双导线传输线(Lecher 传输线),导线直径为 b,导线中心之间的距离为 $2a$。试证明双导线传输线单位长度上的静态电容为

$$C=\pi\epsilon/\ln[(a+\sqrt{a^2-b^2})/b]$$

对于传输线方程,可以根据 $LC=\mu\epsilon$ 求解电感 L。

2.2 传输线上的瞬态过程

传输线上决定电压 $V(z,t)$和电流 $I(z,t)$的传输线方程为

$$\frac{\partial}{\partial z}V(z,t)=-L\frac{\partial}{\partial t}I(z,t) \tag{2.2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}I(z,t)=-C\frac{\partial}{\partial t}V(z,t) \tag{2.2.2}$$

根据传输线方程(2.2.1)和(2.2.2)可以推导出关于 $V(z,t)$和 $I(z,t)$的波动方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-LC\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)V(z,t)=0 \tag{2.2.3}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-LC\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)I(z,t)=0 \tag{2.2.4}$$

关于电压 $V(z,t)$的二阶偏微分方程(2.2.3)的解可以写成如下形式

$$V(z,t)=V_+(z-vt)+V_-(z+vt) \tag{2.2.5}$$

式中，$V_+(z-vt)$和 $V_-(z+vt)$分别表示沿 $+\hat{z}$ 和 $-\hat{z}$ 传播的电压波，它们可以假设为任意的波形。

将公式(2.2.5)代人方程(2.2.3)可以得到

$$v=1/\sqrt{LC}=1/\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{2.2.6}$$

这一结果等于光速。

类似地，可以给出电流 $I(z,t)$的波动解表示

$$I(z,t)=I_+(z-vt)+I_-(z+vt) \tag{2.2.7}$$

根据传输线方程(2.2.1)和(2.2.2)，可以得到 V_+与 I_+以及 V_-与 I_-之间的关系

$$V_+=Z_0I_+ \tag{2.2.8}$$

$$V_-=-Z_0I_- \tag{2.2.9}$$

式中，

$$Z_0=\sqrt{L/C} \tag{2.2.10}$$

是传输线的特征阻抗。由于 V 和 I 的下标"+"表示 $+\hat{z}$ 方向的行波，下标"-"表示 $-\hat{z}$ 方向的行波，它们分别暗含了变量 $z-vt$ 和 $z+vt$，所以在方程(2.2.8)和(2.2.9)中省略了相应的变量 $z-vt$ 和 $z+vt$。

例 2.2.1 考虑图2.2-1 所示的传输线，长度为 l，终端为阻性负载 R_L，研究该传输线上的瞬态过程。在 $z=l$ 处终端上的总电压 V 和总电流 I 必须满足边界条件

$$V(z=l)=R_LI(z=l) \tag{2.2.11}$$

方程(2.2.11)是 $z=l$ 处的边界条件。在 $z=0$ 的一端，传输线连接一个电压为 V_0 的直流电压源，电压源的内部阻抗为 R_s。在 $z=0$ 处的边界条件为

$$V_0=V(z=0)+R_sI(z=0) \tag{2.2.12}$$

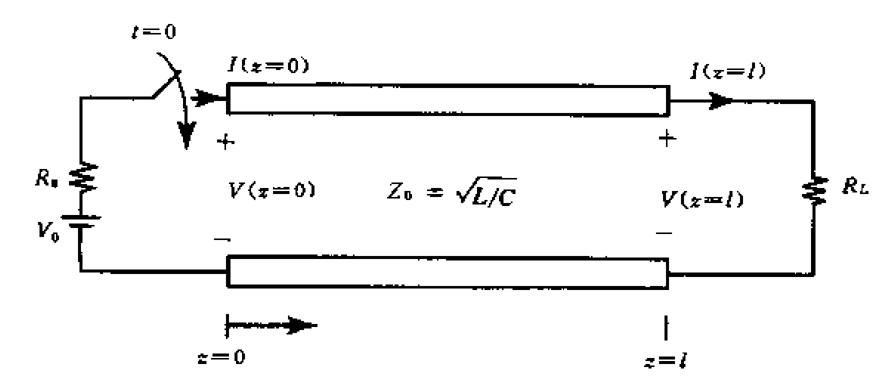


图 2.2-1 传输线上的瞬态过程

在 $t=0$ 时刻接通电压源，所以当 $t<0$ 时有 $V=I=0$，另外当 $t\to\infty$ 时传输线上的电压趋于稳态解

$$V=\frac{R_L}{R_S+R_L}V_0$$

这里主要研究传输线上电压和电流的瞬态建立过程。

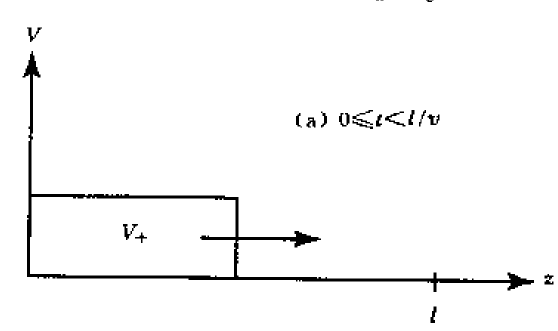
在 $t=0$ 时刻产生一个正的行波 V_+，根据传输线方程，与之对应的电流为 $I_+=V_+/Z_0$。由方程(2.2.12)有

$$V_0 = V_+ + R_s I_+ = \left(1 + \frac{R_s}{Z_0}\right) V_+$$

这一沿 $+\hat{z}$ 方向传播的行波的波速为 $v = 1/\sqrt{LC}$，它在 $t = l/v$ 时刻到达负载为 R_L 的终端。在图 2.2-2(a)中给出在 $0 \leqslant t \leqslant l/v$ 时间内的传输线上的电压



$$V_+ = \frac{V_0}{1 + R_s/Z_0} \tag{2.2.13}$$



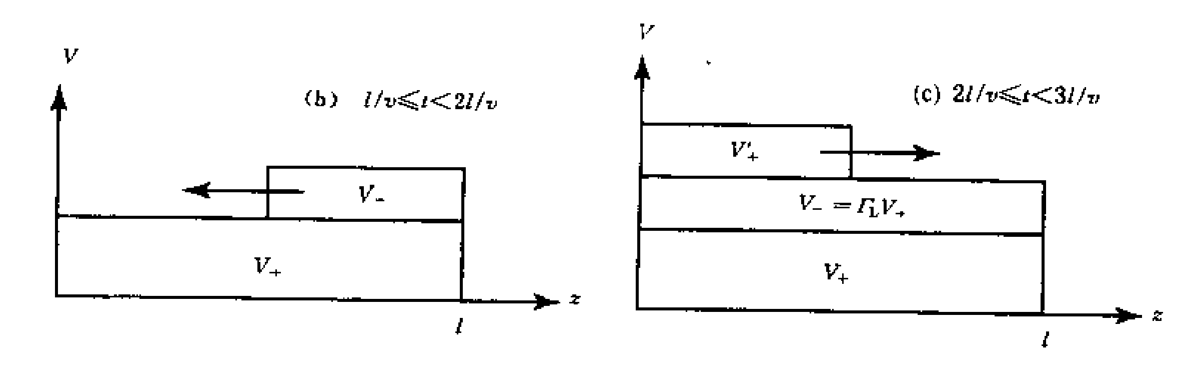


图 2.2-2　传输线上的瞬态建立过程

在 $t = l/v$ 时刻，电压波动传播到传输线的终端 $z = l$。这时要使方程(2.2.11)给出的边界条件得以满足，就必须有一沿 $-\hat{z}$ 方向的电压波动 V_-，与之对应的电流为 $I_- = -V_-/Z_0$。根据边界条件(2.2.11)，可以得到

$$V_+ + V_- = \frac{R_L}{Z_0}(V_+ - V_-) \tag{2.2.14}$$

进一步可以得到沿 $-\hat{z}$ 方向传播的行波电压 V_- 为

$$V_- = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} V_+$$

图 2.2-2(b)给出了 $l/v \leqslant t < 2l/v$ 时间内传输线上 V_+ 和 V_- 的电压分布。定义负载的反射系数为

$$\Gamma_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} \tag{2.2.15}$$

并且有

$$V_- = \Gamma_L V_+ \tag{2.2.16}$$

在图 2.2-2(b)中，假设 $R_L > Z_0$。

在 $t = 2l/v$ 时刻，$-z$ 方向的行波传播到连接电压源的一端 $z = 0$，并产生一个新的沿 $+z$ 方向传播的行波 V_+' 和 $I_+' = -V_+'/Z_0$。这时 $z = 0$ 的边界条件方程(2.2.12)要求

$$V_0 = (V_+ + V_- + V_+') + \frac{R_s}{Z_0}(V_+ - V_- + V_+')$$

利用方程(2.2.14)可以得到

$$V'_+ = \frac{R_s - Z_0}{R_s + Z_0} V_- \tag{2.2.17}$$

定义电压源的反射系数为

$$\Gamma_s = \frac{R_s - Z_0}{R_s + Z_0} \tag{2.2.18}$$

从而公式(2.2.17)可以写成

$$V'_+ = \Gamma_s V_- \tag{2.2.19}$$

图 2.2-2 给出了 $2l/v \leqslant t < 3l/v$ 时间内传输线上总的电压分布。

重复上面的过程,可以得到传输线上电压的一般表达式为

$$\begin{aligned} V &= V_+ + V_- + V'_+ + V'_- + V''_+ + V''_- + \cdots \\ &= V_+(1 + \Gamma_L + \Gamma_s\Gamma_L + \Gamma_s\Gamma_L^2 + \Gamma_s^2\Gamma_L^2 + \Gamma_s^2\Gamma_L^3 + \cdots) \\ &= V_+(1 + \Gamma_L)[1 + \Gamma_s\Gamma_L + (\Gamma_s\Gamma_L)^2 + \cdots] = V_+\frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_s\Gamma_L} \end{aligned}$$

这里我们利用了当 $x = \Gamma_s\Gamma_L < 1$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}$ 的结果。根据上面的推导可以直接得到下面的结果

$$\begin{aligned} V &= V_+\frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_s\Gamma_L} = \frac{Z_0 V_0}{R_s + Z_0}\ \frac{1 + (R_L - Z_0)/(R_L + Z_0)}{1 - (R_s - Z_0)(R_L - Z_0)/(R_s + Z_0)(R_L + Z_0)} \\ &= \frac{Z_0 V_0}{R_s + Z_0}\ \frac{2R_L(R_s + Z_0)}{2Z_0(R_s + R_L)} = \frac{R_L}{R_s + R_L} V_0 \end{aligned}$$

这一结果等于当 $t \to \infty$ 时传输线上电压的稳态值。

现在考虑以下几种特殊情况。

情况 1 终端开路($R_L \to \infty$),电源阻抗匹配 $R_s = Z_0$(见图 2.2-3)。

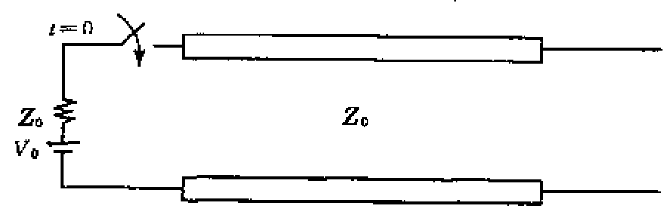


图 2.2-3 开路传输线

解 终端开路、电源阻抗匹配时的反射系数为

$$\Gamma_s = 0; \quad \Gamma_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} = \frac{1 - Z_0/R_L}{1 + Z_0/R_L} = 1$$

式中当 $R_L \to \infty$ 时 $Z_0/R_L = 0$,从而有

$$V_+ = \frac{1}{2}V_0, \ V_- = \Gamma_L V_+ = \frac{1}{2}V_0, \ V'_+ = 0$$

上述结果如图 2.2-4 所示。

情况 2 终端短路($R_L = 0$),电源阻抗匹配 $R_s = Z_0$(见图 2.2-5)。

解 终端短路、电源阻抗匹配时的反射系数为

$$\Gamma_s = 0; \quad \Gamma_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} = -1$$

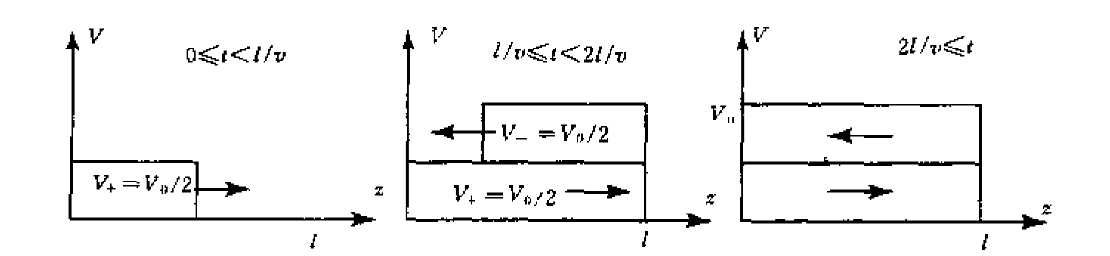


图 2.2-4 开路传输线上的瞬态过程

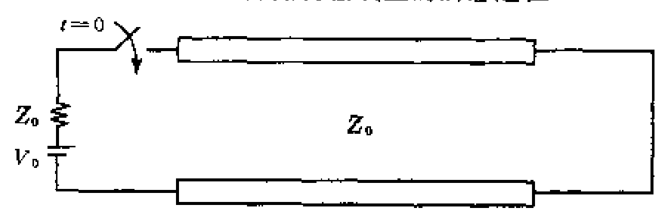


图 2.2-5 短路传输线

式中,当 $R_L=0$ 时有

$$V_+=\frac{1}{2}V_0,\quad V_-=\Gamma_L V_+=-\frac{1}{2}V_0,\quad V'_+=0$$

上述结果如图 2.2-6 所示。

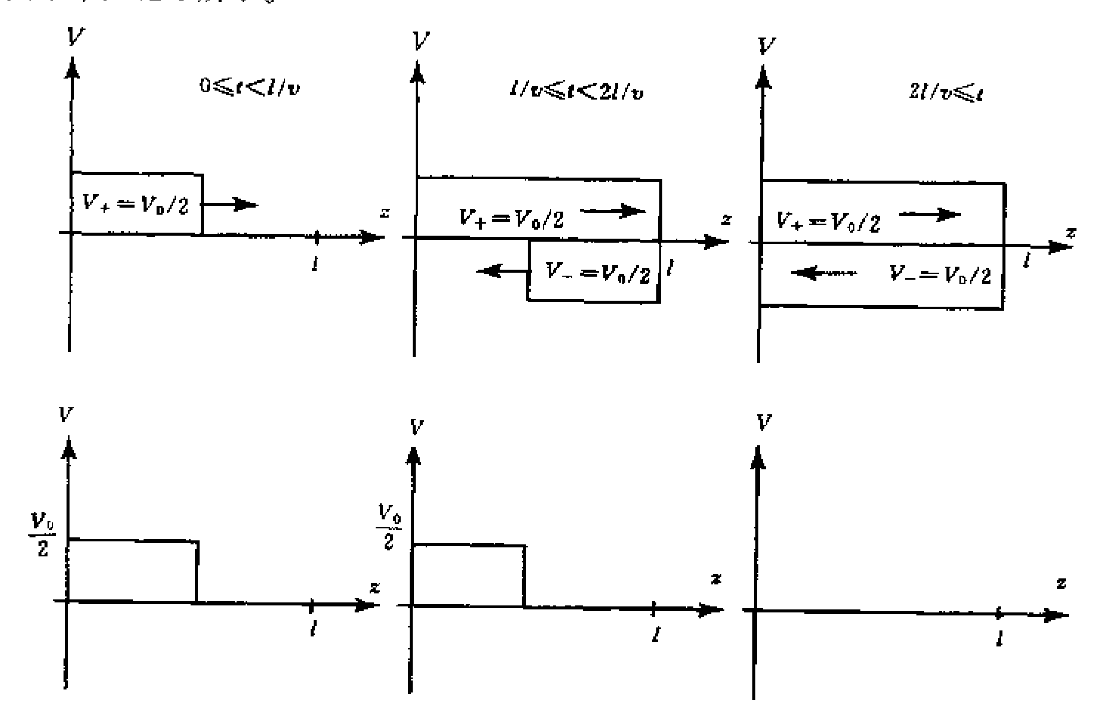


图 2.2-6 短路传输线上的瞬态过程

情况 3 匹配负载 $R_L=Z_0$,电源阻抗匹配 $R_s=Z_0$(见图 2.2-7)。

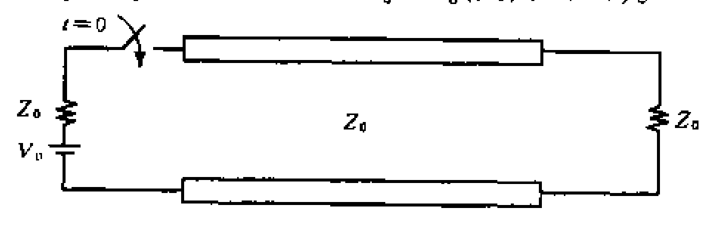


图 2.2-7 匹配负载传输线

解 匹配负载、电源阻抗匹配时的反射系数为

$$\Gamma_s = \Gamma_L = 0$$

电压为

$$V_+ = \frac{1}{2} V_0, \ V_- = 0$$

上述结果如图 2.2-8 所示。

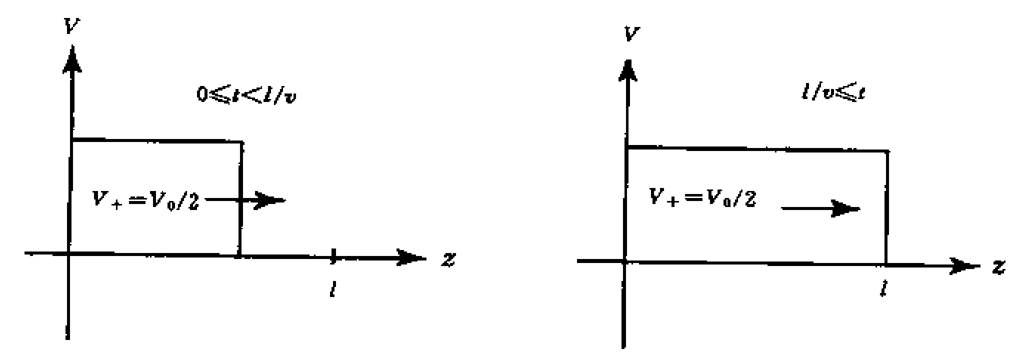


图 2.2-8 终端负载匹配的传输线上的瞬态过程

情况 4 传输线终端接电容,电源阻抗匹配 $R_s = Z_0$(见图 2.2-9)。

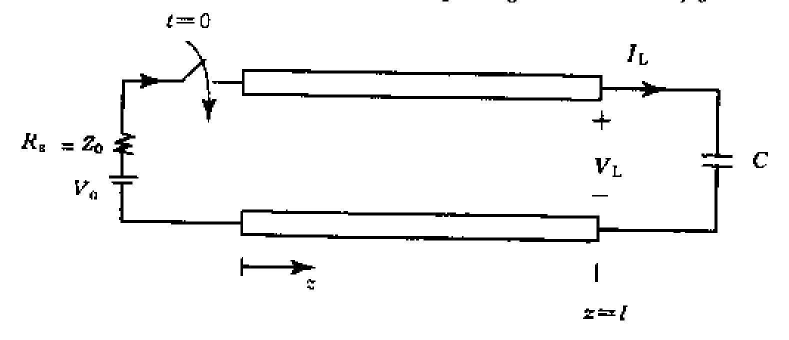


图 2.2-9 容性终端的传输线

解 电源的反射系数为 $\Gamma_s = 0$,$z = l$ 处容性终端的边界条件为

$$I_L = C\frac{dV_L}{dt}$$

$0 \leq t < l/v$ 时间内的波形如图 2.2-10(a)所示。在 $t = l/v$ 时刻,产生一个沿 $-z$ 方向传播的行波电压 V_-。总的负载电压为 $V_L = V_+ + V_-$,负载电流为 $I_L = (V_+ - V_-)/Z_0$。$z = l$ 终端的边界条件要求

$$V_+ - V_- = Z_0 C\frac{dV_L}{dt}$$

从而可以得到关于 V_L 的微分方程

$$\frac{dV_L}{dt} + \frac{1}{Z_0 C}V_L = \frac{2}{Z_0 C}V_+$$

上述微分方程的特解为 $V_L = 2V_+$,在 $l/v \leq t$,时间上的齐次解为 $Ae^{-(t-l/v)/(Z_0C)}$。在 $t = l/v$ 时刻,$V_L = 0$,所以有 $A = -2V_+$。从而可以得到

$$V_L = 2V_+[1 - e^{-(t-l/v)/(Z_0C)}]$$

以及

$$V_- = V_L - V_+ = V_0\left[\frac{1}{2} - e^{-(t-l/v)/(Z_0C)}\right]u(t - l/v)u(2l/v - t)$$

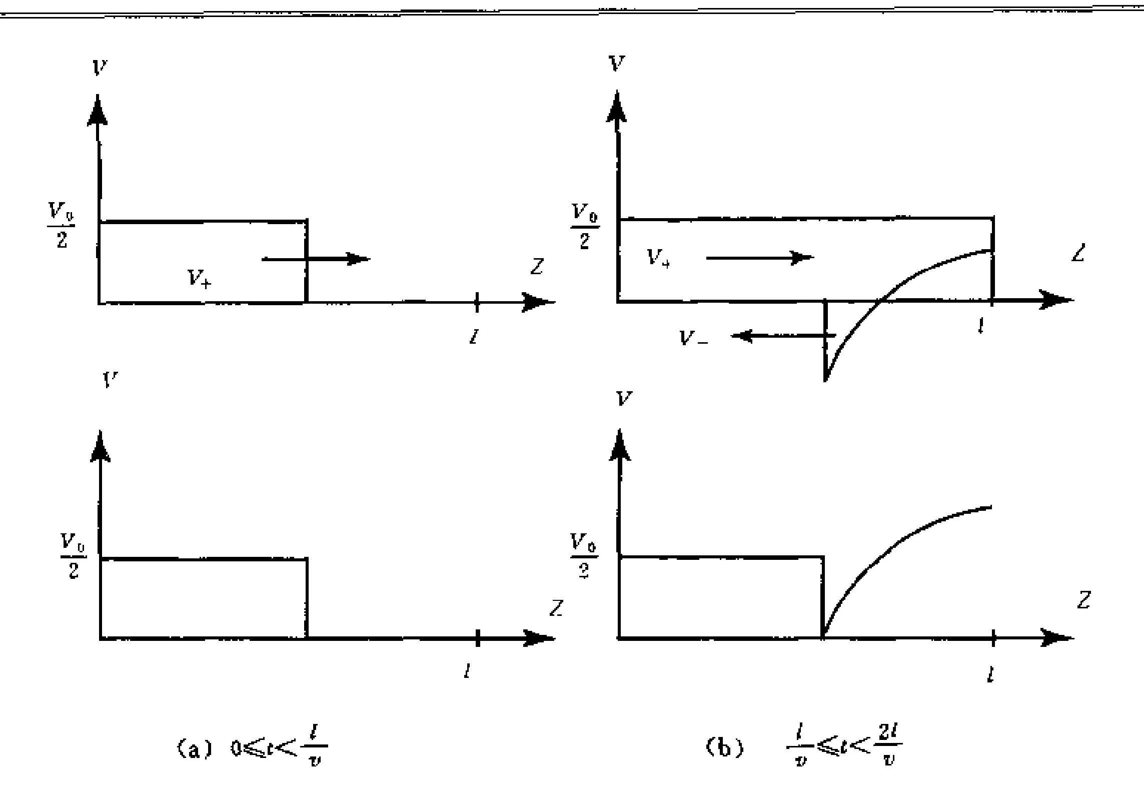


图 2.2-10 容性终端传输线的瞬态过程

式中，$u(t-l/v)$为阶跃函数。当 $t-l/v\geqslant0$ 时，$u(t-l/v)=1$；当 $t-l/v<0$ 时，$u(t-l/v)=0$。图 2.2-10(b)所示为反射波 V_-。可以看出，电容先是表现为短路，当达到稳态时又表现为开路。

情况 5 传输线终端接电感，电源阻抗匹配 $R_s=Z_0$（见图 2.2-11）。

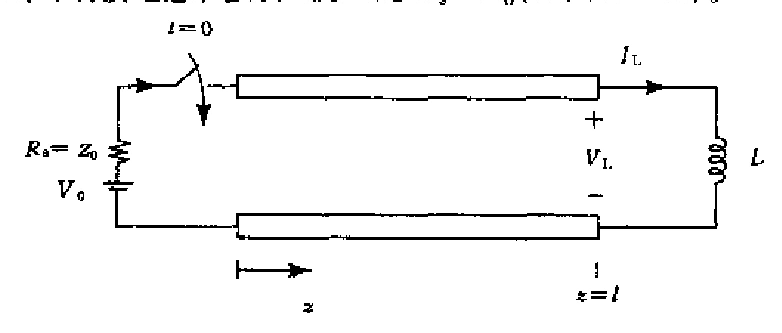


图 2.2-11 感性终端的传输线

解 电源的反射系数为 $\Gamma_s=0$，$z=l$ 处感性终端的边界条件为

$$V_L=L\frac{\mathrm{d}I_L}{\mathrm{d}t}$$

$0\leqslant t<l/v$ 时间内的波形如图 2.2-12(a)所示。在 $t=l/v$ 时刻，产生一个沿 $-z$ 方向传播的行波电压 V_-。总的负载电流为 $I_L=I_++I_-$，负载电压为 $V_L=Z_0(I_+-I_-)$，$z=l$ 终端的边界条件要求

$$Z_0(I_+-I_-)=L\frac{\mathrm{d}I_L}{\mathrm{d}t}$$

从而可以得到关于 I_L 的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}I_L}{\mathrm{d}t}+\frac{Z_0}{L}I_L=2\frac{Z_0}{L}I_+$$

在 $t=l/v$ 时刻，$I_L=0$，所以方程的解为

$$I_L = 2I_+\left(1 - e^{-Z_0(t-l/v)/L}\right)$$

以及

$$I_- = I_L - I_+ = I_+\left(\frac{1}{2} - e^{-Z_0(t-l/v)/L}\right)$$

从而有

$$V_- = -Z_0 I_+ = -V_+\left(\frac{1}{2} - e^{-Z_0(t-l/v)/L}\right)$$

图 2.2-12(b)所示为反射波 V_-。可以看出,电感先是表现为开路,当达到稳态时又表现为短路。

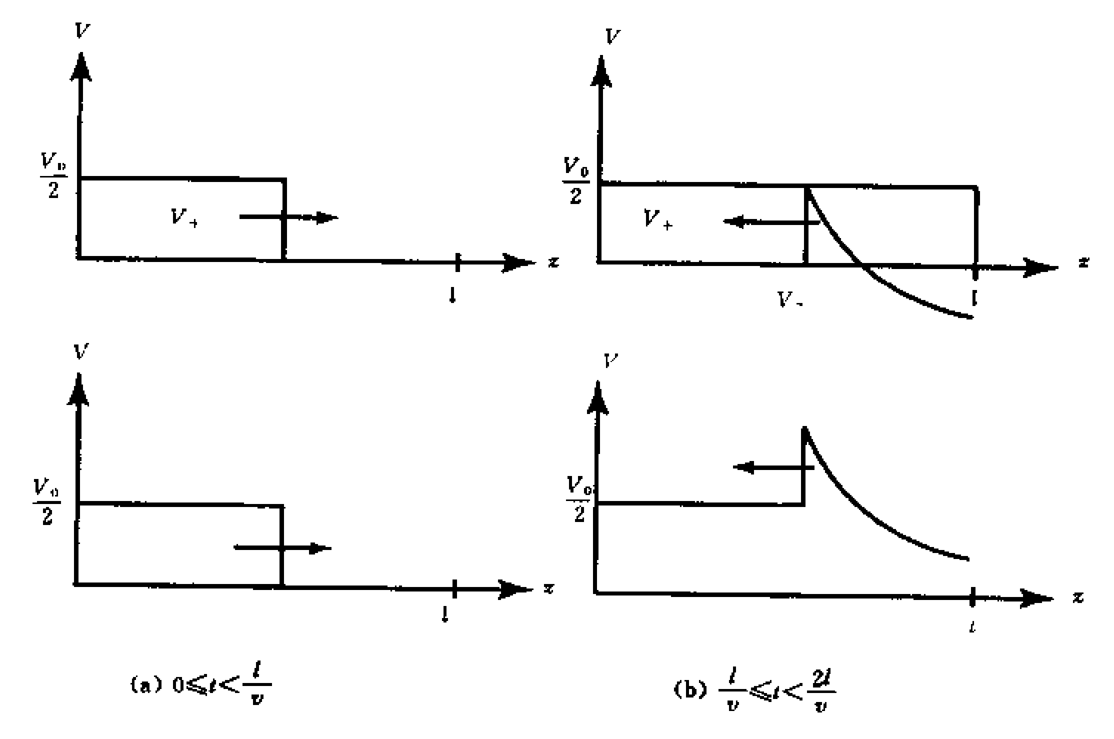


图 2.2-12 感性终端传输线的瞬态过程

例 2.2.2 普遍采用的一种产生高压短脉冲的方法是利用一个具有高速开关的传输线(见图 2.2-13),下面给出这种装置基本原理的说明。

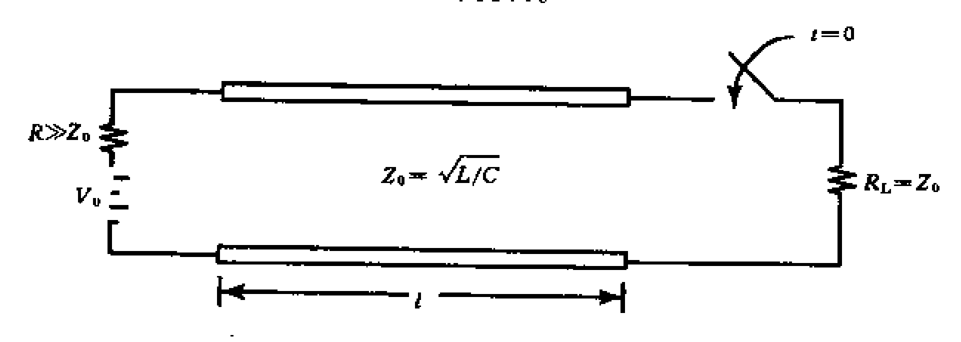


图 2.2-13 高速开关传输线装置原理图

(1) 已经用一个直流高压源给传输线充上一个电压 V_0,所用直流源的内阻 R 远大于传输线的特征阻抗 Z_0。如果在 $t=0$ 时刻闭合开关,试给出负载 $R_L = Z_0$ 上电压 $V_L(t)$的大小并用图表示。

(2) 如果传输线是特性阻抗 $Z_0 = 50\Omega$ 的空气填充的同轴线,传输线的长度应该为多少才

能产生持续时间为 0.1μs(10^{-7}s)的电压脉冲？要用多大的电源电压才能给终端负载 R_L 提供 1J 的脉冲能量？

(3) 如果上述要求是在物理上可实现的，空气的击穿电场强度为 3×10^6V/m，试计算当充电电压为 100kV(10^5V)时，空气填充的 50Ω 同轴线的最小可能的直径是多少？

解

(1) 在 $t=0$ 时刻将产生一个反向传播的行波 V_-，以满足负载 R_L 处的边界条件

$$V_0+V_L=-\frac{V_0}{Z_0}R_L$$

从而可得

$$V_-=-\frac{V_0}{2}$$

负载 R_L 上的电压 V_L 为

$$V_L=V_0+V_-=\frac{V_0}{2}$$

负载电压 V_L(t)如图 2.2-14 所示。

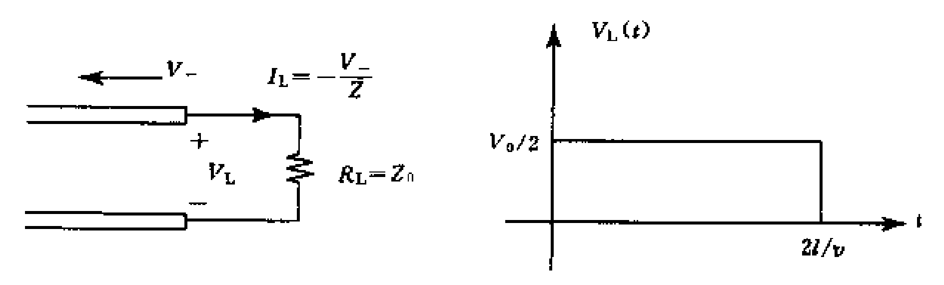


图 2.2-14 负载电压 V_L

(2) 由$\frac{2l}{v}=10^{-7}$s 可得 $l=15$cm。由$\left(\frac{V_0}{2}\right)^2\frac{1}{Z_0}t=1$J，可得 $V_0=44.7$kV。

(3) 在同轴线上，由 $Z_0=\eta\frac{\ln(b/a)}{25}=50\Omega$，可得 $\ln\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{5}{6}$。由 $\boldsymbol{E}(z)=\hat{\boldsymbol{\rho}}\ \frac{V(z)}{\rho\ln(b/a)}$，可得$\frac{V_0}{a\ln(b/a)}\leqslant3\times10^6$。由上面的推导可以得到 $a\geqslant4$cm，$b\geqslant9.2$cm。

例 2.2.3 上述产生高压短脉冲的方案的一种改进形式是如图 2.2-15 所示的 Blumlein 线。两段传输线的长度均为 l，试计算 $V_L(t)$并用图表示，分析这种方案的优点是什么？

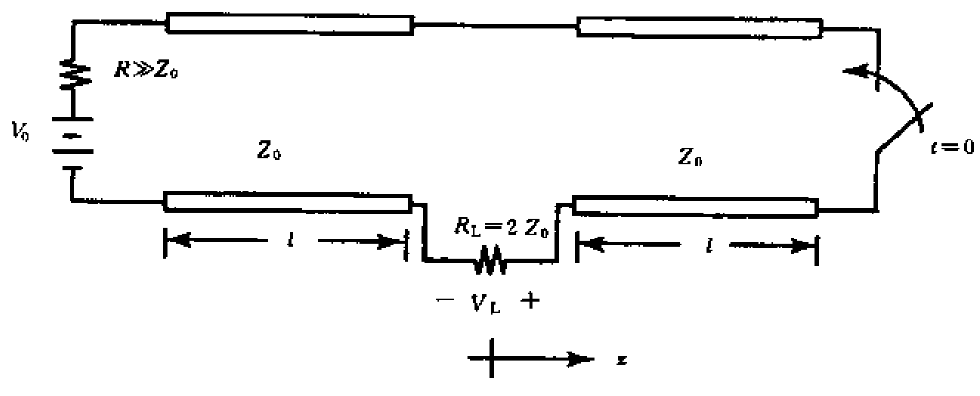


图 2.2-15 Blumlein 线

解 在 $t=0$ 时刻,在 $z=l$ 的终端产生沿 $-z$ 方向传播的行波电压 $V_-=-V_0$,以满足该终端的边界条件。在 $t=l/v$ 时刻,V_- 到达 $z=0$ 处的负载 $R_L=2Z_0$,在负载处将形成一个反射波 V'_+和一个传输波 V'_-。上述过程的等效电路如图 2.2-16 所示。

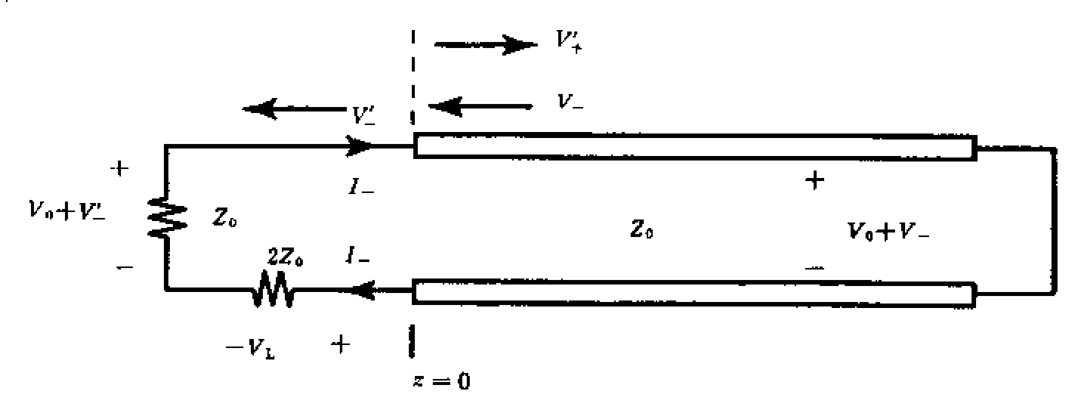


图 2.2-16 等效电路

负载处的反射系数和反射波电压分别为

$$\Gamma=\frac{3Z_0-Z_0}{3Z_0+Z_0}=\frac{1}{2},\ V'_+=\Gamma V_-=-\frac{V_0}{2}$$

与 V_-对应的电流为 $I_-=\frac{-V_-}{Z_0}=\frac{V_0}{2Z_0}$,所以有 $V_L=2Z_0I_-=V_0$,电压的方向如图 2.2-16 所示。

根据基尔霍夫电压定律(KVL)有

$$V_0+V'_-=V_0+V_-+V'_++V_L$$

所以 $V'_-=V'_+=-V_0/2$,在 $t=2l/v$ 时刻,V'_-在 $z=-l$ 处的电压源处产生反射波

$$V''_+=V'_-=-\frac{V_0}{2}$$

电压源的反射系数为 $\Gamma=1(R\gg Z_0)$。在同一时刻,V'_+在 $z=l$ 处的开关闭合形成的短路终端产生反射波

$$V''_-=-V'_+=\frac{V_0}{2}$$

短路终端的反射系数为 $\Gamma=-1$。

在 $t=\frac{3l}{2v}$时刻,V''_+和 V'_-同时到达位于 $z=0$ 处的负载。根据 KVL 有

$$V_0+V'_-+V''_+=V_0+V_-+V'_++V''_-+V_L$$

从而得到 $V_L=0$。新产生的向两个方向传播的一对反射电压 $V'''_+=V'''_-=V_0/4$ 随后也将在 $z=0$的负载上形成零电压 $V_L=0$。所以负载上电压 $V_L=V_0$ 的持续时间为 $t=0$ 到 $t=2l/v$。Blumlein 线的优点是负载上的脉冲幅度为 V_0,而不是 $V_0/2$。

2.2.1 时域反射计用来检测传输线上的故障,这种故障可以是地下或海底电缆距离信号发生器 l_f 处的

电缆损坏。可以建立这种故障的模型为一个集总电阻 R_f。信号发生器在 $t=0$ 时向电缆发出一个单位阶跃电压。在 $t=0$ 到 $t=20\mu s$ 之间,电压读数为 $V=1V$,在 $t=20\mu s$ 时刻电压读数由 $V=1V$ 变为 $V=0.5V$。假设传输线的绝缘材料的介电常数为 $\epsilon_0=2.25$,特征阻抗为 $Z_0=90\Omega$,试确定从故障位置到信号发生器的距离 l_f 和电缆损坏造成的集总电阻 R_f。

2.2.2 如图 2.2-17a 所示,一条很长的特征阻抗为 Z_0 的传输线在一个未知的位置 $z=l$ 处有一个阻值未知的并联电阻 R_L。信号发生器向传输线发出一个单位阶跃函数后,在传输线的输入端测量电压的结果如图 2.2-17(b)所示。

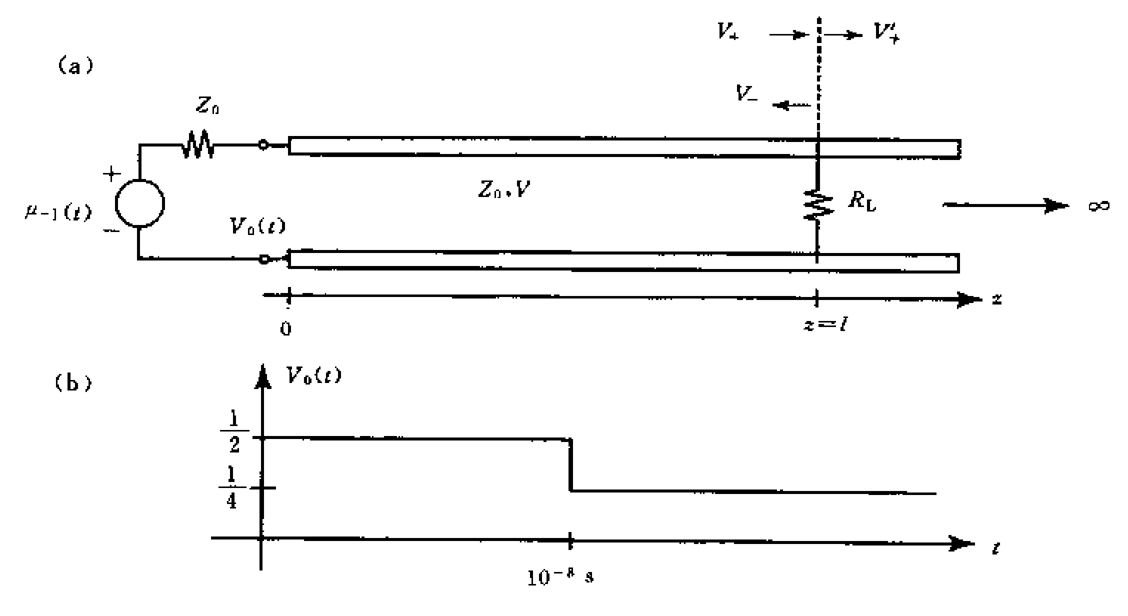


图 2.2-17 习题 2.2.2 图

(1) 电阻位置 l 是多少。

(2) 电阻阻值 R_L 是多大。

(3) 画出 $t=1.5l/v$ 时刻传输线上的电压和电流分布。

2.2.3 考虑图 2.2-18 所示的传输线电路。

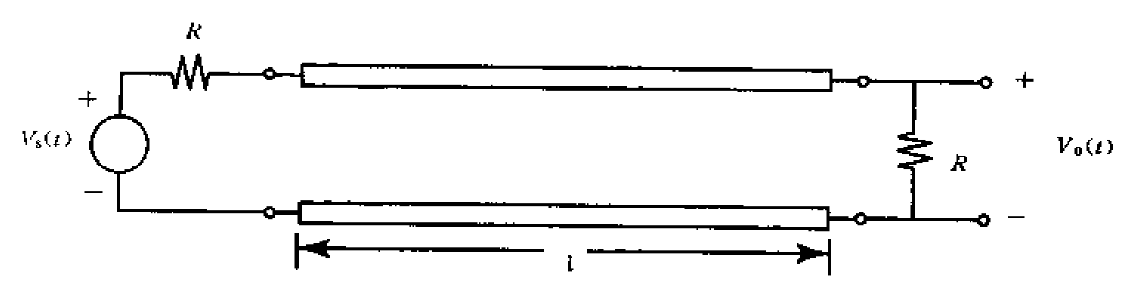


图 2.2-18 习题 2.2.3 图

(1) 当 $V_s=\delta(t)$ 为单位冲激时,求输出电压 $V_0(t)$。证明 $V_0(t)$ 为起始于 $t=l/v$ 时刻,间隔为 $2l/v$ 的冲激串。在 $t=nl/v$ 时刻出现的冲激的幅度为 $\Gamma^n(1+\Gamma)\dfrac{Z_0}{(Z_0+R)}$,起始脉冲对应 $n=1$。

(2) 如果 $V_s(t)=u(t)$ 为单位阶跃时,试证明当 $t\to\infty$ 时,$V_0(t)\to1/2$。

2.3 正弦稳态传输线

在正弦稳态传输线上的电压具有以下一般形式

$$V(z,t)=A(z)\cos[\omega t-\alpha(z)]$$

式中,ω 为正弦波的角频率。幅度 $A(z)$和相位 $\alpha(z)$只是位置 z 的函数。采用复数表示,电压

$V(z,t)$可以写成

$$V(z,t)=\mathrm{Re}\{V(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\} \tag{2.3.1}$$

其中,

$$V(z)=A(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha(z)}$$

被称为相量,相量 $\alpha(z)$是位置 z 的复函数。

注意,这里将复数 A 写成$A=A_R+\mathrm{j}A_I$的形式,$\mathrm{j}=\sqrt{-1}$是虚数单位,A_R 和 A_I 是实数。用 j 代替 i 表示虚数$\sqrt{-1}$是由于在与电路有关的理论中用 i 表示电流。另外在电路理论中用 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$作为时间变化项。根据上述约定,在电路理论中用 $Z=R+\mathrm{j}X$ 表示阻抗,其中 R 表示电阻,X 表示感抗;用 $Y=G+\mathrm{j}B$ 表示导纳,其中 G 表示电导,B 表示容抗。

在以后的章节中,我们还将用到由公式(2.3.1)变化而来的其他约定

$$V(z,t)=\mathrm{Re}\{V(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\} \tag{2.3.2}$$

式中,$V(z)=A(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(z)}$。当随后涉及更复杂的理论时,可以看出上述约定的优点。读者应该注意,在阅读电磁学文献时,波的传播方向可能会由于采用的约定不同而指向相反的方向。但是,两种约定的转换只需简单地用 j 替换 $-\mathrm{i}$ 或进行相反的替换。

另外两种较少用到的约定是 $V(z,t)=\mathrm{Re}\{V(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\}$,和 $V(z,t)=\mathrm{Re}\{V(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\}$。从第3章开始讨论一般波动理论时,我们将约定 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$作为时间变化项。

类似公式(2.3.1),我们可以有以下的表示

$$I(z,t)=\mathrm{Re}\{I(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\} \tag{2.3.3}$$

式中 $I(z)$也是 z 的复函数。

利用公式(2.3.1)和(2.3.3)给出的表示形式,可以将传输线方程

$$\frac{\partial}{\partial z}V(z,t)=-L\frac{\partial}{\partial t}I(z,t) \tag{2.3.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}V(z,t)=-C\frac{\partial}{\partial t}I(z,t) \tag{2.3.5}$$

写成复数形式

$$\frac{\partial}{\partial z}V(z)=-\mathrm{j}\omega LI(z) \tag{2.3.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}I(z)=-\mathrm{j}\omega CV(z) \tag{2.3.7}$$

式中 $V(z)$和 $I(z)$都是复数。

消去方程(2.3.6)和(2.3.7)中的 $V(z)$和 $I(z)$,可以得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\omega^2LC\right)V(z)=0 \tag{2.3.8}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\omega^2LC\right)I(z)=0 \tag{2.3.9}$$

$V(z)$和 $I(z)$的一般解为

$$V(z)=V_+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}+V_-\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz} \tag{2.3.10}$$

$$I(z)=I_+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}+I_-\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz} \tag{2.3.11}$$

其中,第一项表示正行波,第二项表示负行波。将公式(2.3.10)和(2.3.11)代入到方程(2.3.6)和(2.3.7)中,可以得到色散关系

$$k^2=\omega^2LC \tag{2.3.12}$$

和

$$I_+ = V_+/Z_0 \tag{2.3.13}$$

$$I_- = -V_+/Z_0 \tag{2.3.14}$$

其中，

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{2.3.15}$$

是传输线的特征阻抗。

> **练习 2.3.1** 利用表达式(2.3.1)解释为什么(2.3.10)中的第一项是正行波。
>
> **解**
>
> 假设 $V_+ = V\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$。根据(2.3.1)可以发现
>
> $$V(z,t) = \mathrm{Re}\{V\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\} = V\cos(\omega t - kz + \phi)$$
>
> 随着时间的增加，z 必须增加才能保持 $\omega t - kz + \phi =$ 常数，因此波动是沿着 $+\hat{z}$ 方向传播的。

2.3.1 传输线末端的反射

考虑图 2.3-1 所示的传输线，终端有一个负载阻抗 Z_L。我们约定正弦状态的传输线的坐标零点在负载处。对于一个长度为 l 的传输线，负载在 $z=0$ 处，发生信号的源在 $z=-l$ 处。

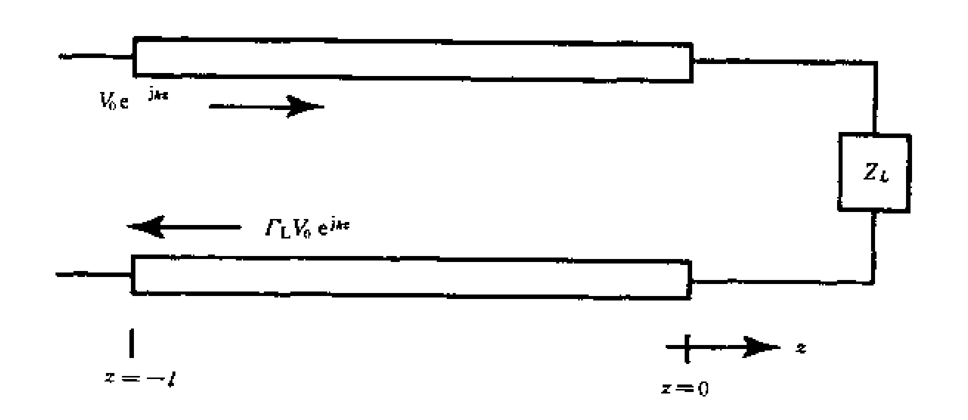


图 2.3-1 终端为 Z_L 的传输线

传输线方程解的一般形式可写为

$$V(z) = V_0(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} + \Gamma_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}) \tag{2.3.16}$$

$$I(z) = \frac{V_0}{Z_0}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} - \Gamma_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}) \tag{2.3.17}$$

Γ_L 被称为负载处的反射系数。我们定义总阻抗 $Z(z)$ 为

$$\begin{aligned}
Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} &= Z_0\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} + \Gamma_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} - \Gamma_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}} \\
&= Z_0\frac{(Z_L + Z_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} + (Z_L - Z_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}}{(Z_L + Z_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} - (Z_L - Z_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}} \\
&= Z_0\frac{2Z_L\cos kz - \mathrm{j}2Z_0\sin kz}{-\mathrm{j}2Z_L\sin kz + 2Z_0\cos kz}
\end{aligned}$$

$$= Z_0 \frac{Z_L - jZ_0 \tan kz}{Z_0 - jZ_L \tan kz} \tag{2.3.18}$$

式中 $Z(z)$是 z 的复函数,而不像在电路理论中那样只是一个复数。

在 $z=0, Z(z=0)=Z_L$,令 $z=0$,由公式(2.3.18)可得

$$Z_L = Z_0 \frac{1+\Gamma_L}{1-\Gamma_L} \tag{2.3.19}$$

因而负载的反射系数可以用负载阻抗 Z_L 表示为

$$\Gamma_L = \frac{Z_{Ln}-1}{Z_{Ln}+1} \tag{2.3.20}$$

式中,

$$Z_{Ln} = \frac{Z_L}{Z_0} \tag{2.3.21}$$

是归一化负载阻抗。

考虑下列情况。

情况 1 对于开路负载,$Z_L \to \infty$,可以得到 $\Gamma_L = \frac{1-1/Z_{Ln}}{1+1/Z_{Ln}} = 1$。

情况 2 对于短路负载,$Z_L=0$,可以得到 $Z_{Ln}=0$ 及 $\Gamma_L=-1$。

情况 3 对于匹配负载,$Z_L=Z_0$,可以得到 $Z_{Ln}=1$ 及 $\Gamma_L=0$。

所以对于匹配负载,只有正向行波而没有负向行波。对于功率传送的情形,所有的功率都被传送给了负载阻抗。

2.3.2 输入阻抗

公式(2.3.18)给出了传输线上每一点 z 的广义阻抗 $Z(z)$。在负载 $z=0$ 处,$Z(z=0)=Z_L$ 是负载阻抗。在输入端 $z=-l$ 处,$Z(z=-l)$则是输入阻抗。可以得到

$$Z(-l) = \frac{V(-l)}{I(-l)} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan kl}{Z_0 + jZ_L \tan kl} \tag{2.3.22}$$

考虑下列情况。

情况 1 对于开路负载,$Z_L \to \infty$,输入阻抗为

$$Z(-l) = Z_0 \frac{1 + jZ_0 \tan kl / Z_L}{Z_0/Z_L + j\tan kl} = \frac{Z_0}{j\tan kl} \tag{2.3.23}$$

当 $kl \ll 1$ 时,$\tan kl \approx kl$。由于 $kl = 2\pi l/\lambda$,所以 $kl \ll 1$ 就意味着传输长度 l 与波长 λ 相比非常小。考虑图 2.3-2 所示的长度为 l 的平行板传输线。

平行板传输线单位长度上的电容 $C = \varepsilon w/d$,所以长度为 l 的平行板传输线的总电容 $C_0 = \varepsilon wl/d$。利用传输线上的色散关系 $k = \omega\sqrt{LC}$和 $Z_0 = \sqrt{L/C}$可以得到输入阻抗为

$$Z(-l) = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{j\omega\sqrt{LC}l} = \frac{1}{j\omega C_0}$$

在电路理论中,上式即为电容的阻抗。一般情况下,一个阻抗总是用电阻 R 和感抗 X 表示为

$$Z = R + jX$$

当 $X<0$ 时,阻抗是容性的;当 $X>0$ 时,阻抗是感性的。对于上述的平行板传输线,$X = -1/(\omega C_0) < 0$,所以是容性的。

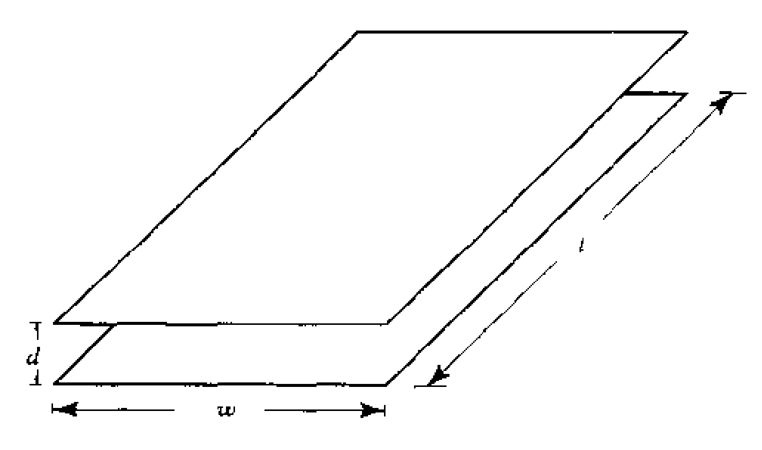


图 2.3-2　长度为 l 的平行板传输线

在图 2.3-3 中给出了当 l 增大时公式(2.3.23)的结果。可以看到当 $\pi/2 < kl < \pi$ 或 $\lambda/4 < l < \lambda/2$ 时，平行板实际上是感性的，平行板的输入阻抗是感性还是容性取决于它的长度。这一结果是一个非常重要的例证，它说明了为什么通常的电路理论在高频或 $kl > 1$ 时将不再有效。通常的电路理论只是一般情况的一个特例。传输线的输入阻抗每半个波长(或 $kl = n\pi$)重复一次。kl 每增加 $\pi/2$，容性输入阻抗将变成感性，而感性阻抗将变成容性。

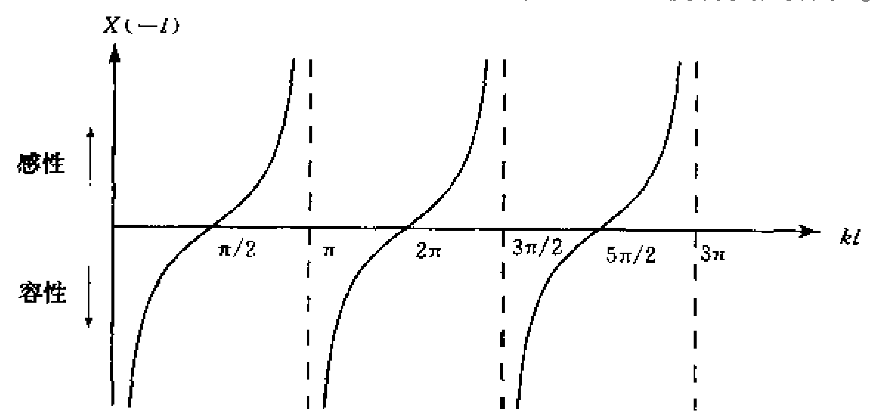


图 2.3-3　开路传输线的感抗

情况 2　对于短路负载 Z_{Ln}。传输线的输入阻抗为

$$Z(-l) = \mathrm{j}Z_0\tan kl$$

图 2.3-4 给出了感抗 $X = Z_0\tan kl$ 随长度的变化。

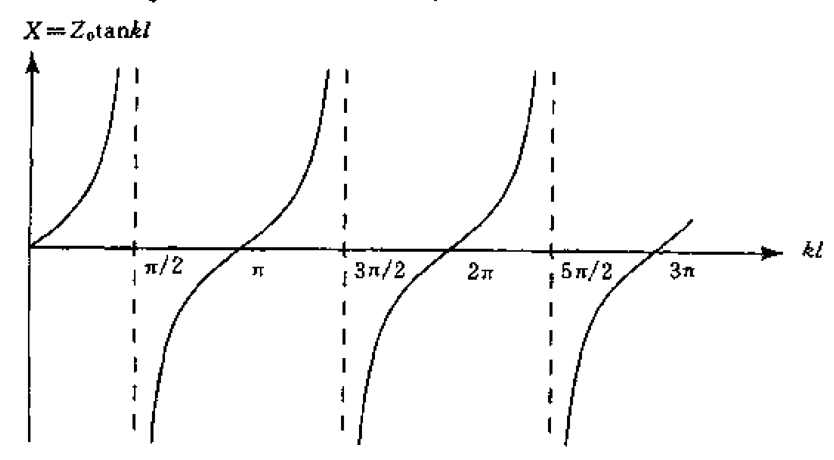


图 2.3-4　短路传输线的感抗

情况3 对于匹配负载 $Z_{Ln}=1$。可以得到传输线的输入阻抗为 $Z(-l)=Z_0$。所以终端接匹配负载的传输线上每一点的输入阻抗都等于传输线的特征阻抗。

2.3.3 广义反射系数

根据公式(2.3.16)可以定义传输线上每一点 z 处的广义反射系数 $\Gamma(z)$。

$$V(z)=V_0(e^{-jkz}+\Gamma_L e^{jkz})$$
$$=V_0 e^{-jkz}[1+\Gamma(z)] \tag{2.3.24}$$

其中,

$$\Gamma(z)=\Gamma_L e^{j2kz} \tag{2.3.25}$$

即为广义反射系数。

当传输线的特征阻抗 Z_0 为实数时,负载反射系数

$$\Gamma_L=\frac{Z_{Ln}-1}{Z_{Ln}+1}$$

的幅度 $|\Gamma_L|$ 小于1。由公式(2.3.25)可以得到,$|\Gamma(z)|\leqslant 1$ 对所有的 z 都成立。

可以用复 Γ 平面图表示公式(2.3.25)所给出的广义反射系数,在复 Γ 平面图上,任一点 z 处的 $\Gamma(z)$ 用一条线表示(图2.3-5)。该点的电压幅度与线 $|1+\Gamma(z)|$ 的长度成正比。随着 z 的减小,这样的点向着信号发生器或源的方向移动。

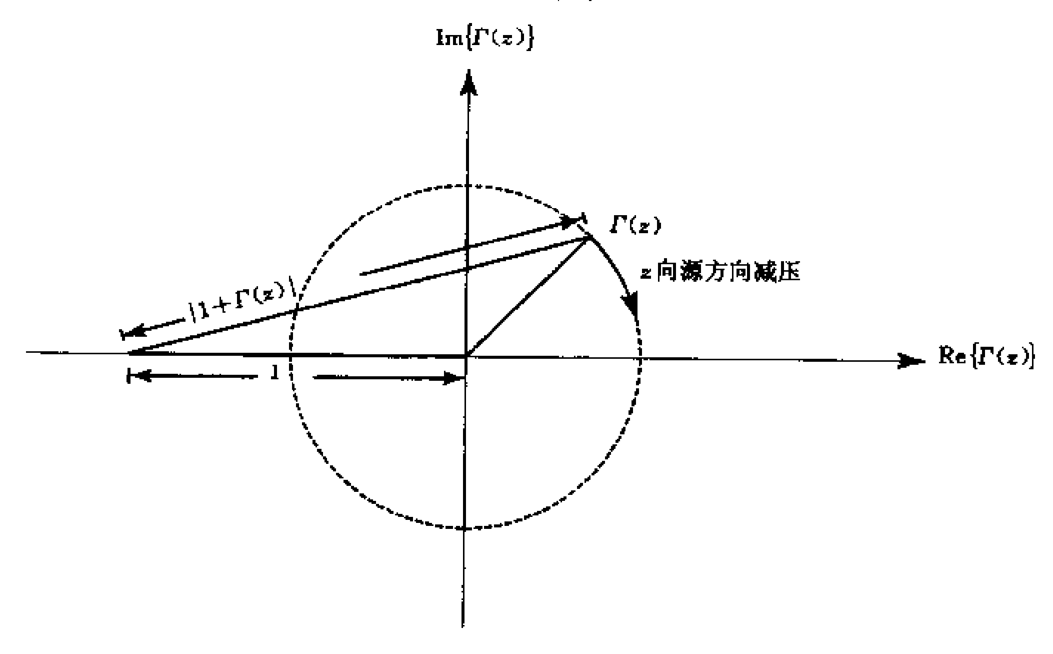


图2.3-5 复 Γ 平面上 $\Gamma(z)$ 的运动

这里应该记住我们约定负载位于 $z=0$,而源的坐标为 $z=-l$。在图2.3-6中,画出了电压幅度 $|V(z)|=|V_0||1+\Gamma(z)|$。图示的结果被称为电压驻波图像。需要注意的是电压驻波图像是周期性的,它重复的周期为 $2kz=2\pi$,或以距离 $\lambda/2$ 重复。在 $\Gamma(z)=|\Gamma_L|$ 点上,电压幅度取得最大值 $|V(z)|=|V_0|(1+|\Gamma_L|)$;在 $\Gamma(z)=-|\Gamma_L|$ 点上,电压幅度取得最小值 $|V(z)|=|V_0|(1-|\Gamma_L|)$。我们定义驻波比(VSWR)为

$$\text{VSWR}=\frac{V_{max}}{V_{min}}=\frac{1+|\Gamma_L|}{1-|\Gamma_L|}$$

V_{max}和 V_{min}之间的距离为 $\lambda/4$。当负载为开路或短路时，反射系数为 $\Gamma_L=\pm1$，电压驻波比 VSWR→∞；对于匹配负载，$\Gamma_L=0$，VSWR = 1。

例 2.3.1 考虑图2.3-6 所示的传输线上的电压驻波图像。电压驻波比为 VSWR = 3，传输线的特征阻抗为 $Z_0=50\Omega$。V_{max}的位置在 $z=-\lambda/8$。求负载阻抗 Z_L。

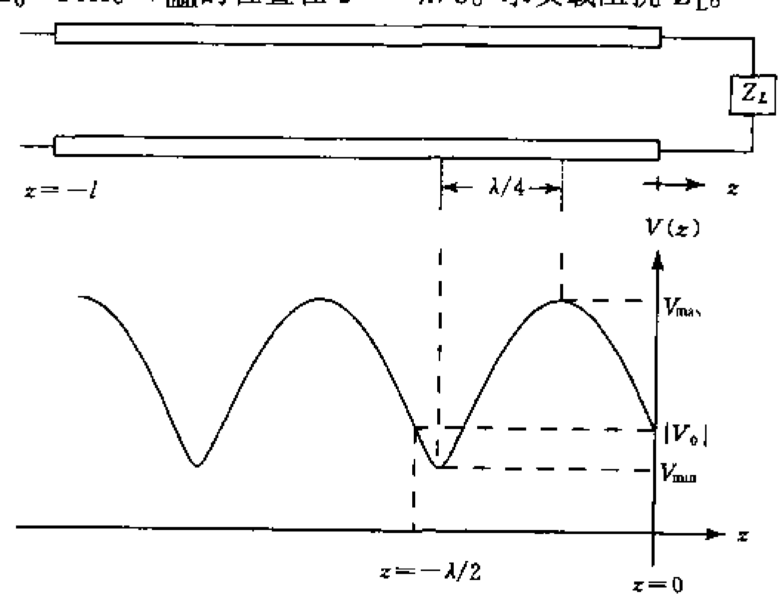


图 2.3-6 电压驻波图像

解 由

$$\frac{V_{max}}{V_{min}}=\frac{1+|\Gamma_L|}{1-|\Gamma_L|}=3$$

可得反射系数 Γ_L 的幅度为 $|\Gamma_L|=1/2$。Γ_L 的相位可以根据 V_{max}的位置得到

$$2kz=2\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{8}=\pi/2$$

所以负载反射系数为

$$\Gamma_L=\frac{1}{2}e^{\frac{j\pi}{2}}=j\frac{1}{2}$$

归一化负载阻抗为

$$Z_{Ln}=\frac{1+\Gamma_L}{1-\Gamma_L}=\frac{2+j}{2-j}=\frac{(2+j)^2}{5}=0.6+j0.8$$

从而负载阻抗为

$$Z_L=50(0.6+j0.8)=30+j40\Omega$$

专题 2.3.A 史密斯(Smith)圆图

广义反射系数 Γ_L 的最大幅度为 1。因而全部有意义的复 Γ_L平面仅限于一个半径为 1 的圆内。在该复 Γ_L平面上我们定义归一化阻抗为

$$Z_n(z)=\frac{V(z)}{Z_0 I(z)}=\frac{1+\Gamma(z)}{1-\Gamma(z)}=R_n+\mathrm{j}X_n \tag{2.3.26}$$

在复 Γ_L平面的单位圆内的每一点,可以根据公式(2.3.26)给该点指定一组数 R_n 和 X_n,所得到的结果被称为 Smith 图。Smith 图是 Philip H.Smith(1905—1987)于 1936 年首先构造的,并发表于 1939 年,它最初被称为反射图或圆图。Smith 图作为模拟计算器被用来读取复 Γ_L平面上单位圆内每一个有意义的广义反射系数的归一化阻抗。

由公式(2.3.26),可以用 $\Gamma=\Gamma_R+\mathrm{j}\Gamma_I$ 的实部和虚部确定 R_n 和 X_n。根据公式(2.3.26),即我们所知的双线性变换,可以得到

$$R_n+\mathrm{j}X_n=\frac{1+\Gamma_R+\mathrm{j}\Gamma_I}{1-\Gamma_R-\mathrm{j}\Gamma_I}=\frac{(1+\Gamma_R+\mathrm{j}\Gamma_I)(1-\Gamma_R+\mathrm{j}\Gamma_I)}{(1-\Gamma_R)^2+\Gamma_{\pm}^2}$$

从而有

$$R_n=\frac{1-\Gamma_R^2-\Gamma_I^2}{(1-\Gamma_R)^2+\Gamma_I^2}$$

$$X_n=\frac{2\Gamma_I}{(1-\Gamma_R)^2+\Gamma_I^2}$$

由上述两个方程可以推导得到

$$\left(\Gamma_R-\frac{R_n}{1+R_n}\right)^2+\Gamma_I^2=\left(\frac{1}{1+R_n}\right)^2$$

$$(\Gamma_R-1)^2+\left(\Gamma_I-\frac{1}{X_n}\right)^2=\left(\frac{1}{X_n}\right)^2$$

所以在复 Γ_L平面上,每个 R_n 的取值对应一个以 $(\Gamma_R,\Gamma_I)=\left(\frac{R_n}{1+R_n},0\right)$ 为圆心,以 $\frac{1}{1+R_n}$ 为半径的圆;每个 X_n 的取值对应一个 $(\Gamma_R,\Gamma_I)=\left(1,\frac{1}{X_n}\right)$ 为圆心,以 $\frac{1}{X_n}$ 为半径的圆。对应不同 R_n 和 X_n 的 (Γ_R,Γ_I) 在单位圆内的轨迹构成 Smith 图,如图 2.3-7 所示。

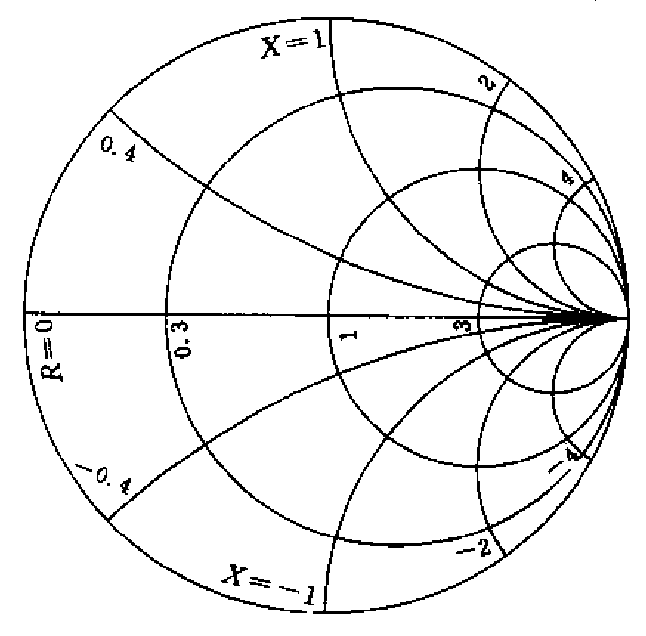


图 2.3-7　Smith 图

练习 2.3.2 在例 2.3.1 中，我们可以在 Smith 图上找到 $\Gamma = j0.5$ 的位置并得到归一化阻抗为 $Z_n = 0.6 + 0.8$。同样可以看到 VSWR = 3 是实轴与 $R = 3$ 的轨迹交点。所以逆时针方向旋转 $\pi/2$ 角度，我们可以得到 Γ_L 的位置，并从 Smith 图上读取归一化阻抗为 $Z_{Ln} = 0.6 + j0.8$。

例 2.3.2 一个电压驻波图像的测量结果如图 2.3-8 所示。

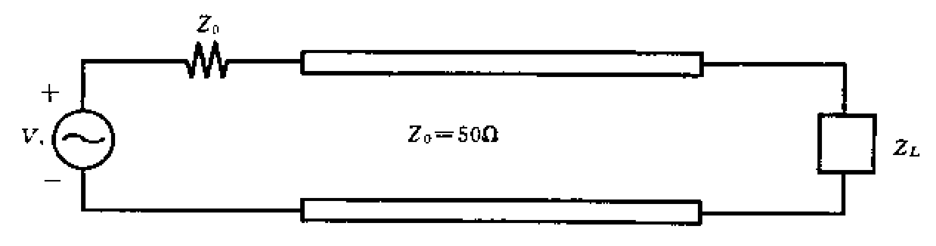


图 2.3-8 测试系统

(1) 由所给数据确定波长和负载阻抗 Z_L。

(2) 在源所在位置 $Z(z = -25\text{m})$ 处的输入阻抗是多少。

(3) 用 V_s 表示复负载电压 $V_L = V(z = 0)$。

(4) 负载 Z_L 所耗散的时间平均功率是多少。

解

(1) 由图 2.3-9 可知波长为 $\lambda = 8\text{m}$。

$$|\Gamma_L| = \frac{\text{VSWR} - 1}{\text{VSWR} + 1} = \frac{2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{3}$$

VSWR = $\frac{V_{max}}{V_{min}} = 2.0$

图 2.3-9 波长 $\lambda = 8\text{m}$

在电压波峰位置 $V_{max} = V(-2.5)$，归一化反射系数为 $\Gamma(-2.5) = \frac{1}{3}$。所以

$$\Gamma(z) = \Gamma_L e^{2jkz} \Rightarrow \Gamma(-2.5) = \Gamma_L e^{2j\left(\frac{2\pi}{8}\right)(-2.5)} = \frac{1}{3} \Rightarrow \Gamma_L = \frac{1}{3} e^{\frac{j5\pi}{4}}$$

$$\Gamma_L = \frac{Z_{Ln} - 1}{Z_{Ln} + 1} \Rightarrow Z_{Ln} = \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L} = \frac{1 + \frac{1}{3} e^{j\frac{5\pi}{4}}}{1 - \frac{1}{3} e^{j\frac{5\pi}{4}}} \approx 0.55 - j0.3$$

$$Z_L = Z_0 Z_{Ln} = 50(0.55 - j0.3) = (27.5 - j15)\Omega$$

Z_{Ln} 也可以利用 Smith 圆图得到（见图 2.3-10），在圆图上以电压最大值点（$\Gamma_{-2.5} = \frac{1}{3}$）为起

点，沿着 $|\Gamma|=\frac{1}{3}$ 的圆向着负载的方向转过 $2.5\text{m}\equiv0.3125\lambda$，就可以得到 Z_{Ln}。

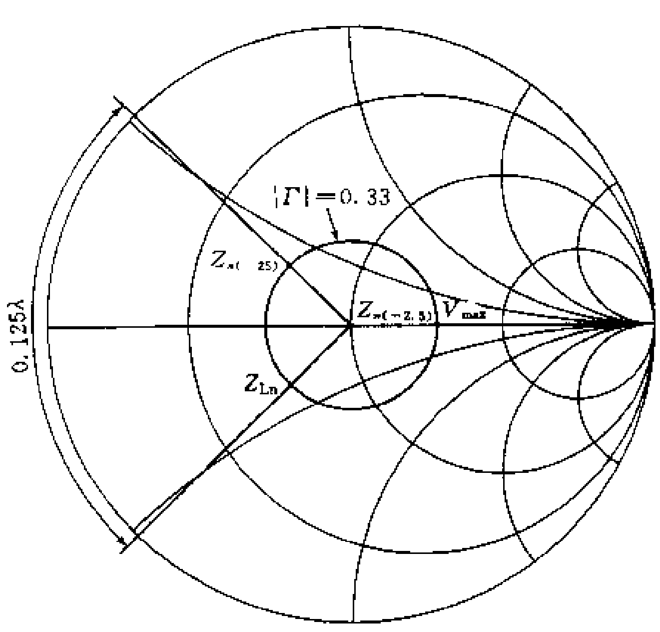


图 2.3-10　求电源处的输入阻抗

(2) 可以利用公式

$$Z(z)=Z_0\frac{Z_L\cos kz-\mathrm{j}Z_0\sin kz}{Z_0\cos kz-\mathrm{j}Z_L\sin kz}$$

式中，$kz=\frac{2\pi}{8}(-25)=-\frac{25\pi}{8}$，或者利用 Smith 圆图，$25\text{m}=3.125\lambda=6.25(\frac{\lambda}{2})=6\frac{1}{4}$。因此，在 Smith 圆图上，我们从负载向信号源的方向(顺时针)移动 $90°(0.125\lambda)$ 可以得到

$$Z_n(-25)=0.55+\mathrm{j}0.3$$

$$Z(-25)=27.5+\mathrm{j}15$$

(3) 电压在负载和阻抗上的分配如图 2.3-11 所示，其公式为

$$V(-25)=\frac{V_sZ(-25)}{Z(-25)+Z_0} \tag{2.3.27}$$

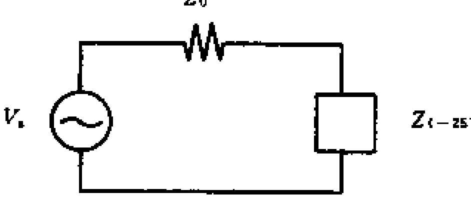


图 2.3-11　电压分配

另一种表示为

$$V(-25)=V_+[\mathrm{e}^{\mathrm{j}k(-25)}+\Gamma_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}k(-25)}] \tag{2.3.28}$$

由式(2.3.27)和(2.3.28)可以得到

$$V_+=\frac{V_sZ(-25)}{[Z(-25)+Z_0][\mathrm{e}^{\mathrm{j}k(-25)}+\Gamma_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}k(-25)}]}$$

$$V_L=V_+(1+\Gamma_L)=\frac{V_sZ(-25)(1+\Gamma_L)}{[Z(-25)+Z_0][\mathrm{e}^{\mathrm{j}k(-25)}+\Gamma_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}k(-25)}]}$$

$$V_{\mathrm{L}}=V_{\mathrm{s}}\frac{(27.5+\mathrm{j}15)(1+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{5\pi}{4}})}{(27.5+\mathrm{j}15+50)(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{25\pi}{4}}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{5\pi}{4}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{25\pi}{4}})}=V_{\mathrm{s}}(0.19+\mathrm{j}0.35)$$

从 $Z_n(-2.5)$逆时针转过 $0.3125\lambda\to Z_{\mathrm{Ln}}$;从 Z_{Ln}顺时针转过 3.125λ 或 $0.125\lambda\to Z_n(-25)$。

(4)

$$\begin{aligned}\langle P\rangle&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{V_{\mathrm{L}}I_{\mathrm{L}}^{*}\}\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{V_{\mathrm{L}}\frac{V_{\mathrm{L}}^{*}}{Z_{\mathrm{L}}^{*}}\right\}=\frac{|V_{\mathrm{L}}|^{2}}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{Z_{\mathrm{L}}^{*}}\right\}\\&=\frac{1}{2}|V_{\mathrm{s}}(0.19-\mathrm{j}0.35)|^{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{27.5+\mathrm{j}15}\right\}\\\langle P\rangle&=0.0022|V_{\mathrm{s}}|^{2}\end{aligned}$$

值得注意的是如果计算 $z=-25$ 位置上的$\langle P\rangle$,可以得到与负载位置的$\langle P\rangle$相同的结果。

$$\langle P\rangle=\frac{|V(-25)|^{2}}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{Z(-25)^{*}}\right\}=\frac{|V_{\mathrm{s}}|^{2}|Z(-25)|^{2}}{2|Z(-25)+Z_{0}|^{2}}\cdot\frac{\mathrm{Re}\{Z(-25)\}}{|Z(-25)|^{2}}$$

$$=\frac{|V_{\mathrm{s}}|^{2}\mathrm{Re}\{Z(-25)\}}{2|Z(-25)+Z_{0}|^{2}}=\frac{|V_{\mathrm{s}}|^{2}}{2}\cdot\frac{27.5}{(50+27.5)^{2}+15^{2}}=0.0022|V_{\mathrm{s}}|^{2}$$

例 2.3.3 如图2.3-12 所示,一个正弦信号发生器连接到一段长为 l 的传输线上,

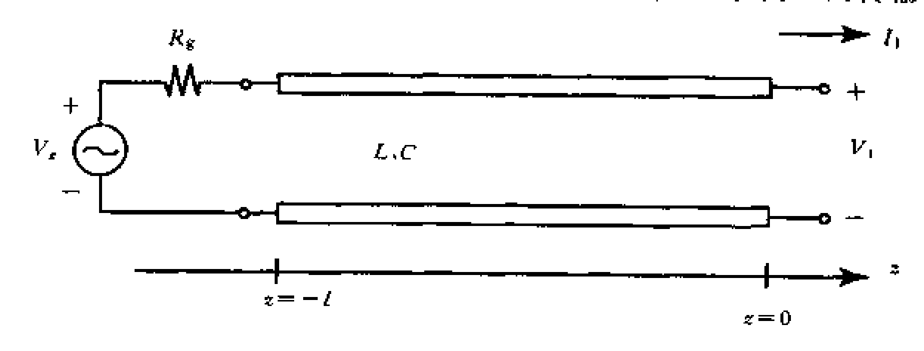


图 2.3-12 正弦信号发生器与传输线连接

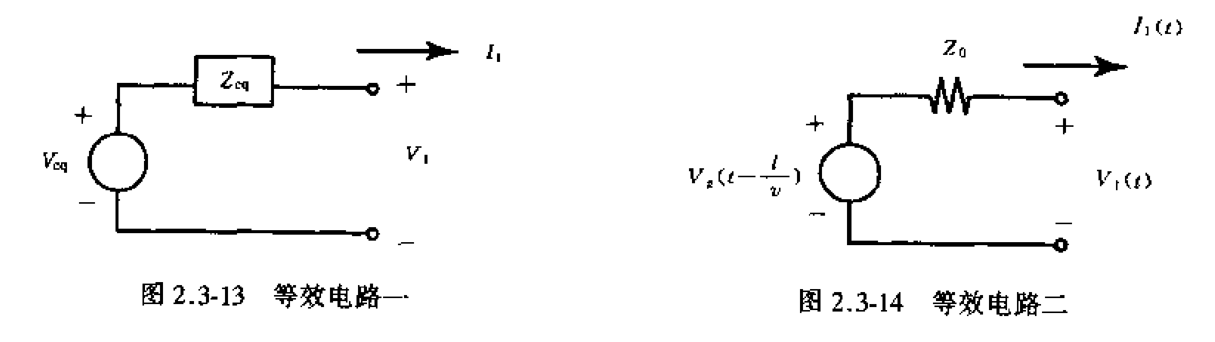


图 2.3-13 等效电路一

图 2.3-14 等效电路二

(1) 如果考虑终端状态,试确定图 2.3-12 的等效电路和图 2.3-13 中的 Z_{eq}和 V_{eq}(提示:根据电路在 $z=-l$ 位置的终端条件写出电路的约束方程,并利用联系 V_1, I_1 和 $V(-l)$, $I(-l)$ 的传输线解得一个用 V_1, I_1 和 V_g 表示的方程)。

(2) 求 $l=\frac{1}{2}\lambda(kl=\pi)$处,及 $l=\frac{1}{4}\lambda$ 处的等效电路参数。

(3) 如果 $R_g=Z_0$,求图 2.3-12 的等效电路参数。在这种情况下,试证明图 2.3-14 所示的等效电路对一般的信号源电压形式 $V_g(t)$有效。

解

(1)
$$V(z=-l)=V_+(-l)+V_-(-l)=V_+e^{jkl}+V_-e^{-jkl}$$
$$I(z=-l)=Y_0(V_+e^{jkl}-V_-e^{-jkl})$$

在信号源位置的边界条件要求

$$V(z=-l)=V_g-R_gI(z=-l)$$

可以得到

$$V_-e^{-jkl}(1-R_gY_0)=V_g-V_+e^{jkl}(1+R_gY_0)$$

所以

$$V_1=V(0)=V_++V_-=V_+\left[1-\frac{e^{jkl}(1+R_gY_0)}{e^{-jkl}(1-R_gY_0)}\right]+\frac{V_g}{e^{-jkl}(1-R_gY_0)}$$
$$I_1=Y_0V_+\left[1+e^{2jkl}\frac{(1+R_gY_0)}{(1-R_gY_0)}\right]-\frac{Y_0V_ge^{jkl}}{1-R_gY_0}$$

消去式中的 V_+,可以得到 V_1 和 I_1 的关系。进一步还可以得到

$$R_{eq}=\frac{-1+e^{2jkl}+R_gY_0(1+e^{2jkl})}{Y_0[1+e^{2jkl}-R_gY_0(1-e^{2jkl})]}$$
$$V_{eq}=\left[\frac{2(1-R_gY_0)}{1+e^{2jkl}-R_gY_0(1-e^{2jkl})}\right]\left(\frac{V_ge^{jkl}}{1-R_gY_0}\right)$$
$$=\frac{2V_ge^{jkl}}{1+e^{2jkl}-R_gY_0(1-e^{2jkl})}$$

(2) 对于 $l=\frac{\lambda}{2}$

$$V_{eq}=\frac{-2V_g}{2-R_gY_0(0)}=\frac{V_g}{V_gY_0},R_{eq}=\frac{2R_gY_0}{Y_0(2)}=R_g$$

对于 $l=\frac{\lambda}{4}$

$$V_{eq}=\frac{2jV_g}{1-2R_gY_0-1}=\frac{jV_g}{R_gY_0},R_{eq}=\frac{-2}{Y_0(-2R_gY_0)}=\frac{Z_0^2}{R_g}$$

(3) 如果 $R_g=Z_0$,那么 $R_{eq}=Z_0,V_{eq}=V_ge^{-jkl}$。对于任意的信号

$$V_g=\text{Re}\{V_ge^{j(\omega t-kz)}\}$$

可以得到

$$V_{eq}=e^{j(\omega t-kl-kz)}V_g=V_ge^{j\left[\omega\left(t-\frac{l}{v}\right)-kz\right]}\Rightarrow V_{eq}(t)=V_g\left(t-\frac{l}{v}\right)$$

例 2.3.4 传输线的双端口描述如图2.3-15 所示。

$$V(z)=V_+e^{-jkz}+V_-e^{jkz}$$
$$I(z)=Y_0(V_+e^{-jkz}-V_-e^{jkz})$$

在 $z=0$ 处有

$$V(0)=V_++V_-$$

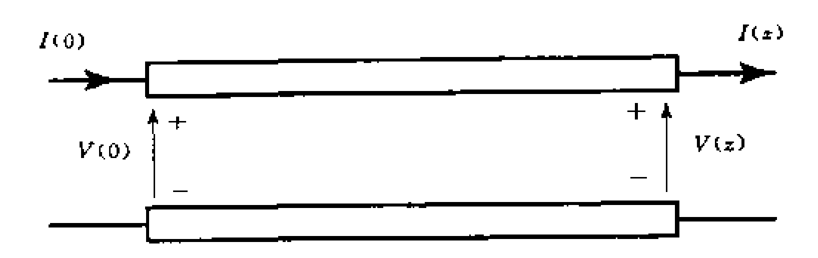


图 2.3-15　传输线的双端口描述

$$I(0) = Y_0(V_+ - V_-)$$

可以解出 V_+和 V_-为

$$V_+ = \frac{1}{2}[V(0) + Z_0 I(0)]$$

$$V_- = \frac{1}{2}[V(0) - Z_0 I(0)]$$

所以

$$V(z) = V(0)\cos kz - \mathrm{j}Z_0 I(0)\sin kz$$

$$I(z) = -\mathrm{j}Y_0 V(0)\sin kz + I(0)\cos kz$$

专题 2.3.B　周期加载传输线

将周期加载传输线的第 n 段看做一个双端口网端(见图 2.3-16),可如下表示

$$V_{n+1} = V_n \cos kl - \mathrm{j}Z_0 I_n \sin kl$$

$$I_{n+1} = -\mathrm{j}Y_0 V_n \sin kl + I_n \cos kl$$

根据 KCL,式中 $I_{n+1} = I_{n+1} + \mathrm{j}\omega C_0 V_{n+1}$。

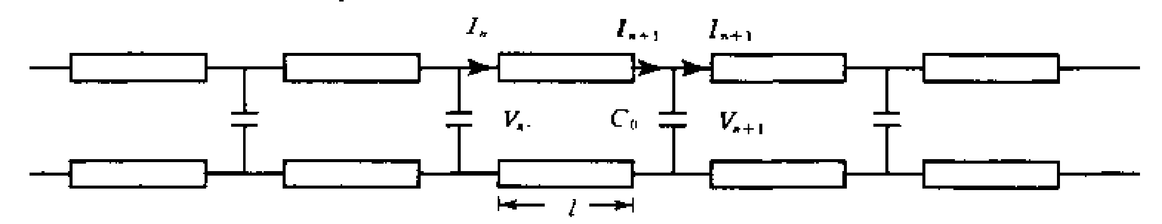


图 2.3-16　周期加载传输线

为了得到色散关系,注意 $V_{n+1} = V_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$和 $I_{n+1} = I_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$,所以

$$V_n(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta} - \cos kl) = -\mathrm{j}Z_0 I_n \sin kl$$

$$I_n(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta} - \cos kl) = -\mathrm{j}V_n(Y_0 \sin kl + \omega C_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta})$$

将上面两个方程相乘,并消去其中的 $V_n I_n$,可以得到色散方程

$$\cos\theta = \cos kl - \frac{\omega C_0}{2Y_0}\sin kl \tag{2.3.29}$$

情况 1　当传输线长度远小于波长即 $kl \ll 1$ 时,可以得到

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}(kl)^2 - \frac{\omega C_0}{2Y_0}kl$$

从而有

$$1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\omega^2 LCl^2 + \frac{\omega C_0}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}\omega\sqrt{LC}l = \frac{\omega^2}{2}Ll(Cl + C_0)$$

所以 $Cl + C_0$ 就是集总单元线的等效电容。

情况 2　如果加载电容 C_0 很大，$\omega C_0 \gg Y_0$，那么只有当 $kl \approx n\pi$ 时，色散方程才能允许 θ 取实数解，这时 l 接近于半波长的整数倍。令 $kl = n\pi + \delta(\theta)$，则有 $\cos(kl) \approx \cos(n\pi) = (-1)^n$ 和 $\sin(kl) \approx (-1)^n \delta(\theta)$。由色散方程(2.3.29)可以发现

$$\delta(\theta) = \frac{2Y_0}{\omega C_0}[1 - (-1)^n \cos\theta]$$

对于 n 为奇数情况，$\delta(\theta) = \frac{4Y_0}{\omega C_0}\cos^2\frac{\theta}{2}$；对于 n 为偶数情况，$\delta(\theta) = \frac{4Y_0}{\omega C_0}\sin^2\frac{\theta}{2}$。所以 $\delta(\theta)$ 的最大值是 $\delta = 4Y_0/\omega C_0$。

图 2.3-17 给出了 kl 随 θ 的变化。只是在一个很窄的频带内，波才可能传播。我们发现通带带宽为

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx \frac{\delta}{n\pi} = \frac{4Y_0}{n\pi\omega C_0} = \frac{4C}{n\pi\omega\sqrt{LC}C_0} = \frac{4Cl}{n\pi klC_0} \approx \frac{4Cl}{(n\pi)^2 C_0} \ll 1$$

所以，电容加载的传输线是一个带通滤波器。

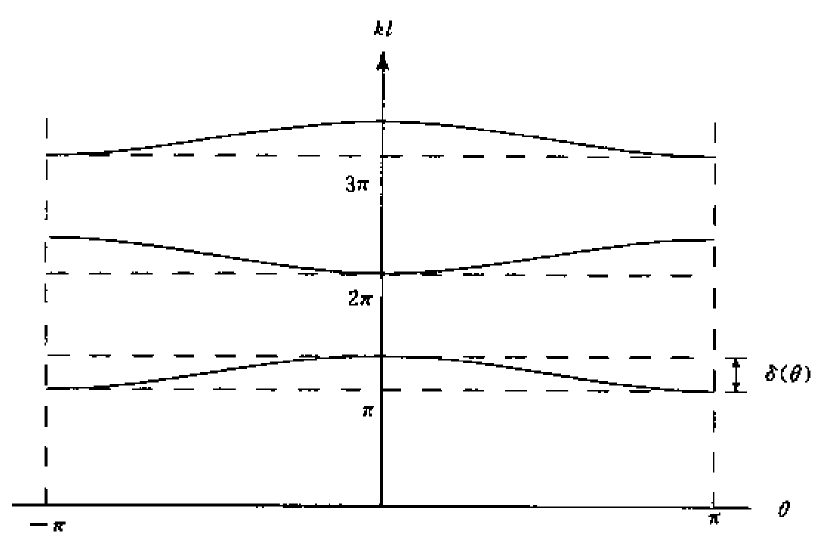


图 2.3-17　周期加载传输线作为带通滤波器

[illegible]

2.3.1　一个电压源 $V_s(t)$ 在 $z = 0$ 处连接到一个沿 $+z$ 方向无限延伸的传输线结构上(见图 2.3-18)。该传输线结构的色散方程为

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{v_0^2}$$

电压源的波形是正弦调制的正弦波

$$V_s(t) = V\cos\omega_M t \sin\omega_C t$$

其中，$\omega_M \ll \omega_C$。

(1) 利用适当的三角恒等式将 $V_s(t)$ 表示为正弦信号的和。当 $z > 0$ 时，$V(z,t)$ 等于什么。用正弦函数的乘积表示 $V(z,t)$。

(2) 如果 $\omega_M = 0.1\omega_C$，$\omega_C = \sqrt{2}\omega_0$，画出在几个不同的时刻 t 上 $V(z,t)$ 随 z 变化的波形。调制包络运动的速度是多少。

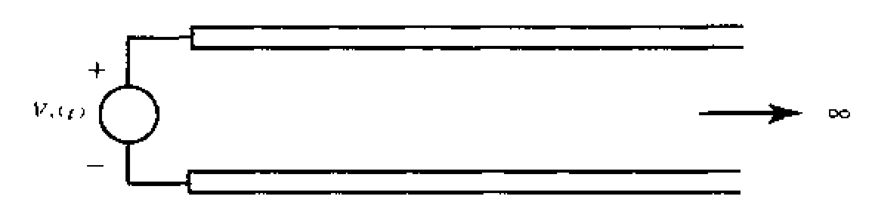


图 2.3-18 习题 2.3.1 图

2.3.2 沿传输线方向用无耗单元周期性轻微加载可以实现一个陷波滤波器。陷波滤波器是一种只对很窄频带信号阻断，而允许其他频率成分通过的电路元件。

考虑容性加载的传输线，如果 $\omega C_0 \ll Y_0$，那么所加的集总电容只能对传输线产生轻微扰动。试确定 $\theta(\omega)$ 的关系式，并证明当 $C_0 \to 0$ 时，限滤波器的阻带宽度趋于零。

2.3.3 被动遥感可以在各种频率上进行。用照相机拍照是一种光波频率的波动遥感，用工作频率为微波或更低频率的辐射计穿透目标表面观测是另一种波动遥感(眼睛就是一种光学频率的辐射计)。人们已经利用装载在飞机或卫星上的辐射计进行了对地球的被动遥感。之所以采用微波是因为在微波频率上传播路径的加载是透明的，而且没有昼夜差别。

(1) 假设在冰雪覆盖区域的地下有一个地热源。辐射计直接向下观测(见图 2.3-19)。那么这一区域可以看成是一个连接到辐射各种频率电磁波的信号源传输线，这些辐射频率包括了辐射计的工作频率。如果辐射计频率为 1.5GHz，试利用传输线模型确定辐射计接收的单位面积的来自辐射源的功率。假定辐射源向匹配负载发射的功率密度为 $30W/m^2$。

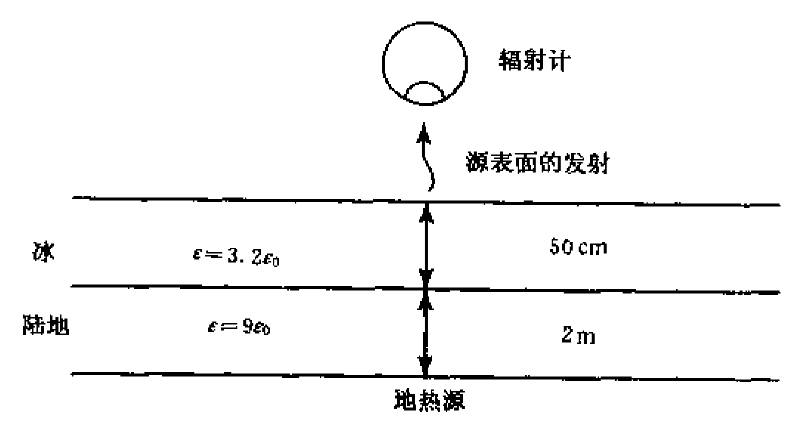


图 2.3-19 地热源的辐射模型

(2) 在一个没有地下辐射源的区域，辐射计也测量考虑物体发射率的功率辐射。根据互易原理，一个物体反射越多则发射越少。理想反射体完全反射，所以没有发射。为了确定目标的发射率，可以得到它的反射率 r，然后根据关系

$$e = 1 - r$$

计算发射率，式中 $r = |\Gamma|^2$ 是从辐射计向下看的反射系数。试计算图 2.3-19 所示模型的发射率。

2.3.4 在从飞机或卫星上对地球进行的微波遥感中，辐射计被用来测量观测区域的发射率。发射率 e 与反射率或功率反射系数的关系为 $e = 1 - r$。比如在理论上，可以确定湖面覆盖冰层的厚度。假设冰层的介电常数为 $\epsilon = 3.2(1 + i0.01)\epsilon_0$，湖水是理想反射体。试讨论所推荐采用的测量频率和辐射计可以"看"透的冰层厚度。

2.4 集总单元传输线

在前面一节中我们根据双导线传输线，特别是平行板传输线的麦克斯韦方程推导了传输线方程

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}\omega LI \tag{2.4.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}\omega CV \tag{2.4.2}$$

这里我们将证明传输线方程(2.4.1)和(2.4.2)也可以根据连续传输线的电路模型近似得到。取连续传输线的一小段,其长度为 Δz,这段传输线可以用串联电感 $L\Delta z$ 和短路电容 $C\Delta z$ 近似(见图 2.4-1)。

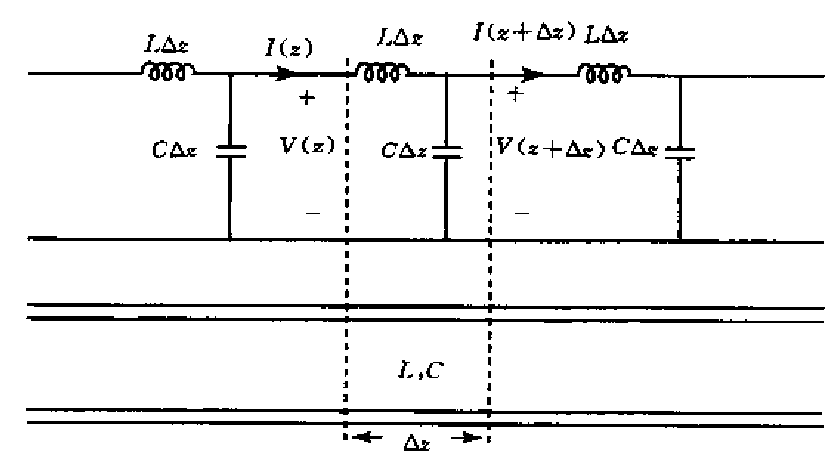


图 2.4-1 连续传输线的集总单元近似

对集总单元近似的一小段传输线应用 KVL(基尔霍夫电压定律)和 KCL(基尔霍夫电流定律),可以得到

$$\Delta V(z) = V(z+\Delta z) - V(z) = -\mathrm{j}\omega L\Delta zI(z)$$
$$\Delta I(z) = I(z+\Delta z) - I(z) = -\mathrm{j}\omega lC\Delta zV(z+\Delta z)$$

展开上式的最后一项

$$-\mathrm{j}\omega C\Delta zV(z+\Delta z) = -\mathrm{j}\omega C\Delta zV(z) - \mathrm{j}\omega C\Delta z^2 V'(z) - \cdots$$

令 $\Delta z \to 0$,保留第一项关于 Δz 的一阶近似项。上面的方程有下列结果

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{V(z+\Delta z) - V(z)}{\Delta z} = -\mathrm{j}\omega LI(z)$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{I(z+\Delta z) - I(z)}{\Delta z} = -\mathrm{j}\omega CV(z)$$

从而得到传输线方程(2.4.1)和(2.4.2)。

如图 2.4-2 所示,可直接应用 KVL 和 KCL 推导集总单元传输线上的波动方程,并研究波动的形态。每一小段传输线的物理长度为 l。对传输线上的第 n 小段应用 KVL 和 KCL,则可以得到

$$V_n - V_{n+1} = \mathrm{j}\omega L_0 I_{n+1} \tag{2.4.3}$$

$$I_n - I_{n+1} = \mathrm{j}\omega C_0 V_{n+1} \tag{2.4.4}$$

考虑类似于连续传输线上形如 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$ 的正向传播的行波。定义 $kz = knl = n\theta$,其中 $\theta = kl$ 是沿每个传输线小段的相移,可以作如下表示

$$V_n = V_+ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\theta} \tag{2.4.5}$$

$$I_n = I_+ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\theta} \tag{2.4.6}$$

将式(2.4.5)和(2.4.6)代入式(2.4.3)和(2.4.4),可以得到

$$V_+\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(n+1)\theta}\right] = \mathrm{j}\omega L_0 I_+ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(n+1)\theta} \tag{2.4.7}$$

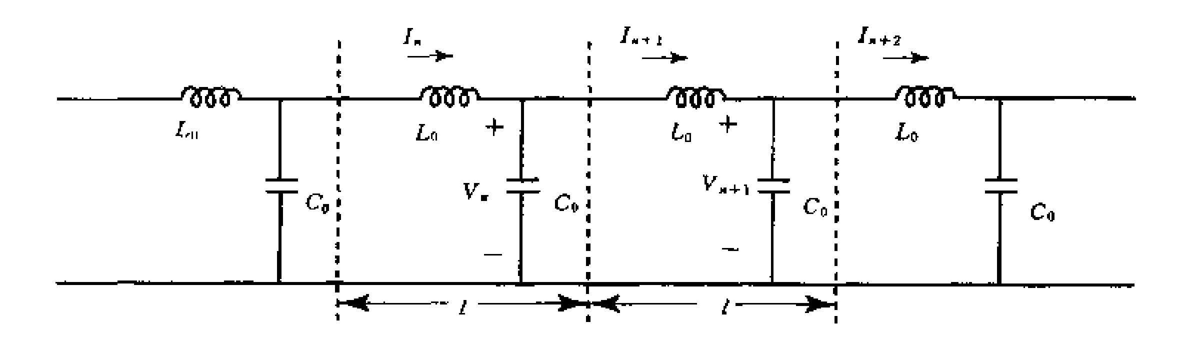


图 2.4-2 低通虑波器

$$I_+\left[e^{-jn\theta}-e^{-j(n+1)\theta}\right]=j\omega C_0 V_+ e^{-jn\theta} \tag{2.4.8}$$

将式(2.4.7)与(2.4.8)相乘并消去两边的 V_+ 和 I_+,可以得到色散方程

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{4}\omega^2 L_0 C_0=\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \tag{2.4.9}$$

式中,

$$\omega_0^2=\frac{4}{L_0 C_0} \tag{2.4.10}$$

色散关系(2.4.9)的图像如图 2.4-3 所示。

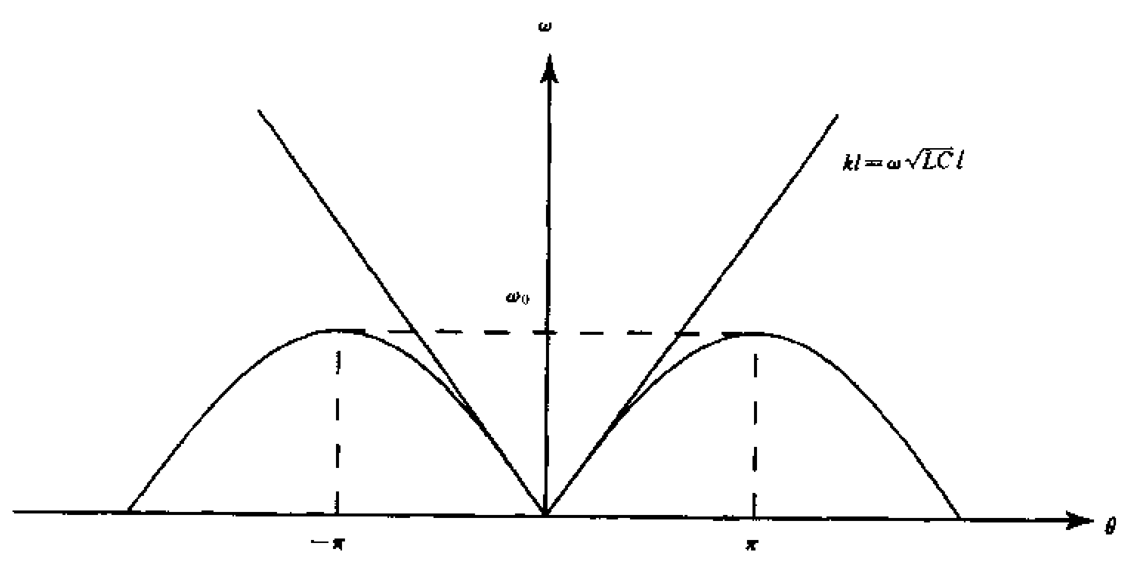


图 2.4-3 低通传输线的色散关系

在低频极限条件下,$\omega \ll \omega_0$,可有以下的近似

$$\frac{\omega}{\omega_0}=\pm\sin\frac{\theta}{2}\approx\pm\frac{\theta}{2}$$

这里当 θ 是正数时,可取上面的符号,对应沿正方向传播的波,当 θ 是负数时,可取下面的符号,对应沿负方向传播的波,所以 ω 总是正数。

取等式 $\theta=kl$,根据(2.4.10)可以得到

$$k=\frac{2\omega}{l\omega_0}=\omega\sqrt{\frac{L_0}{l}\frac{C_0}{l}}=\omega\sqrt{LC}$$

式中,$L=L_0/l$,$C=C_0/l$ 分别为单位长度上的电感和电容。所以在低频极限条件下,集总单元传输线具有和连续传输线一样的表现。

例 2.4.1 集总单元延迟线。

当 $\mu=\mu_0,\varepsilon=\varepsilon_0$ 时，连续传输线上波的传播速度为

$$v=\omega/k=1/\sqrt{LC}=1/\sqrt{\mu\varepsilon}=3\times10^8\mathrm{m/s}$$

对于集总单元传输线，假设

$$L_0=10^{-4}\mathrm{H},\quad C_0=10^{-8}\mathrm{F},\quad l=10^{-2}\mathrm{m}$$

可以得到传输线上的波速为

$$v=l/\sqrt{L_0C_0}=10^4\mathrm{m/s}$$

因此集总单元传输线可以被用作延迟线。

当 $\omega>\omega_0$ 时，传输线上的相移 θ 必然是复数，写为

$$\theta=\theta_R-\mathrm{j}\theta_I$$

这种情况下色散关系(2.4.9)变成

$$\sin\frac{\theta_R-\mathrm{j}\theta_I}{2}=\sin\frac{\theta_R}{2}\cosh\frac{\theta_I}{2}-\mathrm{j}\cos\frac{\theta_R}{2}\sinh\frac{\theta_I}{2}=\frac{\omega}{\omega_0}$$

可以得到

$$\cos\frac{\theta_R}{2}\sinh\frac{\theta_I}{2}=0$$

$$\sin\frac{\theta_R}{2}\cosh\frac{\theta_I}{2}=\frac{\omega}{\omega_0}$$

上面的方程的解是 $\theta_R=\pi,\theta_I=2\mathrm{arccosh}\dfrac{\omega}{\omega_0}$。第 n 小段传输线上的电压为

$$V_n=V_+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n(\theta_R-\mathrm{j}\theta_I)}=V_+\mathrm{e}^{-n\theta_I}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\theta_R}$$

式中，$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\theta_R}$项表示传输线从第 n 小段到第 $n+1$ 小段的相移，$\mathrm{e}^{-n\theta_I}$表示从第 n 小段到第 $n+1$ 小段波有幅度的衰减。由于在传输线上 $\omega>\omega_0$ 的高频波被衰减，而 $\omega<\omega_0$ 可以无衰减地通过，所以图 2.4-2 所示的集总单元传输线是一个低通滤波器。

例 2.4.2 在 $\omega\gg\omega_0$ 的极限条件下，对于低通集总单元传输线的色散关系可有 $\theta=\theta_R-\mathrm{j}\theta_I,\theta_R=\pi$，并且

$$\cosh\frac{\theta_I}{2}=\frac{\omega}{\omega_0}=\frac{1}{2}\omega\sqrt{L_0C_0}$$

取 $\omega\gg\omega_0$ 极限条件下的近似

$$\cosh\frac{\theta_I}{2}=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\theta_I/2}+\mathrm{e}^{-\theta_I/2})\approx\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\theta_I/2}$$

可以得到

$$\mathrm{e}^{\theta_I/2}=\omega\sqrt{L_0C_0}$$

第 n 个模式的电压是

$$V_n=V_+\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\pi}\mathrm{e}^{-n\theta_I}=\left(\frac{-1}{\omega^2L_0C_0}\right)^n$$

V_{n+1}与 V_n 的比值是

$$\frac{V_{n+1}}{V_n}=\frac{-1}{\omega^2 L_0 C_0}$$

根据基本电路理论，考虑第 $n+1$ 小段传输线的电流为 $I_{n+2}=0$，电压 V_n 可分成阻抗为 $\mathrm{j}\omega L_0$ 的电感上的电压和跨过阻抗为 $1/\mathrm{j}\omega C_0$ 的电容的电压。我们有

$$\frac{V_{n+1}}{V_n}=\frac{1/\mathrm{j}\omega C_0}{\mathrm{j}\omega L_0+1/\mathrm{j}\omega C_0}\approx\frac{1/\mathrm{j}\omega C_0}{\mathrm{j}\omega L_0}=\frac{-1}{\omega^2 L_0 C_0}$$

所以在很高的频率上，电感表现为开路状态，电容则逼近短路状态。

考虑图 2.4-4 所示的一般集总单元传输线，阻抗和导纳分别为 $Z_0=R_0+\mathrm{j}X_0$ 和 $Y_0=G_0+\mathrm{j}B_0$。根据 KVL 和 KCL 有

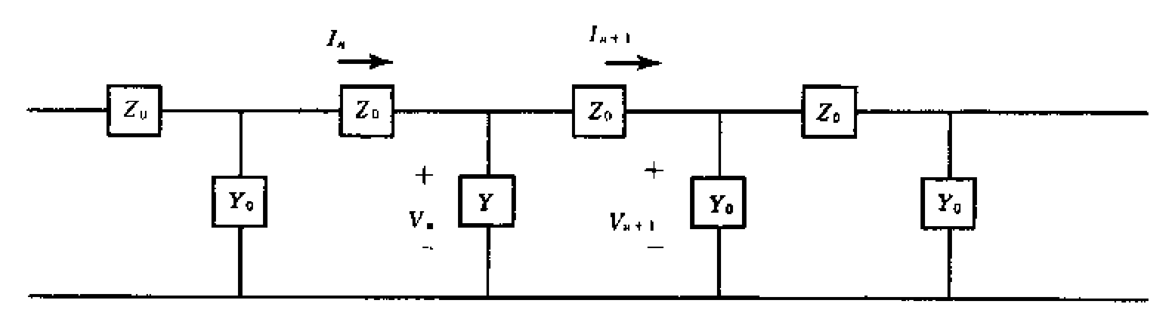


图 2.4-4　一般集总单元传输线

$$V_n-V_{n+1}=Z_0 I_{n+1}$$

$$I_n-I_{n+1}=Y_0 V_n$$

对于式(2.4.5)和(2.4.6)给出的行波解，色散关系变成

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=-\frac{1}{4}Z_0Y_0 \qquad (2.4.11)$$

当 $Z_0=\mathrm{j}\omega L_0$，$Y_0=\mathrm{j}\omega C_0$ 时，色散关系(2.4.11)简化为(2.4.9)。

例 2.4.3　高通集总单元传输线。研究 $Z_0=1/\mathrm{j}\omega C_0$，$Y_0=1/\mathrm{j}\omega L_0$ 的集总单元传输线上的波的特性。

解　集总单元传输线如图 2.4-5 所示。

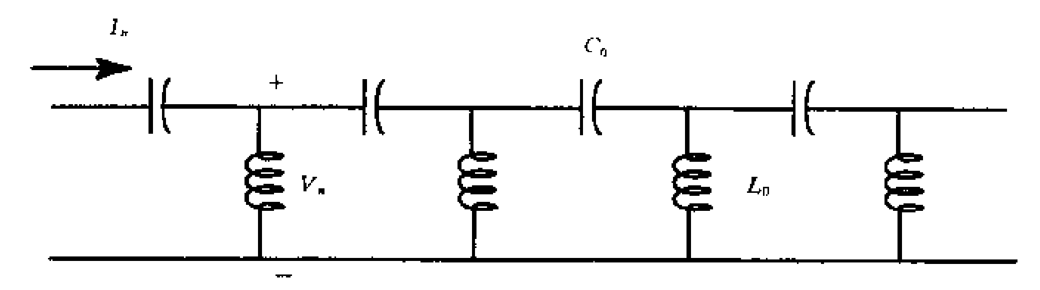


图 2.4-5　高通集总单元传输线

由色散关系(2.4.11)，可以得到

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{4\omega^2 L_0 C_0}\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \qquad (2.4.12)$$

式中，

$$\omega_0 = 1/2\sqrt{L_0 C_0}$$

可以看到，当 $\omega > \omega_0$ 时，θ 是实数；当 $\omega < \omega_0$ 时（见 2.4-6），θ 是复数。高频（$\omega > \omega_0$）通过，而低频（$\omega < \omega_0$）截止。这是由于对高频电容表现为短路而电感接近于开路。

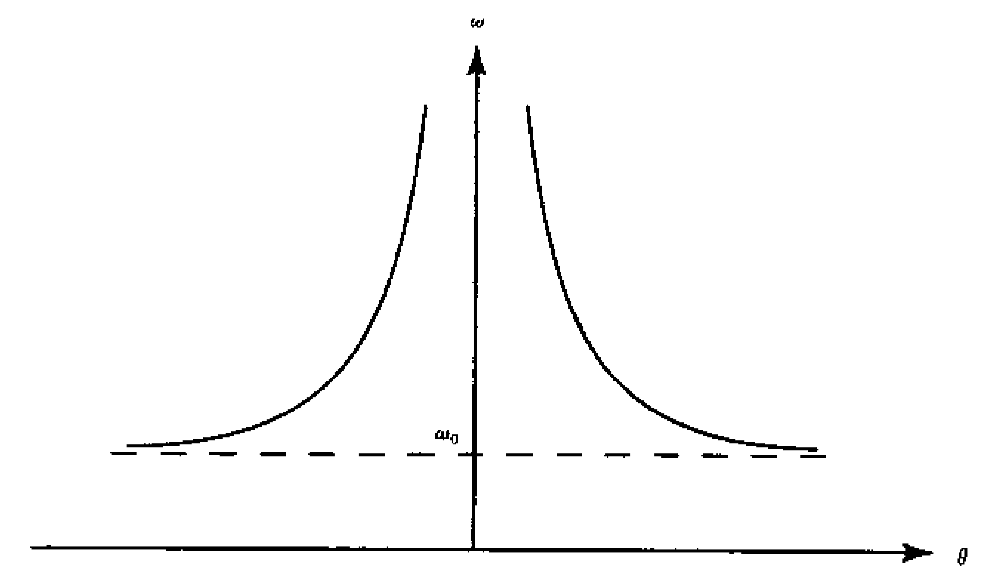


图 2.4-6 高通集总单元传输线的色散曲线

例 2.4.4 集总单元传输线是色散线。

在式(2.4.9)和(2.4.11)所给出的集总单元传输线的色散关系中，ω 和 k 不再满足线性关系。当 ω 的值变化时，由 $v=\omega/k$ 所表示的波速也是随 ω 变化的函数。可把由 $v=\omega/k$ 所表示的波速称为相速度。

由于信号波形包含一个频谱，而频谱中的每个频率分量以不同的速度传播，所以信号沿传输线传播时波形将会发生变化。当 k 不是 ω 的线性函数时，可称系统是色散的。由于信号是由一个频段，或者由以一个载波频率为中心的一群频率所构成，所以我们将在下面的例子中研究群速度的定义。值得注意的是由斜率 ω/k 所表示的相速度可以变得比光速还大。事实上，色散介质中的波的相速度经常比光速大，但表示信号传播速度的群速度却总比光速小。

例 2.4.5 群速。

在 $z=0$ 处令载波频率为 ω_c 的信号的形式为

$$V_s(t) = m(t)\cos\omega_c t \tag{2.4.13}$$

可写出信号的傅里叶变换对

$$V_s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}V_s(\omega)e^{j\omega t}$$

$$V_s(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}dt V_s(t)e^{-j\omega t}$$

对于式(2.4.13)所表示的信号 $V_s(t)$，可以得到

$$V_s(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}dt m(t)\frac{1}{2}\left[e^{-j(\omega t-\omega_c t)} + e^{-j(\omega t+\omega_c t)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[m(\omega-\omega_c) + m(\omega+\omega_c)\right]$$

特别强调,如果令调制函数 $m(t)$ 是在时间 $-T$ 到 T,幅度为 V_0 的方脉冲,那么

$$V_s(\omega) = \int_{-T}^{+T} \mathrm{d}t\, \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega t - \omega_c t)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega t + \omega_c t)}\right]$$

$$= V_0 T\left[\frac{\sin(\omega - \omega_c)T}{(\omega - \omega_c)T} + \frac{\sin(\omega + \omega_c)T}{(\omega + \omega_c)T}\right]$$

所以信号频谱 $V_s(\omega)$ 在 $\omega = \pm\omega_c$ 时取很大的峰值,信号频谱宽度是 $2\pi/T$ 量级,如果脉冲宽度包含很多的载波周期,信号频谱宽度将比 ω_c 小得多。

对于沿 $+\hat{z}$ 方向传播的波,在 z 处的信号变成

$$V(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} V_s(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\omega t - k(\omega)z]}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\left\{V_s(-\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\omega t - k(\omega)z]} + V_s(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}[\omega t + k(-\omega)z]}\right\} \tag{2.4.14}$$

$$= 2\mathrm{Re}\left\{\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} V_s(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\omega t - k(\omega)z]}\right\}$$

式中利用了关系式 $k(-\omega) = -k(\omega)$。在线性情况下,由 $k(\omega) = \omega/v$ 可以得到 $k(-\omega) = -\omega/v = -k(\omega)$。

在 ω_c 附近对色散关系 $k = k(\omega)$ 进行泰勒(Taylor)展开

$$k(\omega) \approx k(\omega_c) + \left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)_{\omega = \omega_c}(\omega - \omega_c) + \cdots$$

将其代入(2.4.14),并注意到 $m(2\omega) \approx 0$,可以得到

$$V(z,t) \approx \mathrm{Re}\left\{\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} m(\omega - \omega_c)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-\omega_c)\left[t - \left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)_{\omega=\omega_c} z\right]}\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\omega_c t - k(\omega_c)z]}\right\}$$

$$= m\left[t - \left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)_{\omega = \omega_c} z\right]\cos[\omega_c t - k(\omega_c)z] \tag{2.4.15}$$

所以当载波以相速 $\omega_c/k(\omega_c)$ 运动时,信号包络的运动速度为

$$v_g = \left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)_{\omega = \omega_c}^{-1} \tag{2.4.16}$$

这个速度就是群速。

例 2.4.6 高通集总单元传输线是反向波线。

由图 2.4-6 所示的高通滤波器的色散曲线可以看出对于 $\omega > \omega_0$,当相速为正时群速为负,当相速为负时群速为正,所以在这种情况下传输线上的行波的相速和群速的方向相反,并被称为反向波线。

练习 2.4.1 注意当 $\omega \gg \omega_0$ 时群速可以比光速大。如果用连续线段的周期加载传输线的高通滤波器模型模拟导线连接集总单元的情形,就可以修正这种非因果的结果。当频率很高时试用 KVL 和 KCL 的差别进行解释。

例 2.4.7 波阻抗。

对于正向传播波 $V_n = V_+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\theta}$,将 KVL 和 KCL 用于低通 LC 集总单元传输线

$$V_+(1-e^{j\theta}) = j\omega L_0 e^{-j\theta} I_+$$
$$I_+(1-e^{-j\theta}) = j\omega C_0 V_+$$

可以得到色散关系 $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\omega\sqrt{L_0 C_0} = \frac{\omega}{\omega_0}$。

在第 n 个波节点的电压的一般解为

$$V_n = V_+ e^{-jn\theta} + V_- e^{jn\theta}$$

对于正向传播波的阻抗是

$$Z_+ = \frac{V_+}{I_+} = \frac{1-e^{-j\theta}}{j\omega C_0} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\omega C_0}\left(\cos\frac{\theta}{2} - j\sin\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\left(\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} - j\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

相应的导纳是

$$Y_+ = \frac{1}{Z_+} = \sqrt{\frac{C_0}{L_0}}\left(\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} + j\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

当频率高于截止频率时,我们发现

$$Y_\pm = \frac{j\omega C_0}{1+e^{\mp\alpha}}$$

所以当频率高于截止频率时传输线的特性导纳是纯电抗性的。

可以看到在低于截止频率的传输范围内,特性阻抗是频率的函数。所以对于集总单元传输线要实现宽带匹配是困难的。当频率远低于截止频率时,可以忽略式中的 ω^2/ω_0^2,从而得到匹配负载阻抗为

$$Z_L \approx \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\left(1 - j\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} - j\omega\frac{L_0}{2}$$

虽然 $-L_0/2$ 在物理上是不可实现的,但这样的匹配阻抗与集总单元 L_0 共同得到一个满足要求的终端阻抗,即 $\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} + j\frac{\omega L_0}{2}$(见图 2.4-7)。

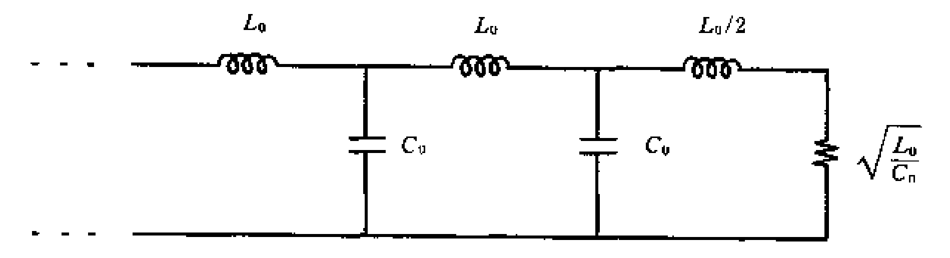


图 2.4-7 低于截止频率的匹配集总单元

练习 2.4.2 利用上述类似的方法,方向传播波的导纳为

$$Y_- = \frac{I_-}{V_-} = -Y_+^*$$

第 n 个节点的电流的一般解是

$$I_n = Y_+ V_+ e^{-jn\theta} - Y_+^* V_- e^{jn\theta}$$

注意,上面的推导是对低于截止频率的情况进行的。可思考相应的匹配负载阻抗是什么?

例 2.4.8 图 2.4-8 所示的低通滤波器在 $n=0$ 的终端点上是开路的。

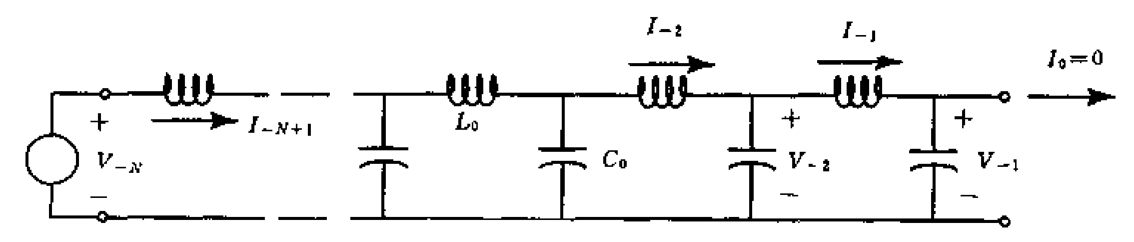


图 2.4-8 终端开路的低通滤波器

(1) 试推导电压“传输函数”V_{-1}/V_{-N}用$\theta(\omega)$表示的关系式。讨论并描述在 $\theta \ll 1$ 的频率范围内 $N \gg 1$ 的电压传输函数随频率的变化(见图 2.4-9)。

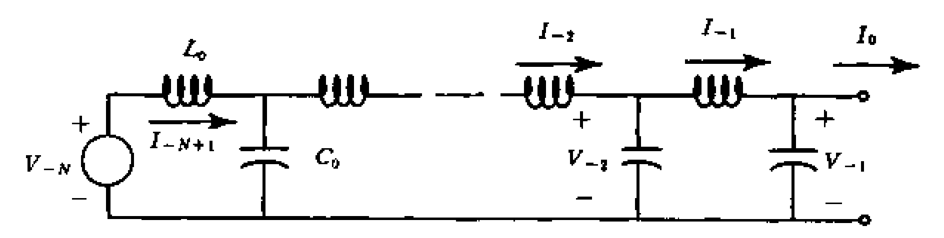


图 2.4-9 终端开路的低通滤波器的一般形式

(2) 对于单 LC 电路,电压传输函数可以用很基本的方法计算。试证明当 $N=2$ 时,由第(1)步得到的一般性结果简化为期望的简单公式。

解

(1) 可以写出沿着传输线上的电压和电流的一般表示式

$$V_{-n}=V_+ \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\theta}+V_- \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\theta}$$

$$I_{-n}=Y_+ V_+ \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\theta}-Y_+^* V_- \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\theta}$$

式中,

$$Y_+=\frac{1}{Z_+}=\frac{1}{\dfrac{2\sin(\theta/2)}{\omega C_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}}=\frac{1}{\dfrac{2(\omega/\omega_0)}{\omega C_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}}=\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\theta}{2}} \tag{2.4.17}$$

这里我们利用了关系式 $\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\omega}{\omega_0}$,$\omega_0=\dfrac{2}{\sqrt{L_0C_0}}$。开路条件 $I_0=0$ 意味着

$$Y_+V_+=Y_+^*V_-$$

即

$$V_-=\frac{Y_+V_+}{Y_+^*} \tag{2.4.18}$$

$$V_{-1}=V_+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}+V_-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}=V_+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}+\frac{Y_+V_+}{Y_+^*}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}=V_+\left(\frac{Y_+^*\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}+Y_+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}}{Y_+^*}\right)$$

因此有

$$V_+=\frac{V_{-1}Y_+^*}{Y_+^*\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}+Y_+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}}$$

同样由式(2.4.18)可以得到

$$V_-=\frac{V_{-1}Y_+}{Y_+^*\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}+Y_+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}}$$

现在有

$$V_{-N}=V_+e^{jN\theta}+V_-e^{-jN\theta}=V_{-1}\left(\frac{Y_+^*e^{jN\theta}+Y_+e^{-jN\theta}}{Y_+^*e^{j\theta}+Y_+e^{-j\theta}}\right)$$

$$=V_{-1}\left[\frac{2\mathrm{Re}\{Y_+^*e^{jN\theta}\}}{2\mathrm{Re}\{Y_+^*e^{j\theta}\}}\right]=V_{-1}\left[\frac{\mathrm{Re}\{e^{j(N-\frac{1}{2})\theta}\}}{\mathrm{Re}\{e^{j(1-\frac{1}{2})\theta}\}}\right]$$

式中利用了公式(2.4.17)所给出的 Y_+^* 的表示。根据上式可以得到

$$V_{-N}=V_{-1}\frac{\cos(N-\frac{1}{2})\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}$$

即电压传输函数为

$$\frac{V_{-1}}{V_{-N}}=\frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\cos(N-\frac{1}{2})\theta} \tag{2.4.19}$$

当 $\theta\ll1, N\gg1$ 时,集总电路表现为连续传输线。在这种情况下,$\theta\simeq2\omega/\omega_0$,所以

$$\frac{V_{-1}}{V_{-N}}\simeq\frac{1}{\cos N\theta}=\frac{1}{\cos2N(\frac{\omega}{\omega_0})}=\frac{1}{\cos(\omega N\sqrt{L_0C_0})}$$

这个传输函数与在 $z=0$ 处开路的传输线的传输函数相同,

$$\frac{V(0)}{V(-l)}=\frac{1}{\cos\beta l}=\frac{1}{\cos(\omega\sqrt{LC}l)}$$

该传输函数随频率的变化如图 2.4-10 所示。

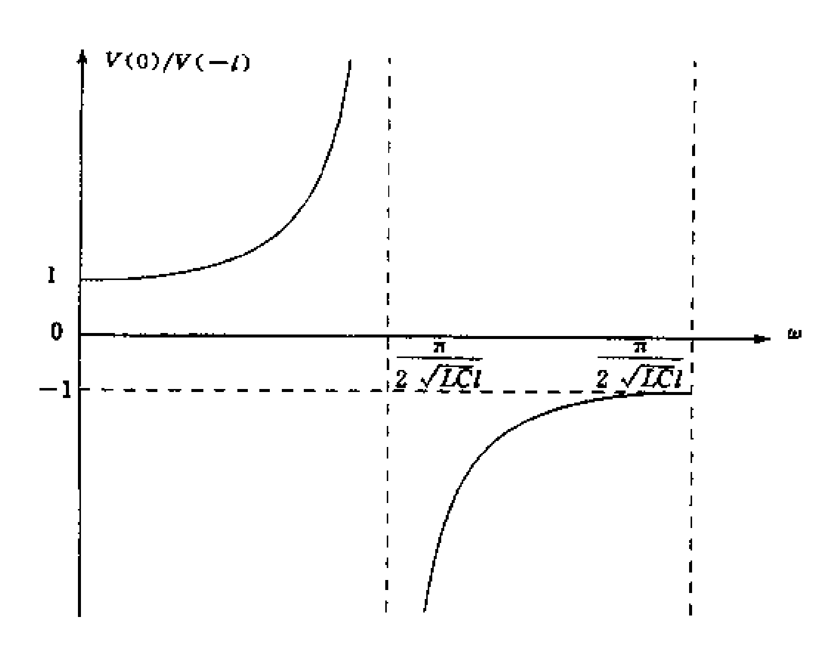


图 2.4-10 随频率变化的传输函数

(2) 可以证明对于单 LC 电路(见图 2.4-11)

$$V_{-2}=V_{-1}+j\omega L_0(j\omega C_0)V_{-1}$$

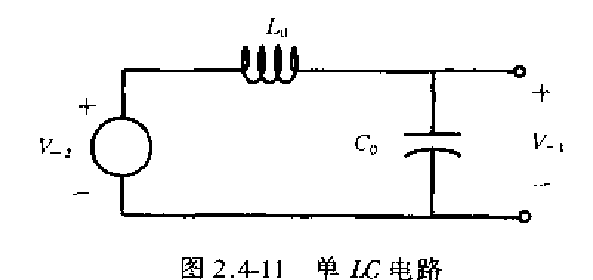


图 2.4-11 单 LC 电路

即

$$\frac{V_{-1}}{V_{-2}}=\frac{1}{1-\omega^2L_0C_0}=\frac{1}{1-4\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}},\quad \omega_0=\frac{2}{\sqrt{L_0C_0}} \tag{2.4.20}$$

现在令式(2.4.19)中 $N=2$,得到

$$\frac{V_{-1}}{V_{-2}}=\frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{3}{2}\theta}=\frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{4\cos^3\frac{1}{2}\theta-3\cos\frac{1}{2}\theta}=\frac{1}{4\cos^2\frac{1}{2}\theta-3}$$

$$=\frac{1}{4\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)-3}=\frac{1}{1-4\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

与式(2.4.20)的结果相同。

例 2.4.9 传输线上的感性加载。

传输线上的损耗作用引起传播波的衰减和色散。由于色散,不同频率以不同的速度传播造成任意的非正弦波的波形失真。在电话出现的早期,由于传输线上的损耗引起的衰减和色散阻碍了长途语音电话通信的发展。1893 年 Oliver Heaviside 发展了根据麦克斯韦方程的传输线理论。在此之前,传输线是用包括串联电阻 R 和并联电容 C 网络的电路参数的扩散方程描述的。通过正确地考虑电感的作用,Heaviside 注意到随着电感的增大,衰减和相位失真的影响都会减小,因此他提出用集总电感器周期加载电话线。1900 年,哥伦比亚大学的 Pupin 用实验验证了他的设想。

可以不用 Pupin 线圈 L_P 加载连续传输线的模型,而用集总电感和集总电容模型描述 Pupin 线圈之间的传输线(见图 2.4-12)。当线圈之间的间距远小于波长时,这种模型是有效的。根据 KCL 和 KVL,有

$$I_n-I_{n+1}=\mathrm{j}\omega C_0V_n$$

$$V_n-V_{n+1}=[\mathrm{j}\omega(L_0+L_P)+R_0]I_{n+1}$$

假设 V_n, I_n 的解为

$$I_n=I_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\theta}$$

$$V_n=V_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\theta}$$

由色散关系(2.4.11)可以得到

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=-\frac{1}{4}Z_0Y_0=\frac{1}{4}[\omega^2(L_0+L_P)C_0-\mathrm{j}\omega R_0C_0]$$

假定 θ 很小,$\sin^2\frac{\theta}{2}\approx\left(\frac{\theta}{2}\right)^2$,对 $R_0/\omega(L_0+L_P)\ll1$ 的情况,得到

$$\theta = \pm\omega\sqrt{(L_0+L_P)C_0}\left[1+\mathrm{j}\frac{R_0}{\omega(L_0+L_P)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx \pm\omega\sqrt{(L_0+L_P)C_0}\left[1+\frac{R_0^2}{8\omega^2(L_0+L_P)^2}\right]\mp\mathrm{j}\frac{R_0}{2}\sqrt{\frac{C_0}{L_0+L_P}}$$

可以看到,随着 L_P 的增加,衰减和相位失真都减小。但在上面的分析中要求 $|\theta|\ll 1$,这一要求等效为工作频率远低于截止频率。对于语音通信,我们感兴趣的是12kHz以下频率信号的传播。假定 $R_0=0$,则要求 $24\times10^3\pi\sqrt{(L_0+L_P)C}\ll 1$。这一要求给出了 L_P 的上限要求。

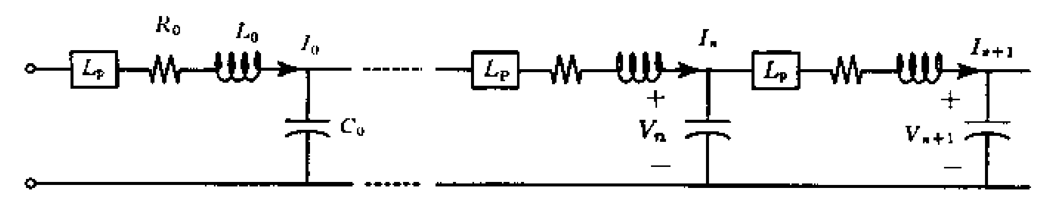


图 2.4-12 Pupin线圈的集总参数模型

习题

2.4.1 频率 $\omega<\omega_0=1/2\sqrt{L_0C_0}$ 的波不能在图2.4-5所示的集总传输线形式的高通滤波器中传播。

(1) 假设电压满足

$$V_{-n}=V_+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\theta_r}\mathrm{e}^{-n\theta_I}$$

当 $\omega<\omega_0$ 时,θ_r 和 θ_I 是什么。画出 $\omega<\omega_0$ 时 θ_r 和 θ_I 随频率 ω 变化的曲线。

(2) 当频率取 $\omega\ll\omega_0$ 的极限情况时,写出 $\frac{V_{-n+1}}{V_{-n}}$ 的近似表达式,并说明怎样利用简单的电路模型推导这一结果。

2.4.2

(1) 确定图2.4-13所示的集总传输线的传播常数 $\theta(\omega)$。试证明结果可以写成下面的形式

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega_1^2}$$

式中 ω_0^2,ω_1^2 都是常数。

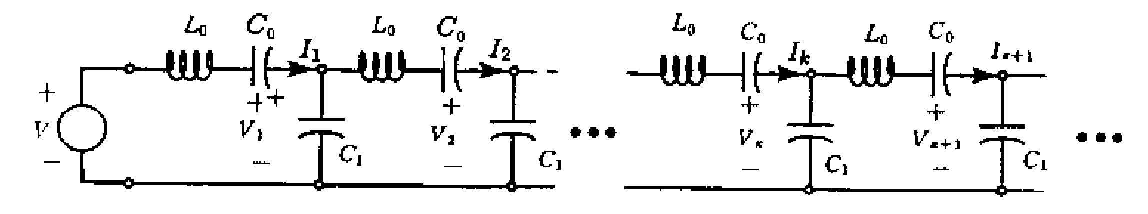


图 2.4-13 某传输线

(2) 传输线支持传输波的频率范围,即允许 θ 取得实数解的频率范围是什么?

2.4.3 在周期加载传输线上,一些频率的群速比光速小得多,所以周期加载传输线可以作为窄带信号延迟线。为了说明这一结果考虑容性加载传输线,其单元长度远小于波长。

(1) 通过适当借鉴群速公式的推导过程,证明集总传输线每一段上准单频信号的时间延迟的一般表示为

$$\tau_d=\frac{\partial\theta(\omega)}{\partial\omega}\text{(对于准单频信号)}$$

对图2.4-14所示传输线计算 τ_d,并证明当 $\omega\to\omega_0$ 时 $\tau_d\to\infty$。

(2) 由于损耗而引起的衰减是实现长时间延迟的一个实际的限制因素。对图2.4-14所示传输线考虑一

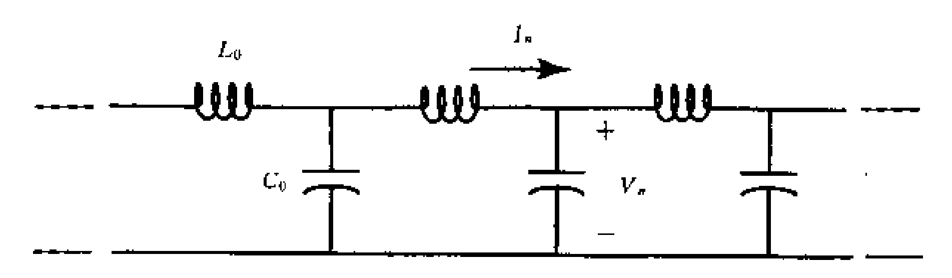


图 2.4-14 传输线

个与 L_0 串联的电阻 R_0，那么对于正向行波将有一个单位长度传输线的衰减 α，其中，$V_n(\omega) \simeq e^{-jn\theta - n\alpha}$。利用能量守恒定律证明，当 $\alpha \ll 1$ 时，对于任意的周期结构有

$$2\alpha = \frac{\langle P_d \rangle}{\langle P_n \rangle}$$

其中，$\langle P_d \rangle$ 是第 n 个单元时间平均耗散功率，$\langle P_n \rangle$ 是第 n 个终端上的时间平均功率。以上面的表达式为基础，根据微扰理论计算当 R_0 很小时的 α。利用这种方法证明

$$\alpha = \frac{R_0 \sqrt{C_0/L_0}}{2\sqrt{1 - \omega^2/\omega_0^2}}$$

2.4.4 考虑如图 2.4-15 所示的电路中集总单元传输线。

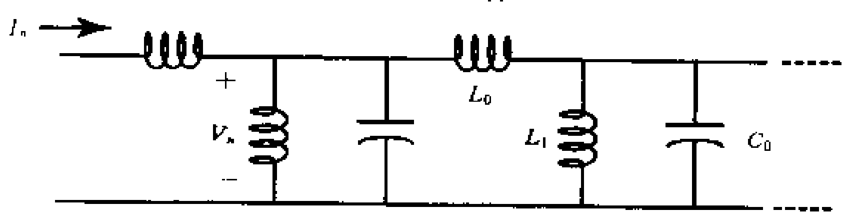


图 2.4-15 集总参数传输线

(1) 推导传输常数 $\theta(\omega)$ 的表达式。证明其结果可以写成下面的形式

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega_0^2}$$

并给出常数 ω_0 和 ω_1。

(2) 说明在什么频段上这样的传输线可以支持"传播"波(取 θ 的实数解)？对 $L_1 = L_0$ 画出 θ 随 ω 变化的曲线。

2.4.5 在一些情况下，利用集总单元模型描述实际的连续结构是很有用的。这种离散模型的一个问题是进行连续结构的离散化时划分的单元长度应该小到什么程度才能实现合理的逼近精度。下面的问题将描述一个功率系统的情况。

(1) 推导并画出集总单元传输线模型的相位误差随归一化频率(相对截止频率)的变化规律。相位误差的定义为

$$\text{相位误差} = \frac{\text{一定长度的实际传输线的相移} - \text{等效集总单元的相移}}{\text{该长度实际传输线的相移}}$$

画图的范围限于频率小于截止频率。

(2) 假设一个功率传输线的模型参数为 $L = 1.45\text{mH/英里}$ 和 $C = 0.021\mu\text{F/英里}$。对于一段长度为 10 英里的传输线，在什么频率上(1)中所定义的相位误差等于 5%。

2.4.6

(1) 确定图 2.4-16 所示后向波传输线的色散关系。即假设 $V_n = Ae^{-jn\theta}$，$I_n = Be^{-jn\theta}$，推导 $\theta(\omega)$ 的表达式，并画出 $\omega > \omega_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{L_0 C_0}}$ 时的 $\theta(\omega)$ 曲线。

(2) 对于给定的频率 $\omega > \omega_0$，(1)的结果给出两个实数的 θ 值(排除相差为 $2h\pi$ 的值)。确定每个对应模式的特征阻抗 $Z = V_n/I_n$，并证明时间平均功率流量的方向与相速度的方向相反。

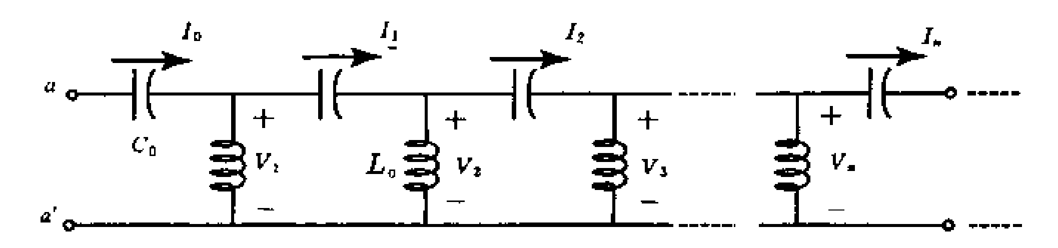


图 2.4-16 习题 2.4.6 图

(3) 假定在端口 a-a' 连接一个电压源

$$v_s = V_s \frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1 t}\sin\omega_0 t$$

其中,$\omega_1 \ll \omega_0$。确定输出电压 $v_n(t)$。

2.5 传输线上的简正模式

2.5.1 简正模式和自然频率

考虑图 2.5-1 所示的传输线。左边 $z=0$ 处短路,右边 $z=l$ 处开路。传输线上的电压和电流波由传输线方程决定

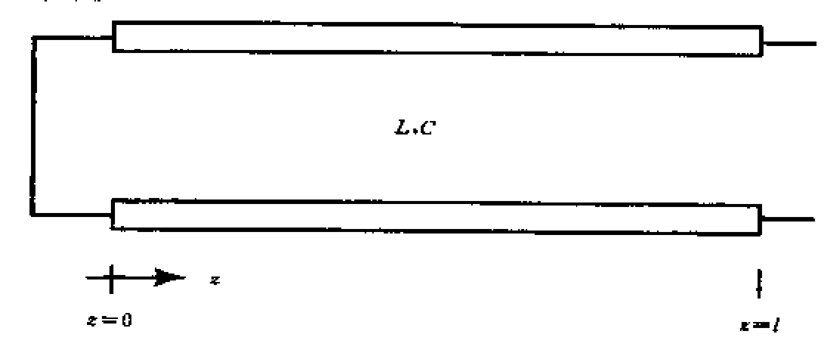


图 2.5-1 $V(z=0)=0, I(z=l)=0$ 的传输线

$$\frac{\partial}{\partial z}V(z) = -\mathrm{j}\omega LI(z) \tag{2.5.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}I(z) = -\mathrm{j}\omega CV(z) \tag{2.5.2}$$

相应的边界条件为

$$V(z=0)=0 \tag{2.5.3}$$

$$I(z=l)=0 \tag{2.5.4}$$

传输线方程(2.5.1)和(2.5.2)的通解为

$$V(z) = A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} + B\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_0}(A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} - B\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz})$$

相应的色散方程为

$$k = \omega\sqrt{LC} \tag{2.5.5}$$

根据边界条件(2.5.3)有

$$B = -A$$

根据边界条件(2.5.4)有

$$\cos kz = 0 \tag{2.5.6}$$

由(2.5.6)可以得到

$$k_n l = \frac{n\pi}{2} \qquad (n\text{ 取奇数})$$

式中用下标 n 表示 k 的取值是一系列的离散值,所以

$$k_n = \frac{n\pi}{2l} \tag{2.5.7}$$

是第 n 个模式的自然空间频率,

$$\omega_n = \frac{n\pi}{2l\sqrt{LC}} \qquad (n\text{ 取奇数}) \tag{2.5.8}$$

是第 n 个模式的自然振荡频率。

在传输线上第 n 个模式的电压分布为

$$V_n = A(e^{-jk_n z} - e^{jk_n z}) = -2jA\sin\frac{n\pi z}{2l}$$

不失一般性,我们可以令 $A = -\frac{1}{2j}$,从而

$$V_n = \sin\frac{n\pi z}{2l} \tag{2.5.9}$$

代入空间和时间变化,有

$$V_n(z,t) = \mathrm{Re}\left\{\sin\frac{n\pi z}{2l}e^{j\omega_n t}\right\} = \sin\frac{n\pi z}{2l}\cos\frac{n\pi t}{2l\sqrt{LC}} \tag{2.5.10}$$

现在观察不同时间上不同模式的电压分布 $V_n(z,t)$。在图2.5-2中,给出了最初三个模

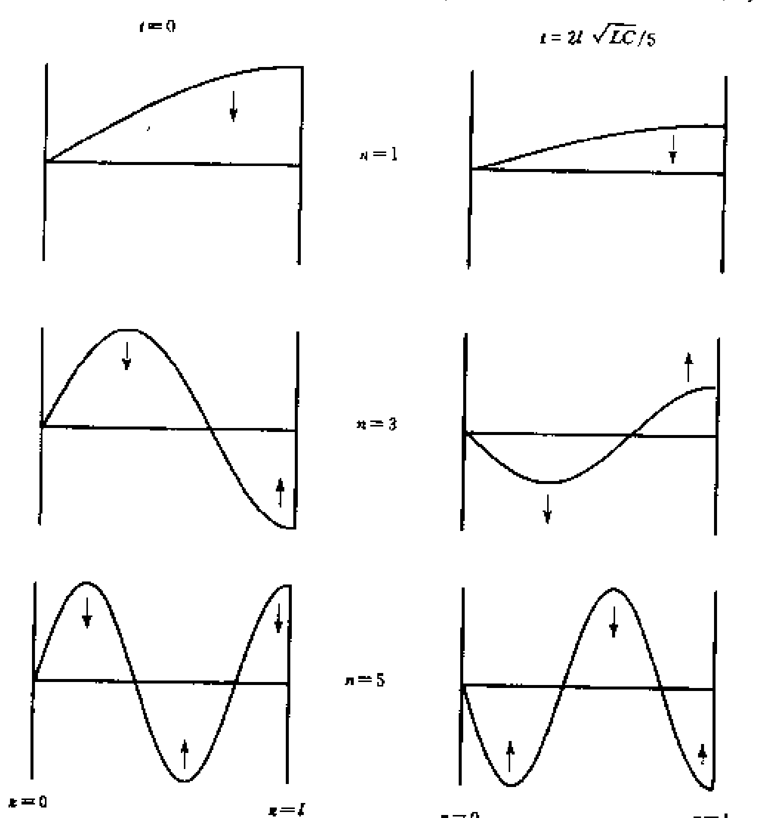


图 2.5-2 $t=0$ 和 $t=2l\sqrt{LC}/5$ 时刻三个简正模式 V_1, V_3, V_5 的电压分布

式在时间 $t=0$ 和 $t=2l\sqrt{LC}/5$ 时的电压分布。可以看到，由于随位置 z 的变化是固定的，每个模式的幅度随着时间的变化而变化，随着模式的增加，幅度随空间变化和随时间变化的频率也相应增大。图中的箭头表示随着时间的增加幅度变化的方向。

2.5.2 初值问题

考虑图 2.5-3 所示传输线。当 $t<0$ 时，传输线上被加上单位电压。在 $t=0$ 时刻，传输线左端 $z=0$ 处被短路。我们将要研究当开关闭合后的波形变化过程。

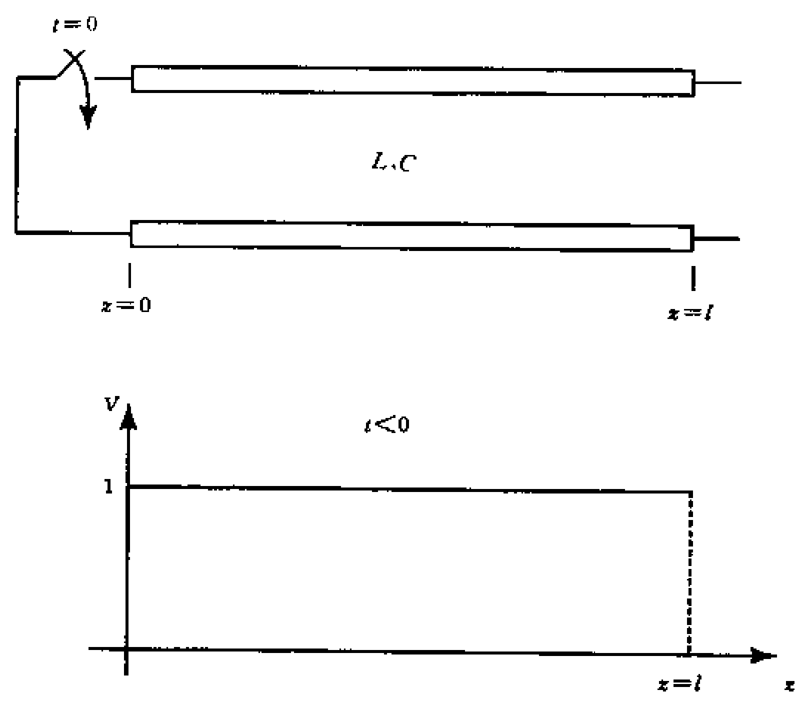


图 2.5-3　初值问题

已经知道左端 $z=0$ 处短路，右端 $z=l$ 处开路的传输线上的简正模式。每个模式都满足传输线方程及相应的边界条件。可将传输线上的电压分布表示为具有不同幅度 V_n 的这些模式的叠加。

$$V(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n\sin\frac{n\pi z}{2l}\cos\frac{n\pi t}{2l\sqrt{LC}} \tag{2.5.11}$$

该总电压 $V(z,t)$ 同时满足传输线方程和边界条件，而其中各模式的幅度 V_n 需由初始条件确定。

传输线上电压分布的初始条件为 $V(z,t=0)=1$。代入式(2.5.11)可以得到

$$\begin{aligned}1&=\sum_{n=1}^{\infty}V_n\sin\frac{n\pi z}{2l}\\&=V_1\sin\frac{\pi z}{2l}+V_3\sin\frac{3\pi z}{2l}+V_5\sin\frac{5\pi z}{2l}+\cdots\end{aligned}$$

举例来说，如果要求 V_5，可以对上式两边同乘 $\sin\frac{5\pi z}{2l}$，并进行从 $z=0$ 到 $z=l$ 的积分。上式右边除了 $V_5\sin\frac{5\pi z}{2l}$ 之外的其他各项的积分结果为零。可以得到

$$\int_0^l \mathrm{d}z\sin\frac{5\pi z}{2l} = V_5\int_0^l \mathrm{d}z\sin^2\frac{5\pi z}{2l} = \frac{l}{2}V_5$$

那么

$$V_5 = \frac{2}{l}\int_0^l \mathrm{d}z\sin\frac{5\pi z}{2l}$$

可以得到系数的一般形式为

$$V_n = \frac{2}{l}\int_0^l \mathrm{d}z\sin\frac{n\pi z}{2l} = \frac{4}{n\pi}\left(-\cos\frac{n\pi z}{2l}\right)_0^l = \frac{4}{n\pi}$$

所以当 $t \geqslant 0$ 时传输线上的电压分布为

$$V(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi z}{2l}\cos\frac{n\pi t}{2l\sqrt{LC}} \tag{2.5.12}$$

现在我们研究电压分布在几个不同时刻 $t=0, t=l\sqrt{LC}/2, t=l\sqrt{LC}$ 和 $t=3l\sqrt{LC}/2$ 的情况。在图 2.5-4 中,给出了前面三项的和。

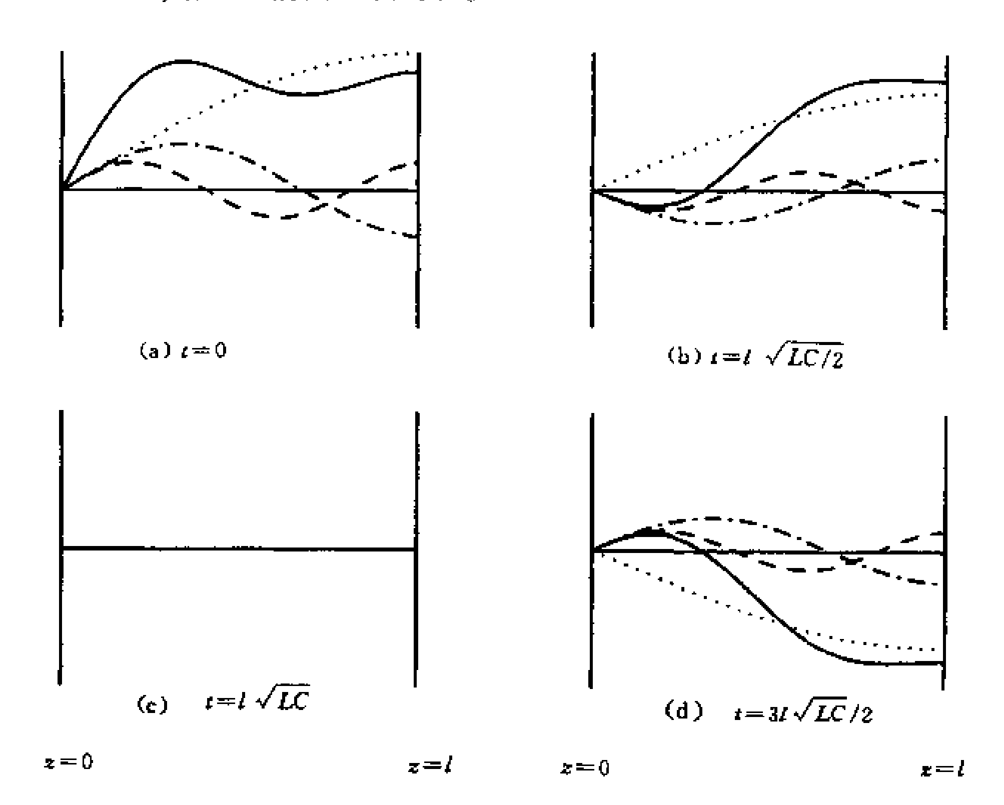


图 2.5-4 简正模的叠加

在 $t=0$ 时刻

$$V(z,t=0) = \frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi z}{2l} + \frac{4}{3\pi}\sin\frac{3\pi z}{2l} + \frac{4}{5\pi}\sin\frac{5\pi z}{2l} + \cdots$$

而全部各项的求和结果应该满足初始条件 $V(z,t\leqslant 0)=1$。

在 $t=l\sqrt{LC}/2$ 时刻

$$V(z,t=l\sqrt{LC}/2) = \frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi z}{2l}\cos\frac{\pi}{4} + \frac{4}{3\pi}\sin\frac{3\pi z}{2l}\cos\frac{3\pi}{4} + \frac{4}{5\pi}\sin\frac{5\pi z}{2l}\cos\frac{5\pi}{4} + \cdots$$

在 $t=3l\sqrt{LC}/2$ 时刻

$$V(z,t=3l\sqrt{LC}/2)=\frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi z}{2l}\cos\frac{3\pi}{4}+\frac{4}{3\pi}\sin\frac{3\pi z}{2l}\cos\frac{9\pi}{4}+\frac{4}{5\pi}\sin\frac{5\pi z}{2l}\cos\frac{15\pi}{4}+\cdots$$

可以看到波沿着传输线前后移动。

如果对 $V(z,t)$ 进行全部各项的求和，就将得到图 2.5-5 所给出的结果。这一结果与 2.2 节中给出的时域问题的求解结果相同。在 $t=0$ 时刻开关闭合，为了满足 $z=0$ 处 $V=1+V_+=0$ 的边界条件，在传输线上产生一个沿 $+z$ 方向传播的波。所以在 $0\leqslant t<l\sqrt{LC}$ 的时间内 $V_+=-1$。其结果如图 2.5-5(b)所示。在 $t=l\sqrt{LC}$ 时刻，正向传播的 V_+ 到达 $z=l$ 处的开路端，这一点上的边界条件要求产生一个沿 $-z$ 方向传播的波以满足 $I=(V_+-V_-)/Z_0=0$。从而可以得到在 $l\sqrt{LC}\leqslant t<2l\sqrt{LC}$ 的时间内 $V_-=V_+=-1$。其结果如图 2.5-5(d)所示。

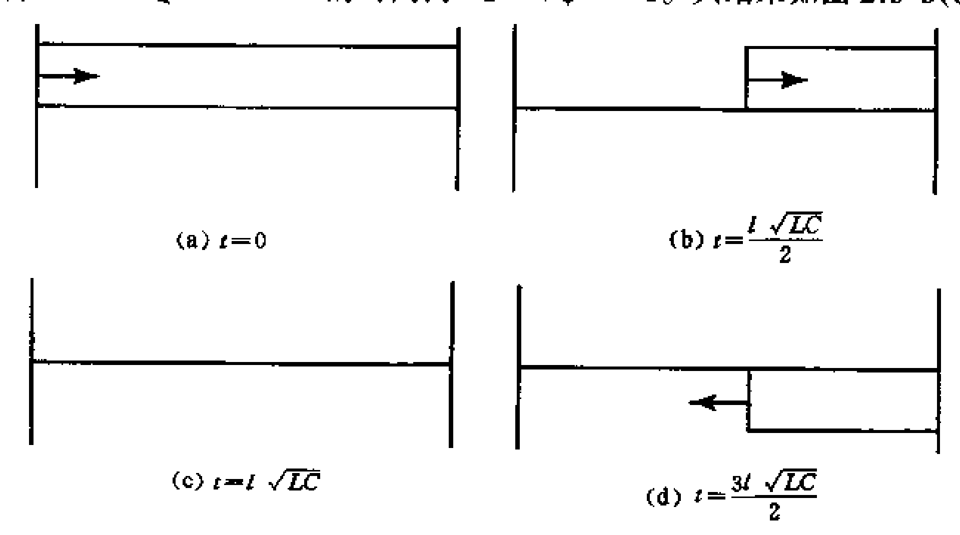


图 2.5-5 初值问题的解

例 2.5.1 在图 2.5-6 所示的传输线电路中，系统激励为最低的谐振频率($L=\lambda/2$)。在这里，将首先利用微扰近似计算输入阻抗，然后与用 Smith 圆图得到的结果进行比较。

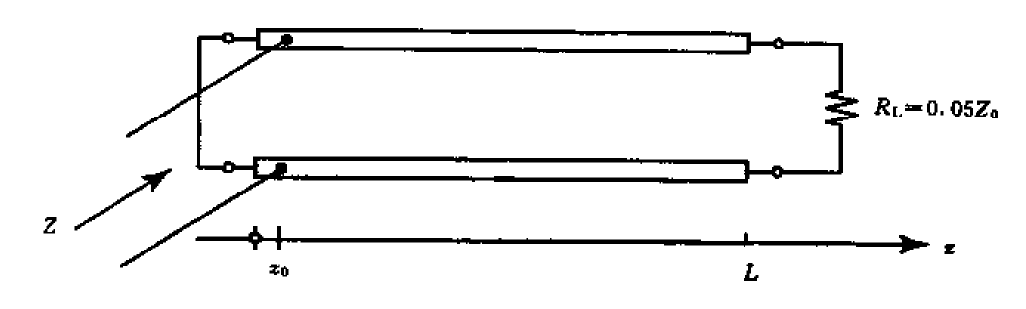


图 2.5-6 加负载的传输线

(1) 利用微扰近似得到 $\mathrm{Re}\{s_n\}$，计算复本征频率 $s_n=\alpha+\mathrm{j}\omega$。假定在 Z 的展开模式中只有谐振项，计算满足 $L=\lambda/2$ 的频率上的输入阻抗。对 $\frac{z_0}{L}=\frac{1}{6},\frac{1}{4},\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$ 计算 $\frac{Z}{Z_0}$ 的数值。

(2) 输入阻抗也可以利用 Smith 圆图计算。对相同的 $\frac{z_0}{L}$ 比较(1)的计算结果与 Smith 圆图计算的结果。

解

(1)

$$\begin{bmatrix} V(z) \\ I(z) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -Y_0 \end{bmatrix} e^{\gamma z} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ Y_0 \end{bmatrix} e^{-\gamma z}, \qquad \gamma = s\sqrt{LC}$$

$$V(0) = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2 \Rightarrow V(z) = C_1[e^{\gamma z} - e^{-\gamma z}]$$

$$I(z) = -C_1 Y_0 [e^{\gamma z} + e^{-\gamma z}]$$

$$\frac{V(l)}{I(l)} = -Z_0 \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}} = R_L \Rightarrow e^{2\gamma l} = e^{2s\sqrt{LC}l} = \frac{1 - R_L Y_0}{1 + R_L Y_0}$$

联立 $s = \alpha + j\omega$ 和 $\omega_0 = (LCl^2)^{-1/2}$ 可以得到

$$\omega_n = \frac{\pi n \omega_0}{2}$$

$$\alpha_n = \frac{\omega_0}{2}\ln\left(\frac{1 - R_L Y_0}{1 + R_L Y_0}\right) \simeq \frac{\omega_0}{2}\ln(1 - 2R_L Y_0) \approx -\omega_0 R_L Y_0$$

这里 n 为偶数。

在谐振频率上，$Z = R_{eq}$，其中 R_{eq} 可以通过 $\langle P_d \rangle$ 得到。

$$\langle P_d \rangle_{circuit} = \frac{1}{2}\frac{|V(z = z_0)|^2}{R_{eq}}$$

$$\langle P_d \rangle_{line} = \frac{1}{2}R_L |I(z = l)|^2 = \frac{1}{2}R_L \left|\frac{V(z = z_0)}{V_n(z = z_0)} I_n(z = l)\right|^2$$

$$= \frac{1}{2}R_L |V(z = z_0)|^2 \left|\frac{I_n(z = l)}{V_n(z = z_0)}\right|^2$$

所以

$$|I_n(z = l)| = |-Y_0 C_1 (e^{j\omega_n\sqrt{LC}l} + e^{-j\omega_n\sqrt{LC}l})| = Y_0 C_1 2\cos\omega_n\sqrt{LC}$$

$$|V_n(z = z_0)| = |C_1(e^{j\omega_n\sqrt{LC}z_0} - e^{-j\omega_n\sqrt{LC}z_0})| = C_1 2\sin\omega_n\sqrt{LC}z_0$$

$$\langle P_d \rangle_{line} = \frac{1}{2}R_L |V(z = z_0)|^2 Y_0^2 \frac{\cos^2\omega_n\sqrt{LC}l}{\sin^2\omega_n\sqrt{LC}z_0} = \frac{1}{2}\frac{|V(z = z_0)|^2}{R_{eq}}$$

由于 $\cos^2\omega_n\sqrt{LC}l = 1$，就有

$$R_{eq} = \frac{Z_0^2}{R_L}\sin^2(\omega_n\sqrt{LC}z_0)$$

对于第一个模式，$n = 2$，$\omega_2 = \pi\omega_0 = \dfrac{\pi}{l\sqrt{LC}}$

$$Z = R_{eq} = \frac{Z_0^2}{R_L}\sin^2\left(\frac{\pi z_0}{l}\right)$$

$$\frac{Z}{Z_0} = \frac{1}{R_L/Z_0}\sin^2\left(\frac{\pi z_0}{l}\right)$$

$$z_0 = \frac{1}{6}l, \quad \frac{Z}{Z_0} = 20\sin^2\frac{\pi}{6} = 5$$

$$z_0 = \frac{1}{4}l, \quad \frac{Z}{Z_0} = 20\sin^2\frac{\pi}{4} = 10$$

$$z_0 = \frac{1}{3}l, \quad \frac{Z}{Z_0} = 20\sin^2\frac{\pi}{3} = 30$$

$$z_0=\frac{1}{2}l,\quad \frac{Z}{Z_0}=20\sin^2\frac{\pi}{2}=20$$

(2) 上述结果也可以利用 Smith 圆图得到。首先利用 Smith 圆图得到在 $z=z_0$ 左右两侧的两个分支传输线在 $z=z_0$ 处的等效导纳,然后将这两个并联分支的导纳求和,并对其结果求倒数就可以得到 $z=z_0$ 处的输入阻抗。其结果为

$$z_0=\frac{1}{6}l,\qquad \frac{Z}{Z_0}=4.9=Z_n$$

$$z_0=\frac{1}{4}l,\qquad \frac{Z}{Z_0}=9.8$$

$$z_0=\frac{1}{3}l,\qquad \frac{Z}{Z_0}=14.3$$

$$z_0=\frac{1}{2}l,\qquad \frac{Z}{Z_0}=20$$

习题

2.5.1 长度为 l 的无损耗传输线的两端均为开路。

(1) 确定传输线上电压和电流的简正模式,并进行归一化使 $V_n(z=0)=1$。对应的自然振荡频率是多少?

(2) 如果在传输线的两端都加上集总电阻 R_L 作为负载,其中 R_L 是一个足够大的电阻。利用微扰近似计算自然振荡频率的实部 $\mathrm{Re}\{s_n\}$。说明微扰近似成立所要求的足够大的负载电阻应该大到什么程度。

2.5.2

(1) 确定图 2.5-7 所示传输线的超越色散方程,通过求解色散方程,可以得到传输线的自然频率。将方程写为

$$\tan kl=\frac{C_l}{C_0}\frac{1}{kl}$$

的形式,其中 $k=\omega\sqrt{LC}$。这里 L 和 C 是传输线参数,$s=j\omega$ 是自然频率。试说明如何用图形方法求解上述色散方程。

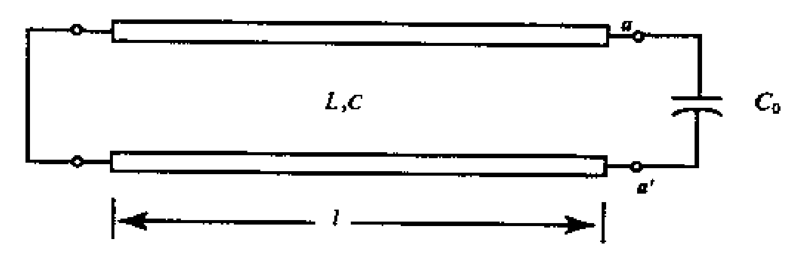


图 2.5-7 确定传输线超越色散方程

(2) 考虑 $C_0 \gg C_l$ 的极限情况。证明这种情况下传输线的自然频率非常接近在终端 $a-a'$ 短路的传输线的自然频率。确定最小的谐振频率的近似表达式(0 频率除外),并用该传输线的简单集总单元解释这一最小谐振频率的物理意义。

(3) 当 $C_0 \ll C_l$ 时自然频率的近似表达式是什么? 在这种情况下,是否仍然可以用集总单元传输线模型对最小的谐振频率进行准确的描述。

2.5.3 如图 2.5-8 所示传输线的长度 L 等于 1/2 工作波长 λ。

(1) 利用 Smith 圆图,确定在传输线上给定位置 $x=0, L/6, L/4, L/3, L/2$ 的归一化阻抗 $Z_n(x)$。

(2) 在 $x=L, 5L/6, 3L/4$ 和 $2L/3$ 处的阻抗 $Z_n(x)$是什么?

(3) 对(1),(2)得到的结果与下列的近似理论结果进行比较。

$$Z_n \simeq \frac{Z_0}{R_L}\sin^2\frac{\pi x}{L} = 20\sin^2\frac{\pi x}{L}$$

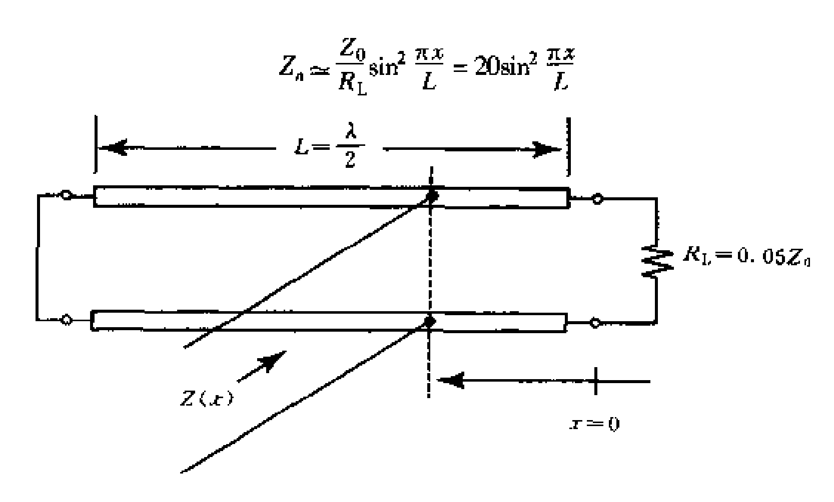


图 2.5-8 半波长的传输线

2.5.4

(1) 确定图 2.5-9 所示网络中电压 V_0 的脉冲响应。如果 $V_s(t)=u_0(t)$，试根据初始静态条件求 V_0。

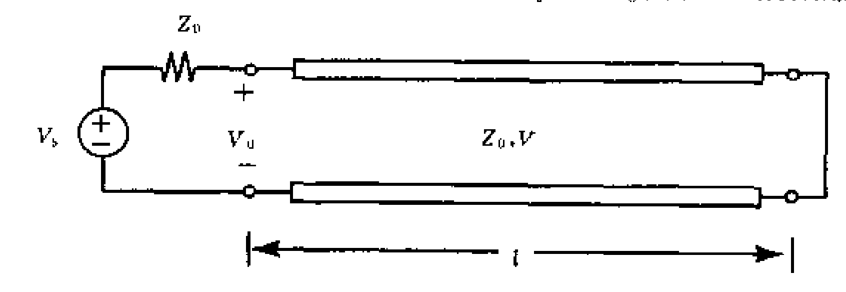


图 2.5-9 传输线网络

(2) 利用(1)的结果和卷积积分，当 $V_s(t)$ 为斜坡函数，即

$$V_s(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ At, & t>0\end{cases}$$

时确定 V_0，并做图表示。其中 A 是常数。

(3) 可以注意到(2)的结果与输入电压 V_s 的导数相似。利用卷积积分，证明当其随时间变换足够平缓时，对于任意的 $V_s(t)$。试分析“足够平缓”要平缓到什么程度。在这种极限情况下，短路传输线是否可以用集总电路单元表示。

2.5.5 谐振器可以用来测量低损耗介电材料的电导率。在正弦稳态条件下，介电材料的电导率可以通过将介电常数看做复数加以考虑，即 $\varepsilon=\varepsilon_R+j\varepsilon_I$（如果用电导率表示，那么有 $\omega\varepsilon_I=\sigma$）。一般说来，$\varepsilon_R$ 和 ε_I 都是频率函数。商用材料的损耗通常用它们的损耗正切表示，$\tan\delta=\varepsilon_R/\varepsilon_I$，在微波频率好的介质材料中损耗正切通常在 $10^{-3}\sim10^{-4}$ 之间。

(1) 利用复坡印廷定理证明有耗介电介质的时间平均功率耗散为

$$\langle P_{de}\rangle = \frac{\omega\varepsilon_I\tan\delta}{2}\int |E|^2 dV$$

(2) 考虑图 2.5-10 所示的半波同轴谐振器。该同轴线的两端都被短路，如图所示，在同轴线的中间安装了一个厚度为 $t(t\ll\lambda)$ 的介质片。单位长度传输线的有效串联电阻为 R。谐振器的品质因数 Q 定义为

$$Q=\frac{\omega_1(\text{每一周期内的存储能量})}{\text{每一周期内的功率耗散}}=\frac{\omega_1}{2|\sigma_1|}$$

式中 $\sigma_1-j\omega_1$ 是复谐振频率（$\frac{\sigma_1}{\omega_1}\ll1$）。如果去掉介质片，根据微扰理论用传输线参数 R,L 和 $C(G=0)$ 表示谐振器的不加载品质因数 Q_u。如果加上介质片，求出相应的加载品质因数 Q_L 并证明

$$\frac{1}{Q_s}=\frac{1}{Q_L}-\frac{1}{Q_u}$$

如果频率为 1GHz，$t=0.1\lambda$，$\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_0}=2.5$，$\tan\delta=10^{-3}$，假设 $Z_0=50\Omega$，$R=0.1\Omega/m$，计算相应的 Q_u，Q_L 和 Q_s 的值。

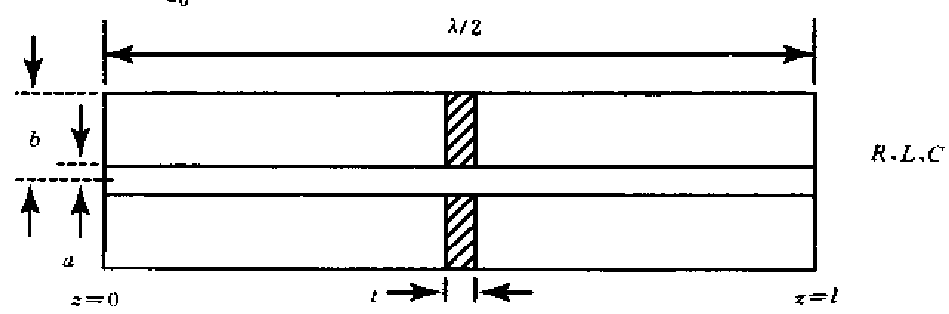


图 2.5-10 同轴谐振腔测量介质的电导率

(3) 在 $z=w$ 处用一个强度为 I_s 的并联电流源驱动谐振器。电流源的频率 ω 在 ω_1 附近变化。假定损耗很小，写出模式展开表达式并指出决定项。进一步画出 $|V(z=w)|$ 随频率 ω 变化的曲线，并说明如何通过加载和不加载谐振器的曲线确定品质因数 Q_s。

2.6 传输线建模

2.6.1 天线辐射的建模

将终端开路的双导线传输线弯曲就可以构成一个线天线。经常采用的一种线天线是半波偶极子。在图 2.6-1 中，我们给出了半波偶极子天线上的电流分布。

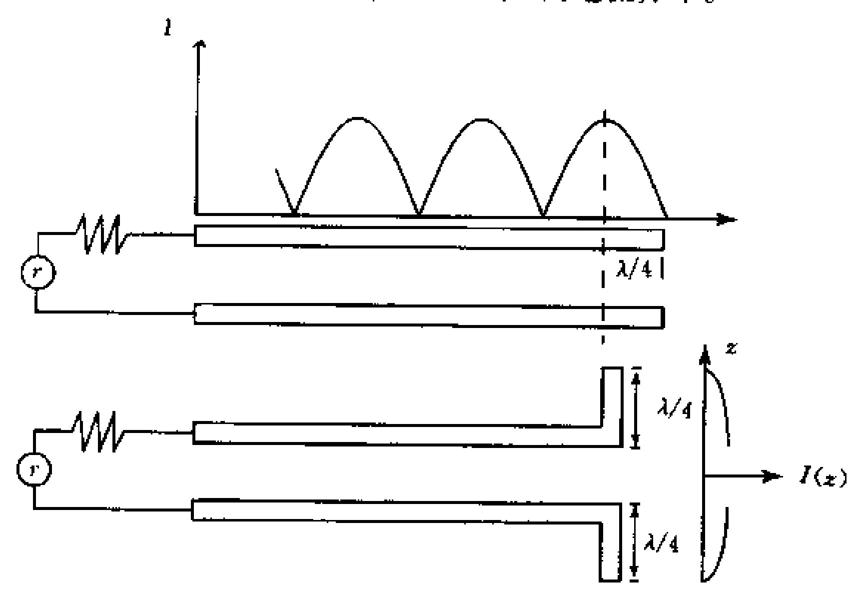


图 2.6-1 半波偶极子上的电流分布

半波偶极子可以将一个双导线传输线劈开 $\lambda/4$ 并折弯而形成。半波偶极子上的电流分布可以表示为

$$I(z)=I_0\sin\left[k\left(\frac{l}{2}-|z|\right)\right] \tag{2.6.1}$$

对半波偶极子天线，式中 $l=\frac{\lambda}{2}$。上述方法可以用来制作任意长度的线天线。

天线的辐射电场 $\boldsymbol{E}$ 和辐射磁场 $\boldsymbol{H}$ 可以用 1.4 节所给出的赫兹偶极子的辐射场确定。在 1.4 节中，赫兹偶极子被表示为相距无限近，并且以角频率 ω 振荡的一对电荷 $\pm q$，将线天线沿

z 轴方向放置，并使其间隔为 Δz。对偶极矩为 $q\Delta z$ 的赫兹偶极子，距离偶极子很远($kr \gg 1$)的地方，其辐射电场和磁场为

$$\boldsymbol{E} = -\hat{\boldsymbol{\theta}}\eta\frac{k\omega q\Delta z}{4\pi r}\sin\theta\cos(kr-\omega t)$$

$$\boldsymbol{H} = -\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{k\omega q\Delta z}{4\pi r}\sin\theta\cos(kr-\omega t)$$

利用复相位因子 $e^{j\omega t}$，可以通过对时间求导得到电流矩 $I\Delta z = j\omega q\Delta z$。将上面的表达式转化为复相位因子，可以得到

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\eta\frac{jkI\Delta z}{4\pi r}\sin\theta e^{-jkr} \tag{2.6.2}$$

$$\boldsymbol{H} = \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{jkI\Delta z}{4\pi r}\sin\theta e^{-jkr} \tag{2.6.3}$$

式中，$\eta = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$是自由空间的特征阻抗。

线天线的辐射方向图

如图 2.6-2 所示，为了计算线天线的辐射场，可将天线划分为很多无限小的线段，每个小的线段都可以看做是一个赫兹偶极子。由于观察点很远，从天线上位置为 z，长度为 Δz 的小线段单元到观测点的距离矢量 $\boldsymbol{r}'$与从坐标原点到观测点的距离矢量 $\boldsymbol{r}$ 平行，而且这个线段单元偶极子的辐射电场 $\boldsymbol{E}$ 也是 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 方向的。可以将从这个线段单元到观察点的距离近似表示为

$$r' = r - z\cos\theta \tag{2.6.4}$$

那么在位置 z 处电流段 $I(z)\Delta z$ 的辐射电场 ΔE 为

$$\Delta\boldsymbol{E} \approx \hat{\boldsymbol{\theta}}\eta\frac{jkI\Delta z}{4\pi r'}\sin\theta e^{-jkr'} \approx \hat{\boldsymbol{\theta}}\eta\frac{jkI\Delta z}{4\pi r}\sin\theta e^{-jkr}e^{jkz\cos\theta}$$

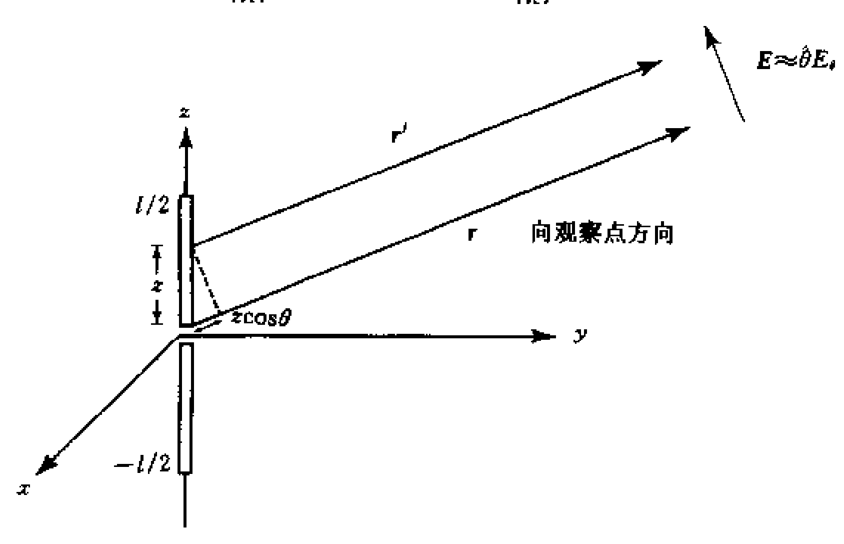


图 2.6-2 通过叠加计算辐射电场

应该注意，在上面的近似中，我们忽略了分母中的 $z\cos\theta$，而保留了指数中 $z\cos\theta$，这是由于当 Δz 与 π 具有相同的量级时，后者的贡献很重要。在这种情况下，指数项可以在 $e^{j0}=1$ 到 $e^{j\pi} = -1$ 之间变化。

线天线总的辐射电场可以通过线天线上所有小的线段的辐射电场的叠加得到。在天线长度上进行积分可以得到

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\eta \frac{\mathrm{j}k\sin\theta}{4\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\int_{-l/2}^{l/2}\mathrm{d}zI(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz\cos\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}E_\theta \tag{2.6.5}$$

用类似的方法可以得到线天线的辐射磁场 $\boldsymbol{H}$。它可以用辐射电场表示为

$$\boldsymbol{H} = \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{\eta}E_\theta$$

所以线天线辐射场的计算就归结为式(2.6.5)所给积分的计算。

对于具有式(2.6.1)所表示的电流分布的线天线,可以得到

$$\begin{aligned}
&\int_{-l/2}^{l/2}\mathrm{d}zI(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz\cos\theta}\\
&= \int_{-l/2}^{l/2}\mathrm{d}zI_0\sin\left[k\left(\frac{l}{2} - |z|\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz\cos\theta}\\
&= \int_{0}^{l/2}\mathrm{d}zI_0\sin\left[k\left(\frac{l}{2} - z\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz\cos\theta} + \int_{-l/2}^{0}\mathrm{d}zI_0\sin\left[k\left(\frac{l}{2} + z\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz\cos\theta}\\
&= \int_{0}^{l/2}\mathrm{d}z2I_0\sin\left[k\left(\frac{l}{2} - z\right)\right]\mathrm{e}^{[\mathrm{j}kz\cos\theta]}\\
&= \frac{2I_0}{k\sin^2\theta}\left[\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{kl}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

所以辐射电场为

$$E_\theta = \eta\frac{\mathrm{j}I_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{2\pi k\sin\theta}\left[\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{kl}{2}\right)\right] \tag{2.6.6}$$

当 $\theta\to0$,L'Hopital 定理给出 $E_\theta = 0$,所以沿着线天线的轴线方向没有辐射电场。

对于半波偶极子,$l = \lambda/2$,$kl = \pi$,所以(2.6.6)式变为

$$|E_\theta| = \frac{\eta I_0}{2\pi r\sin\theta}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)$$

图 2.6-3 给出了半波长线天线的辐射方向图。当 $l = 3\lambda/2$ 时,(2.6.6)式变为

$$|E_\theta| = \frac{\eta I_0}{2\pi r\sin\theta}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\cos\theta\right)$$

其辐射方向如图 2.6-4 所示。

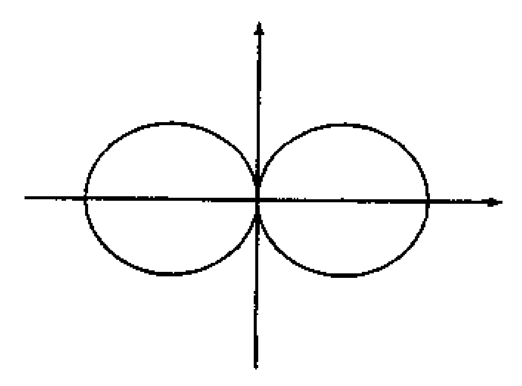


图 2.6-3 λ/2 长度线天线的辐射方向图

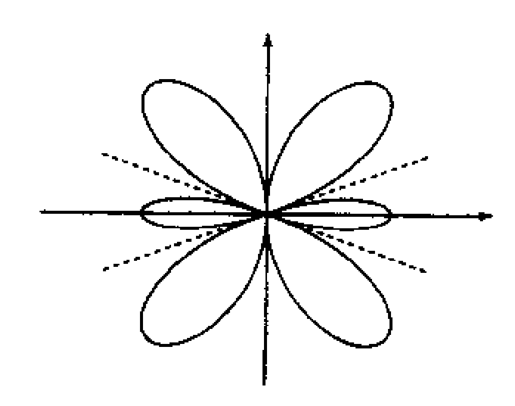


图 2.6-4 3λ/2 长度线天线的辐射方向图

阵列天线的辐射方向图

计算 $x-y$ 平面上的赫兹偶极子组成的阵列天线的辐射场，假设所有的偶极子天线沿 x 轴排列，天线单元之间的间隔为 d，并且所有天线的取向为 z 方向(如图 2.6-5 所示)。令偶极子天线单元具有均匀的相移 α，从而第 n 个偶极子的偶极矩为 $Il\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\alpha}$。由于观察点在很远的地方，所以从位置为 z 的小线段单元 Δz 出发的距离矢量 $\boldsymbol{r}'$ 平行于从坐标原点出发的位置矢量 $\boldsymbol{r}$。在位置 $x=nd$ 上的偶极子的辐射电场 $\Delta\boldsymbol{E}$ 的方向为 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 方向。可以将距离 r' 近似表示为

$$r' = r - nd\sin\theta\cos\phi \tag{2.6.7}$$

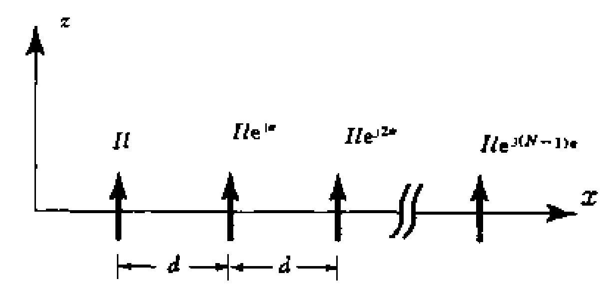


图 2.6-5 偶极子阵列天线

所以位置 x 上的电流元 $I(z)l$ 的辐射电场 $\Delta\boldsymbol{E}$ 为

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{E} &\approx \hat{\boldsymbol{\theta}}\eta\frac{\mathrm{j}kIl\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\alpha}}{4\pi r'}\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr'}\\ &\approx \hat{\boldsymbol{\theta}}\eta\frac{\mathrm{j}kIl\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\alpha}}{4\pi r}\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\mathrm{e}^{\mathrm{j}knd\sin\theta\cos\phi}\end{aligned}$$

注意，在上面的近似中，忽略了分母中的 $nd\cos\theta$，而在指数项中予以保留。

将所有的赫兹偶极子天线单元的辐射场叠加就得到了阵列天线的总的辐射场 $\boldsymbol{E}$。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \hat{\boldsymbol{\theta}}\eta\frac{\mathrm{j}k\sin\theta}{4\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}Il\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n(kd\sin\theta\cos\phi+\alpha)}\\ &= \hat{\boldsymbol{\theta}}\eta\frac{\mathrm{j}k\sin\theta}{4\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}IlF(u)\end{aligned} \tag{2.6.8}$$

式中，$F(u)$被称为阵因子。阵因了幅度的计算结果为

$$|F(u)| = \left|\frac{\sin(Nu/2)}{\sin(u/2)}\right| \tag{2.6.9}$$

其中，

$$u = kd\sin\theta\cos\phi + \alpha$$

图 2.6-6 给出了 4 个间距为 $d=\lambda/2$ 的偶极子辐射电场幅度 $|\boldsymbol{E}|$ 在 $x-y$ 平面上的方向图。

专题 2.6.A 方向图相乘技术

可以用方向图相乘技术得到阵列天线的辐射方向图。这里以沿 $\hat{z}$ 指向，间距为 $d=\lambda/2$ 的等幅度、等相位的 4 个偶极子天线组成的阵列天线为例说明天线方向图相乘技术。

我们将在 $+x$ 和 $-x$ 轴上的两个偶极子天线单元分别看为一个单元，并用符号⊙表示。这个两单元阵列的方向图如图 2.6-7 所示。原来的 4 单元阵列是单元⊙和间距为 λ 的两单元阵列组的卷积(在图 2.6-8 中用⊗表示)。间距为 λ 的两单元阵列的组方向图是由两个偶极子决定的，所以最终 4 单元阵列天线的方向图是单元方向图和组方向图的乘积(见图 2.6-8)。

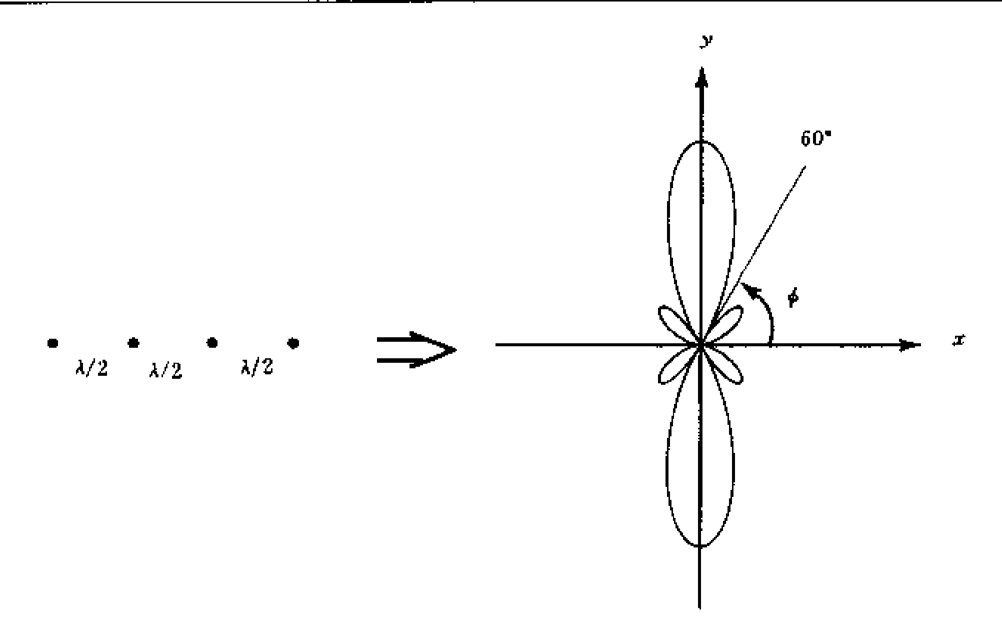


图 2.6-6 4元阵方向图

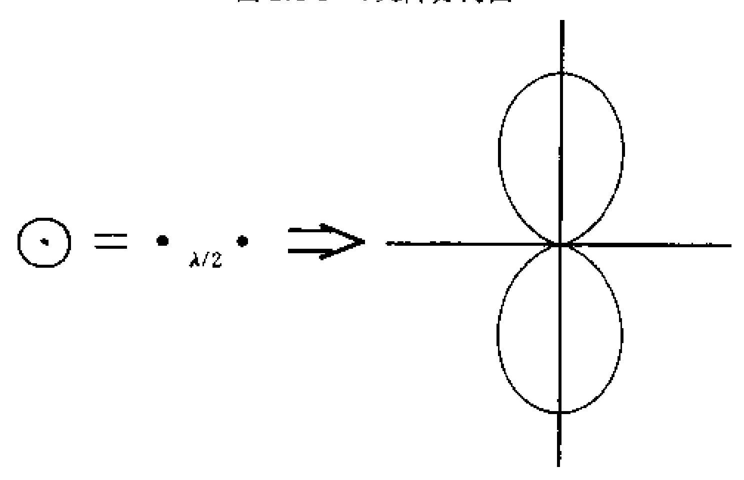


图 2.6-7 2单元阵列方向图相乘

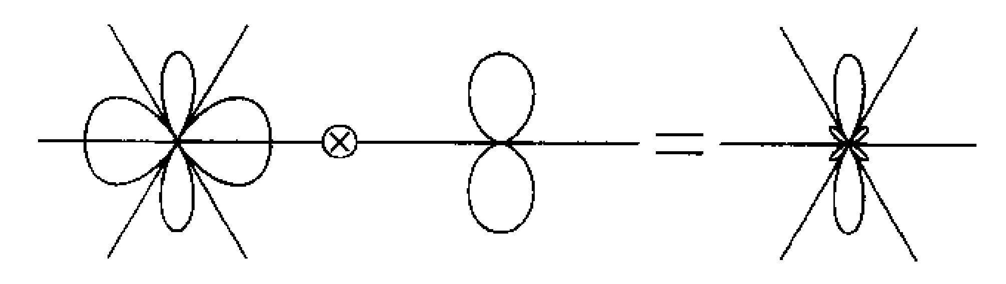


图 2.6-8 4单元阵列天线方向图相乘

例2.6.1 图2.6-9所示是一个5单元的偶极子陈列天线，偶极子单元的指向都是 z 方向。其中中间单元的幅度是其他4个单元幅度的2倍。画出垂直于偶极子方向的 x-y 平面的阵列方向图。

解 利用方向图相乘技术，将3个偶极子天线看做一个单元，这样的3单元阵列天线的方向图如图2.6-10所示。原来的4单元阵列可以看做是由两个间距为 λ 的3单元阵列组合而成，所以其方向如图2.6-11所示。

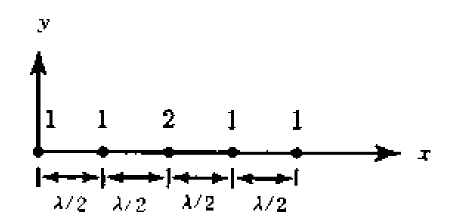


图 2.6-9 5 单元偶极子阵列天线

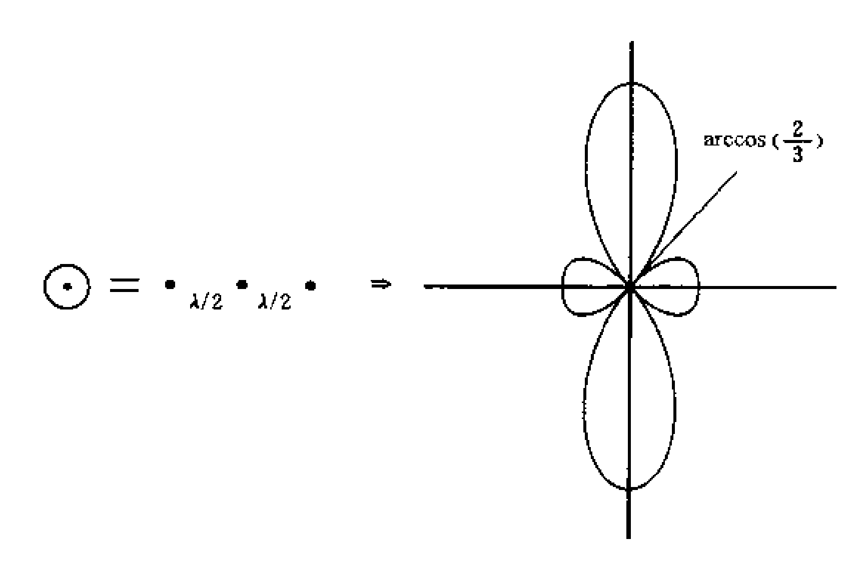


图 2.6-10 3 单元阵列天线的方向图

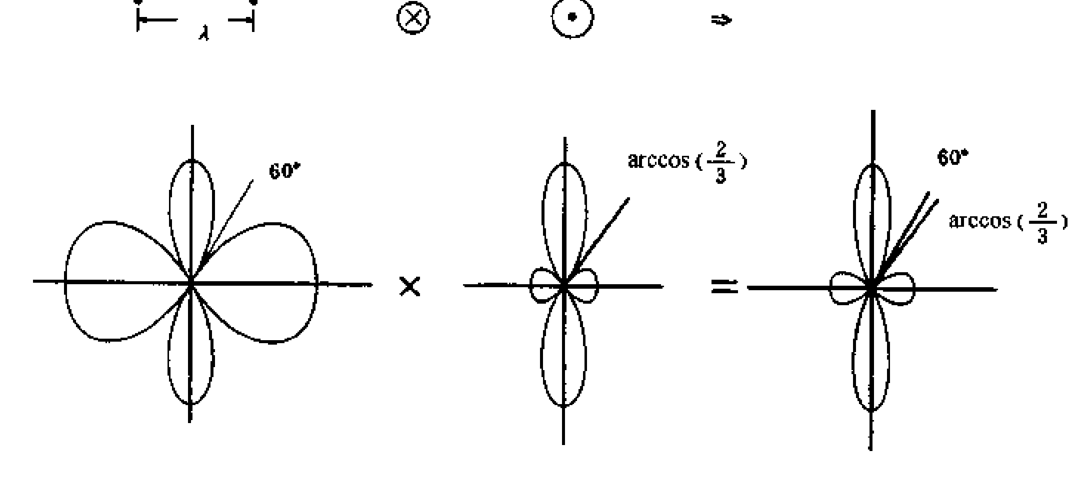


图 2.6-11 利用 2 单元和 3 单元阵列方向图相乘获得 5 单元阵列方向图

2.6.2 反射和传输的建模

考虑一个电场为

$$\boldsymbol{E} = \hat{y}E_y = \hat{y}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x - \mathrm{j}k_z z}$$

的线极化波从参数为 μ 和 ϵ 的介质入射到参数为 μ_t 和 ε_t 的半空间介质上(如图 2.6-12 所示)。

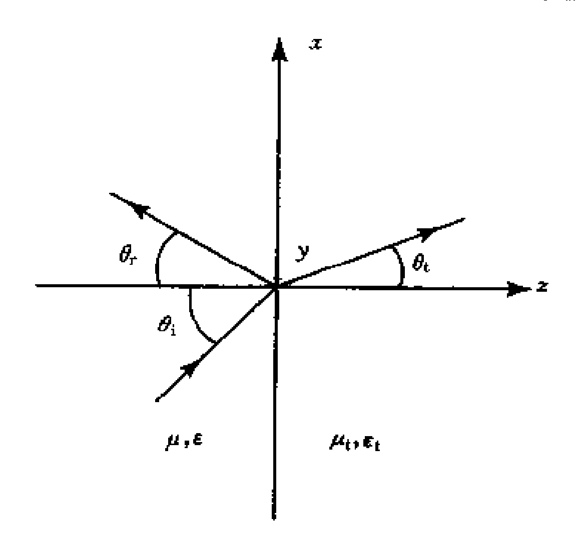


图 2.6-12 波在介质分界面处的反射及透射

根据麦克斯韦方程可以得到相应的入射波的磁场为

$$H = \frac{1}{-\mathrm{j}\omega\mu}\nabla\times E = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial z}E_y - \hat{z}\frac{\partial}{\partial x}E_y\right)$$

$$= \left(\hat{x}\frac{-k_z}{\omega\mu} + \hat{z}\frac{k_x}{\omega\mu}\right)E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x - \mathrm{j}k_z z}$$

$$= \hat{x}H_x + \hat{z}H_z$$

$z=0$ 的边界面上的边界条件要求,对于所有 x,E 和 H 的切向分量都必须连续。

$z\geqslant 0$ 的区域的介质参数为 μ_z 和 ε_t,其中的透射场为

$$E_t = \hat{y}E_{ty} = \hat{y}TE_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{tx}x - \mathrm{j}k_{tz}z}$$

$$H_t = \hat{x}H_{tx} + \hat{z}H_{tz} = \left(\hat{x}\frac{-k_{tz}}{\omega\mu_t} + \hat{z}\frac{k_{tx}}{\omega\mu_t}\right)TE_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{tx}x - \mathrm{j}k_{tz}z}$$

这里的 T 为透射系数。

$z\leqslant 0$ 的区域的介质参数为 μ 和 ε,其中反射场的电场和磁场为

$$E_r = \hat{y}E_{ry} = \hat{y}RE_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{rx}x - \mathrm{j}k_{rz}z}$$

$$H_r = \hat{x}H_{rx} + \hat{z}H_{rx} = \left(\hat{x}\frac{k_{rz}}{\omega\mu} + \hat{z}\frac{k_{rz}}{\omega\mu}\right)RE_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{rx}x + \mathrm{j}k_{rz}z}$$

这里的 R 为反射系数。

$z=0$ 的边界条件要求

$$E_y + E_{ry} = E_{ty}$$

$$H_x + H_{rx} = H_{tx}$$

据此可以得到

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x} + R\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{rx}x} = T\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{tx}x}$$

$$\frac{k_z}{\omega\mu}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x} - \frac{k_{rz}z}{\omega\mu}R\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{tx}x} = \frac{k_{tz}}{\omega\mu_t}T\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{tx}x}$$

由于上列方程对于所有的 x 都成立,我们可以得到

$$k_x = k_{rx} = k_{tx}$$

$$R = \frac{1 - \mu k_{tz}/\mu_t k_z}{1 + \mu k_{tz}/\mu_t k_z}$$

$$T = \frac{2}{1 + \mu k_{tz}/\mu_t k_z}$$

上述的反射和传输问题可以用以下模型表示，即一个特征阻抗为 $Z = \omega\mu/k_z$ 的传输线连接到一个特征阻抗为 $Z_t = \omega\mu_t/k_{tz}$ 的传输线上（见图 2.6-13）。

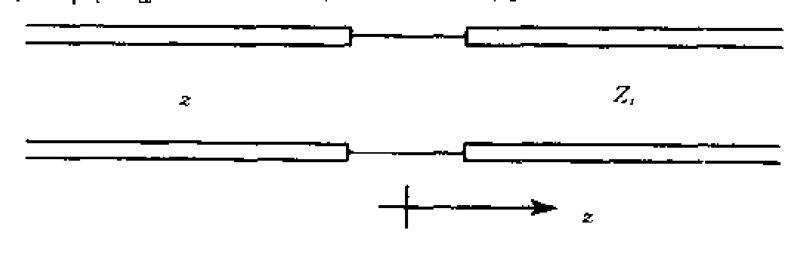


图 2.6-13 介质面的传输线等效电路

例 2.6.2

(1) 如图 2.6-14 所示，自由空间的均匀平面波垂直入射到理想导体上。入射波和反射波叠加形成电场和磁场的驻波分布，画出电场和磁场驻波分布随位置坐标 z 变化的曲线（$|E(z)|$ 和 $|H(z)|$）。

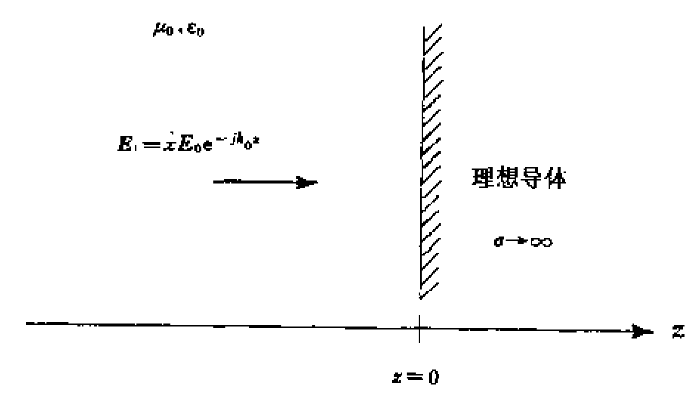


图 2.6-14 波对理想导体的垂直入射

(2) 如图 2.6-15 所示，在离开理想导体 $\lambda_0/4$ 的地方插入磁导率为 μ_1、介电常数为 ε_1、厚度为 d 的介质片。利用传输线等效，入射波在介质片前表面（位置坐标为 $z = -d - \lambda_0/4$）入射，从该平面向导体方向看的阻抗可以用终端阻抗、介质片的厚度及介质材料的传输常数表示（见图 2.6-16）。求输入阻抗 $Z(z = -d - \lambda_0/4)$。当介质片是薄膜，即 $|k_1 d| \ll 1$ 时，证明

$$Z(z = -d - \lambda_0/4) \simeq -\mathrm{j}\frac{\eta_1}{k_1 d}$$

式中特征阻抗为 $\eta_0 = \sqrt{\mu/\varepsilon_0}$ 和 $\eta_1 = \sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}$。

(3) 如果介质薄膜为导电材料，其电导率为 σ_1，相应的复介电常数为 $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1R}\left(1 - \frac{\mathrm{j}\sigma_1}{\omega\varepsilon_{1R}}\right)$。在电导率很大（$\frac{\sigma_1}{\omega\varepsilon_{1R}} \gg 1$）和介质薄膜很薄 $|k_1 d| \ll 1$ 的极限情况下，证明

$$Z(z = -d - \lambda_0/4) \simeq \frac{1}{\sigma_1 d} \equiv R_1$$

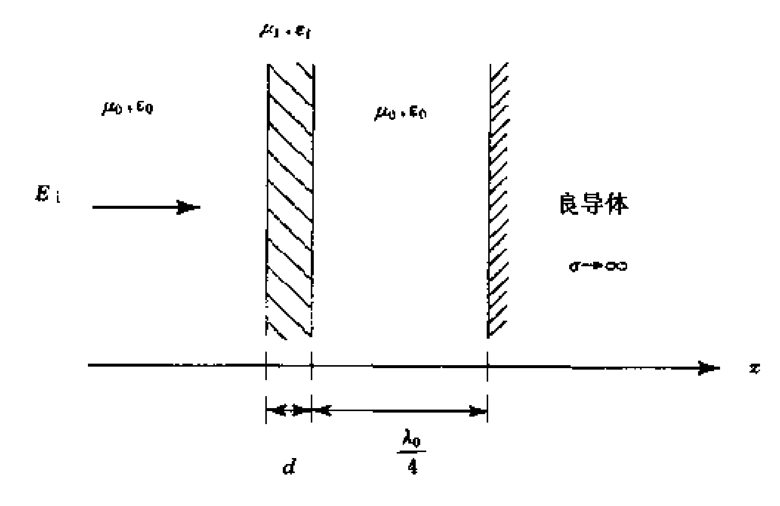


图 2.6-15　中间插有介质片的垂直入射

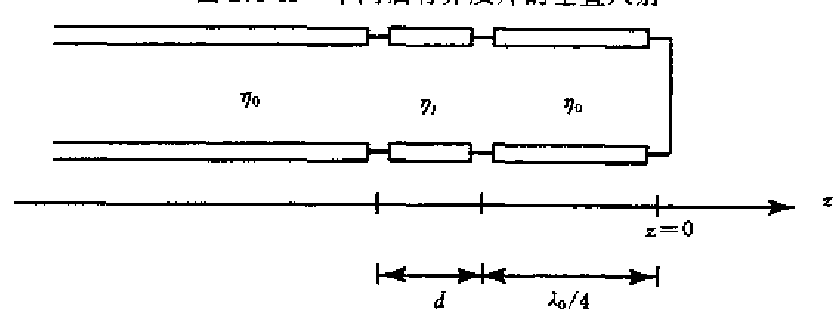


图 2.6-16　等效电路一

在传输线理论中，这种情况对应在特征阻抗为 $\eta_0=\sqrt{\mu/\varepsilon_0}$ 的短路传输线前面 $\lambda_0/4$ 处有一个阻值为 R_1 的电阻(见图 2.6-17)。

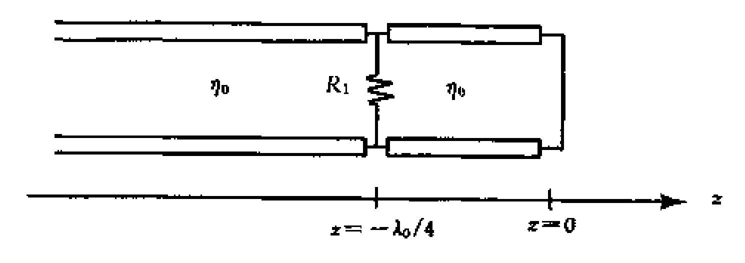


图 2.6-17　等效电路二

(4) 对于正投射的平面波，当 R_1 是多大时为理想匹配？在高频应用中，常常需要减小或消除辐射系统附近金属目标的多余反射。通过在金属表面前面安装适当的导电薄膜就可以达到这个目的。

(5) 当频率为 1GHz，介质参数为 $\mu_1=\mu_0$，$\varepsilon_{1R}=\varepsilon_0$，$\sigma=5\text{S/m}$ 时，要获得(4)所要求的阻值 R_1，求介质薄膜的厚度 d。并验证 $\frac{\sigma_1}{\omega\varepsilon_{1R}}\gg 1$ 和 $|k_1 d|\ll 1$ 的极限条件是否满足。

解

(1) 在 $z=0$ 处，$\boldsymbol{E}_i+\boldsymbol{E}_r=0\Rightarrow\boldsymbol{E}_r=-\boldsymbol{E}_i$

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_i=\hat{\boldsymbol{x}}E_0\mathrm{e}^{-jk_0z}\\ \boldsymbol{H}_i=\hat{\boldsymbol{y}}\dfrac{E_0}{\eta_0}\mathrm{e}^{-jk_0z}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{E}_r=-\hat{\boldsymbol{x}}E_0\mathrm{e}^{-jk_0z}\\ \boldsymbol{H}_r=\hat{\boldsymbol{y}}\dfrac{E_0}{\eta_0}\mathrm{e}^{jk_0z}\end{cases}$$

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_i+\boldsymbol{E}_r=-\hat{\boldsymbol{x}}2jE_0\sin k_0z$$

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}+\boldsymbol{H}_{\mathrm{r}}=\hat{y}2\frac{E_0}{\eta_0}\cos k_0 z$$

$|\boldsymbol{E}(z)|$和$|\boldsymbol{H}(z)|$如图 2.6-18 所示。

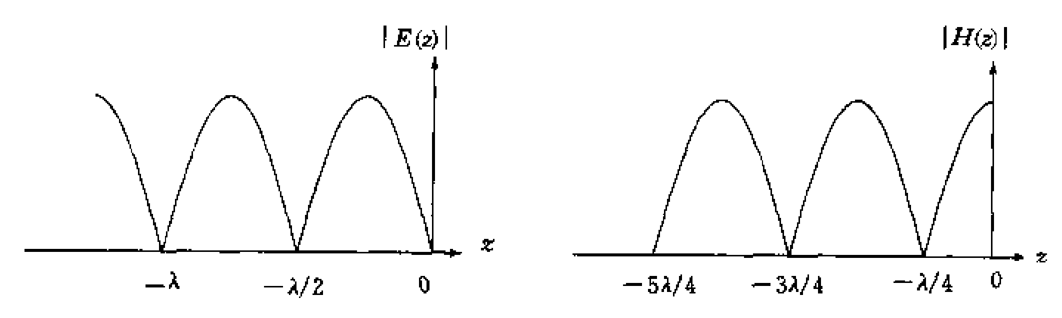


图 2.6-18 $|E(z)|$和$|H(z)|$的波形

(2) 如图 2.6-19 所示的传输线输入阻抗为

$$Z(z)=Z_0\frac{Z_{\mathrm{L}}-\mathrm{j}Z_0\tan kz}{Z_0-\mathrm{j}Z_{\mathrm{L}}\tan kz}$$

其中,

$$Z(0)=0$$

$$Z\left(-\frac{\lambda_0}{4}\right)=\eta_0\frac{0+\mathrm{j}\eta_0\tan(-\pi/2)}{\eta_0}\rightarrow\infty$$

$$Z\left(-d-\frac{\lambda_0}{4}\right)=\eta_1\frac{Z\left(-\frac{\lambda_0}{4}\right)+\mathrm{j}\eta_1\tan k_1 d}{\eta_1+\mathrm{j}Z\left(-\frac{\lambda_0}{4}\right)\tan k_1 d}=\frac{-\mathrm{j}\eta_1}{\tan k_1 d}$$

$$|k_1 d|\ll 1\Rightarrow Z\left(-d-\frac{\lambda_0}{4}\right)\simeq\frac{-\mathrm{j}\eta_1}{k_1 d}$$

$\lambda_0/4$

η_0 R_1 η_0

开路

图 2.6-19 传输线

(3)

$$\varepsilon=\varepsilon_{1\mathrm{R}}\left(1-\mathrm{j}\frac{\sigma_1}{\omega\varepsilon_{1\mathrm{R}}}\right)\simeq-\mathrm{j}\frac{\sigma_1}{\omega}\quad 对\frac{\sigma_1}{\omega\varepsilon_{1\mathrm{R}}}\gg 1$$

$$Z\left(-d-\frac{\lambda_0}{4}\right)=\frac{-\mathrm{j}\eta_1}{k_1 d}=\frac{-\mathrm{j}\sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}}{\omega\sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}\,d}=\frac{-j}{\omega\varepsilon_1 d}\simeq\frac{1}{\sigma_1 d}\equiv R_1$$

(4)

$$\Gamma\left(-\frac{\lambda_0}{4}\right)=\frac{R_1-\eta_0}{R_1+\eta_0}=0\Rightarrow R_1=\eta_0$$

(5)

$$\frac{\sigma_1}{\omega\epsilon_{1R}}=\frac{5}{2\pi(10^9)(8.85\times10^{-12})}\simeq 90\gg 1$$

$$R_1=\frac{1}{\sigma_1 d}=377\Rightarrow d=0.53\text{mm}$$

$$|k_1 d|=\left|\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\sqrt{1-\mathrm{j}\frac{\sigma_1}{\omega\epsilon_{1R}}}\cdot d\right|$$

$$\simeq\left|\frac{2\pi 10^9}{3\times10^8}(-j\sqrt{90})(0.53\times10^{-3})\right|\simeq 0.1\ll 1$$

习题

2.6.1

(1) 考虑一个等幅同相、间距为 $\lambda/2$ 的 8 单元偶极子线阵，偶极子的指向为 z 方向。利用方向图相乘技术画出 x-y 平面上的辐射方向图，并指出辐射的零点和最大值的位置。

(2) 考虑 x-y 平面上等幅同相的 4 单元阵列的方向图，单元的位置分别为 $(x=\lambda/2, y=\lambda/4)$，$(x=\lambda/2, y=-\lambda/4)$，$(x=-\lambda/2, y=\lambda/4)$ 和 $(x=-\lambda/2, y=-\lambda/4)$。

(3) 利用方向图相乘，画出 x-y 平面上的辐射方向图，并指出辐射的零点和最大值的位置。

2.6.2

(1) 如图 2.6-20 所示，长度为 L 的线天线上的行波电流分布为 $I(z)=I_0\mathrm{e}^{-jkz}$，求天线辐射场的远场表达式。

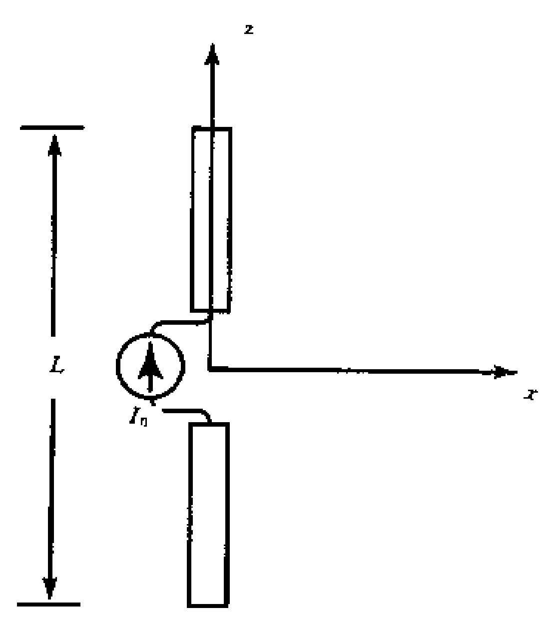


图 2.6-20　长为 L 的线天线

(2) 证明远离天线处的电场幅度为

$$|E_\theta|=\frac{30I_0\sin\theta}{r(1-\cos\theta)}\{2-2\cos[kL(1-\cos\theta)]\}^{1/2}$$

(3) 天线的长度为 $L=3/2\lambda$，画出天线所在平面的辐射方向图。

(4) 如果两个平行的天线单元的长度为 $L=3/2\lambda$ 并且等幅同相激励，天线单元的间距为 $\lambda/2$，画出阵列于天线所在平面的辐射方向图。

(5) 对(4)所给阵列天线，画出与天线垂直的平面上的辐射方向图。

2.6.3 如图 2.6-21 所示，"十字架"型天线有两个以一定角度交叉安装的赫兹偶极子构成，角频率为 ω。天线上的电流分布分别为

$$I_1 = \hat{x}I$$
$$I_2 = \hat{y}jI$$

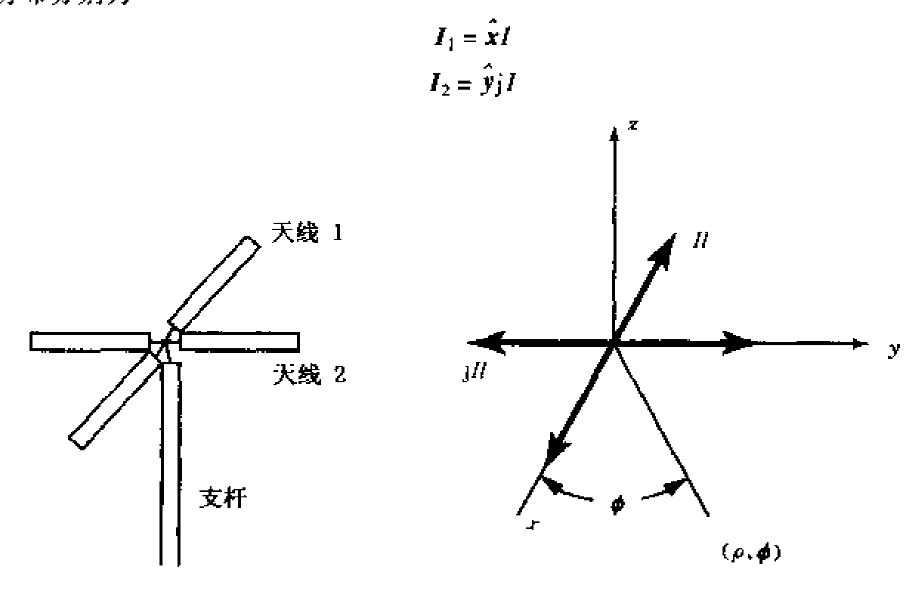


图 2.6-21 "十字架"型天线及其电流分布

(1) 用球坐标系证明在远区($kr \gg 1$)，辐射电场 $\boldsymbol{E} \simeq -j\omega(\hat{\boldsymbol{\theta}}A_\theta + \hat{\boldsymbol{\phi}}A_\phi)$。

(2) 求 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 的 x-y 平面远区($k\rho \gg 1$)的总辐射电场。证明电场的实的空间-时间变化项具有 $\cos(\omega t + \phi - k\rho)$ 的形式。注意

$$\hat{x} = \hat{r}\cos\phi\sin\theta - \hat{\phi}\sin\phi + \hat{\theta}\cos\phi\cos\theta$$

和

$$\hat{y} = \hat{r}\sin\phi\sin\theta + \hat{\phi}\cos\phi + \hat{\theta}\sin\phi\cos\theta$$

(3) 求 x-y 平面上的辐射功率方向图。

(4) 计算远区 $+\hat{z}$ 方向的辐射功率密度。

2.6.4 利用方向图相乘技术，画出图 2.6-22 所示偶极子天线阵在 x-y 平面上的辐射方向图。图中偶极子天线单元均为等幅同相激励。在图上指出辐射零点的角度。偶极子的指向为 $\hat{z}$ 方向。

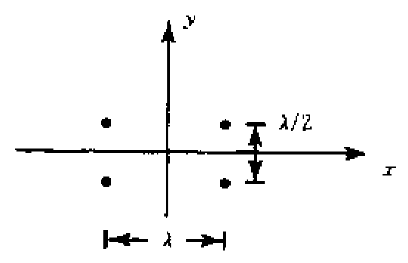


图 2.6-22 4 单元平面阵

2.6.5 两个有效高度为 l 的电小偶极天线平行于 $\hat{z}$ 轴方向，两个天线在 x 轴方向排列的间距为 λ。两个偶极子的激励电流的幅度都是 I_0。如果偶极子天线单元 2 的激励电流相对于单元 1 的相位为 φ，求天线阵远区辐射电场 $\boldsymbol{E}$ 的表达式。对 $\varphi = 0$ 和 $\pi/2$ 画出天线阵 x-y 平面上的辐射方向图。

2.6.6 一个 2 单元的简单阵列的单元天线为短偶极子，偶极子的有效长度为 d，间距为一个波长。终端馈电相位差为 180°。

(1) 当 $r \gg \lambda$ 时，用 r, θ 和 ϕ 表示辐射电场强度。

(2) 求辐射功率密度的时间平均值(用 r, θ 和 ϕ 表示)。当 θ 给定时，求最大辐射功率的 ϕ。

(3) 画出 $\theta = \pi/2$ 的平面上辐射功率密度相对 ϕ 角的函数曲线。求最大辐射功率的 ϕ。

2.6.7 如图 2.6-23 所示，双偶极子阵列的两个偶极子的指向都是 $\hat{z}$ 方向。位置为 $x = a$ 的偶极子的电流矩为 $I_0de^{-j\alpha}$，位置为 $x = -a$ 的偶极子的电流矩为 $I_0de^{+j\alpha}$，其中，d 为偶极子的有效长度。单元间距为 1/4

波长($d=\lambda/8$)。

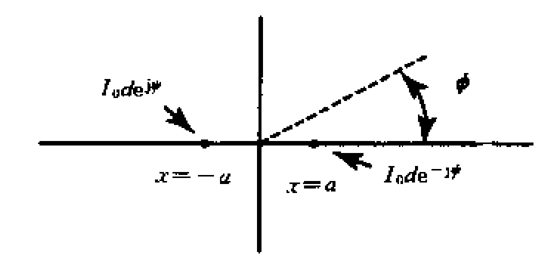


图 2.6-23　2 单元阵列

(1) 画出当两个偶极子的相对相移为 $\pi/2$ 时($\alpha=\pi/4$)天线阵在 $\theta=\pi/2$ 的平面上的辐射方向图,并指出辐射功率峰值和零点的方向。

(2) 对 $\alpha=0$ 的相移,画出天线阵在 $\theta=\pi/2$ 的平面上的辐射方向图,并指出辐射功率峰值和零点的方向。

(3) 在 $-\pi/4\leqslant\phi\leqslant\pi/4$ 的范围内,求 $\theta=\pi/2$ 的平面上单位面积辐射功率(辐射功率密度)最大的角度随相移 α 变化的函数。

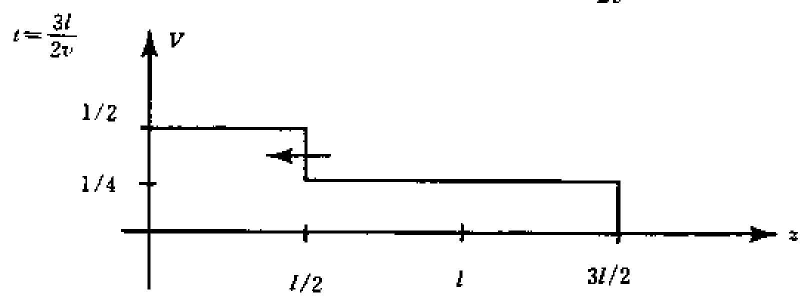
部分习题答案

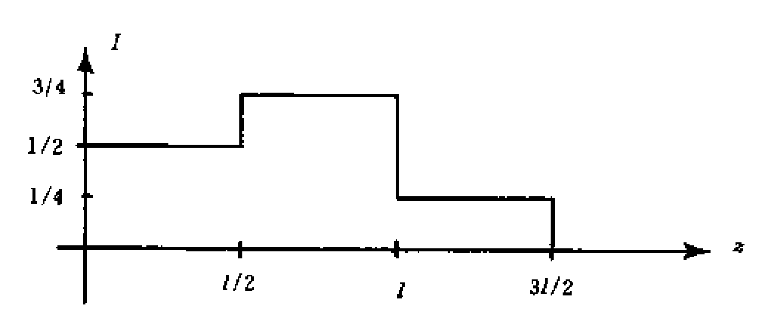
2.2.1

$l_f=1500\text{m}$,　$R_f=30\Omega$。

2.2.2

(1) $\frac{2l}{v}=10^{-8}\text{s}$,　$l=1.5\text{m}$。　(2) $R_L=Z_0/2$。　(3) 在 $t=\frac{3l}{2v}$ 时刻。





2.2.2 题图

2.3.1

(1) $V(z,t)=V\cos\omega_M\left(t-\frac{\Delta\beta}{\Delta\omega}z\right)\sin\omega_C\left[t-\frac{\beta_0}{\omega_C}z\right]$。

(2) 调制包络的移动速度为 $v_g=v_0/\sqrt{2}$,高频部分的移动速度为 $v_{ph}=\sqrt{2}v_0$,所以有 $v_{ph}=2v_g$。

2.3.2

$\theta=2n\pi\pm\omega\left(\sqrt{LC}l+\frac{1}{2}\frac{C_0}{Y_0}\right)$。当 $C_0\to0,\delta\omega\to0$ 时,在 $\beta_0 l$ 阻带带宽的量级为 $\frac{\omega_0C_0}{Y_0}$。

2.4.1

(1) 当 $\omega < \omega_0$ 时，$\theta_r = \pi$，$\dfrac{\omega}{\omega_0} = \dfrac{1}{\cosh(\theta_I/2)}$。

(2) $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = -e^{-\theta_I} = -(e^{-\frac{\theta_I}{2}})^2 \simeq -\omega^2 L_0 C_0$，当 $\dfrac{\omega_0}{\omega} \gg 1$ 时，$Z_{eq} \simeq j\omega L_0$。利用一个分压器，

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} \simeq \frac{j\omega L_0}{j\omega L_0 + \dfrac{1}{j\omega C_0}} \simeq -\omega^2 L_0 C_0;\quad \omega^2 L_0 C_0 \ll 1。$$

2.4.2

(2) $\omega_0^2 \leqslant \omega^2 \leqslant \omega_1^2 + \omega_0^2$。

2.4.4

(1) $\omega_0 = 2/\sqrt{L_0 C_0}$；$\omega_1 = 1/\sqrt{L_0 C_0}$。 (2) $\dfrac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{\sin^2\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{1}{4}}$。

2.4.5

(1) $\theta_a = \beta l = \omega l\sqrt{LC} = \omega\sqrt{lLCl} = 2\dfrac{\omega}{\omega_0}$，$\theta_L = 2\arcsin\dfrac{\omega}{\omega_0}$。

(2) $\omega \approx \omega_0/2 = 18.3\times 10^3\,\text{rad/s} \Rightarrow f = 2.91\,\text{kHz}$。

2.4.6

(1) $\sin^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\omega_{01}^2}{\omega^2} = \dfrac{1}{4\omega^2 L_0 C_0}$。 (2) $Z = \dfrac{V_n}{I_n} = \dfrac{A}{B} = \pm\sqrt{\dfrac{L_0}{C_0}}e^{j\frac{\theta}{2}}$。

(3) $v_n(t) = V_s\sin(\omega_0 t + n\pi/2)$。 (4) $v_n(t) = V_s\sin(\omega_0 t + n\pi/2)\dfrac{\sin\omega_1\left(t\theta\dfrac{2n}{\omega_{01}}\right)}{\left(t\theta\dfrac{2n}{\omega_{01}}\right)}$。

2.6.1

(3) 所得到的方向图有两个峰值方向，位置为 $\varphi_{max} = \pm 90°$，有 14 个零值方向，位置为 $\varphi = 0$，$\pm 41.4°$，$\pm 60.0°$，$\pm 75.5°$，$\pm 104.5°$，$\pm 120°$，$\pm 138.6°$，$180°$。

2.6.2

(1) $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \approx -j\omega\displaystyle\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz' \frac{\mu_0 I_0 e^{-jkz'} e^{-jk(r - z'\cos\theta)}}{4\pi r}\hat{\boldsymbol{z}} = \frac{-j\omega\mu_0 I_0 e^{-jkr}}{4\pi r}\cdot\frac{2\sin\left[\frac{kL}{2}(1-\cos\theta)\right]}{k(1-\cos\theta)}(\hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta)$。

2.6.3

(2) $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{\phi}}\omega\mu\dfrac{Il e^{-jk\rho}}{4\pi\rho}e^{j\phi}$。

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \text{Re}\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})e^{j\omega t}\} = \hat{\boldsymbol{\phi}}\omega\mu\dfrac{Il}{4\pi\rho}\cos(\omega t + \phi - k\rho)$。

(3) $|\langle \boldsymbol{S}\rangle| = \dfrac{1}{2}\text{Re}\left\{\dfrac{|\boldsymbol{E}|^2}{\eta}\right\} = \dfrac{1}{2}\eta\left(\dfrac{kIl}{4\pi\rho}\right)^2$ 是一个与方位角 ϕ 无关的常数。

2.6.4

$\pi/2$ 和 $\pi/3$。

2.6.5

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -j\omega\mu\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\hat{\boldsymbol{\theta}}f_\theta = \hat{\boldsymbol{\theta}}j\omega\mu\frac{Il}{2\pi r}e^{-jkr + j\frac{\psi}{2}}\sin\theta\cos\left(\pi\sin\theta\cos\phi - \frac{\psi}{2}\right)。$$

2.6.6

(1) $\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\omega\mu\dfrac{I_1 d e^{-jkr}}{2\pi r}\sin\theta\sin(\pi\sin\theta\cos\phi)$。

(2) $\langle\boldsymbol{S}\rangle = \dfrac{1}{2}\text{Re}\{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\} = \hat{\boldsymbol{r}}\dfrac{1}{2}\eta\left|\dfrac{kI_1 d}{2\pi r}\right|^2\sin^2\theta\sin^2(\pi\sin\theta\cos\phi)$。

$\pi\sin\theta\cos\phi = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \phi = \arccos\left(\dfrac{1}{2\sin\theta}\right)$。

(3) $\phi = \pi/3$。

2.6.7

(3) 阵因子是 $e^{j\alpha}e^{-j\frac{\pi}{2}\cos\phi}+e^{-j\alpha}e^{j\frac{\pi}{2}\cos\phi}=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)$。

当 $\sin\phi=0$ 时，即 $\phi=(0,\pi)$时辐射功率密度最小；当 $\sin(\alpha-\frac{\pi}{2}\cos\phi)=0$，即 $\phi_{max}=\arccos(\frac{2\alpha}{\pi})$时辐射功率密度最大。

第3章　传播和导行

3.1　时谐场

当某一频率的电磁波处于稳态时,电磁场是时谐的,这种时谐的电磁波称为单色波(单频波)或连续波(CW,Continuous Wave)。由于以下3点原因,连续波非常重要。①连续波假设可以消去麦克斯韦方程中的时间项,从而使数学处理大大简化。②通过连续波情况解的分析可以获得频域现象的特性响应,并应用傅里叶理论研究时域现象。③连续波表示能够涵盖整个频谱的电磁波。很显然,全面理解连续波或时谐场特性对于电磁波现象的研究是非常重要的。

角频率为 ω 的时谐场可以表示为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\} \tag{3.1.1}$$

式中,Re 表示复变量的实部,$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$在本书后文中约定作为时间变化项。对于前面约定 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$作为时间项,只需用 i 替换 $-\mathrm{j}$。采用 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$的时间项约定对应复平面的上半平面,并且与一般物理文献的习惯一致。复电场矢量 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$只是位置的函数而与时间无关。在本书中,我们不采用不同的符号区分时域的实变量如 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$和频域的复变量如 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$。这些符号的含义可以根据上下文理解。如果存在可能的不确定性,我们将简单地指明复变量 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$只是位置 $\boldsymbol{r}$ 的函数,而实变量 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$则是位置 $\boldsymbol{r}$ 和时间 t 的函数。

3.1.1　时谐场的麦克斯韦方程

将类似于公式(3.1.1)中 $\boldsymbol{E}$ 的定义用于 $\boldsymbol{H},\boldsymbol{B},\boldsymbol{D},\boldsymbol{J}$ 和 ρ 等其他的场量。将 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$和 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$代入法拉第定律,即公式(1.1.2),可以得到

$$\mathrm{Re}\{[\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \mathrm{i}\omega\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\} = 0 \tag{3.1.2}$$

方程(3.1.2)对所有的时间 t 都成立。

注意,当方程(3.1.2)方括号内的复变量与时间变化项 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$的所有取值的乘积的实部都是零时,方括号内的复变量必定等于零。对这一结论可做如下说明,考虑 $\mathrm{Re}\{C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\}=0$。其中,$C=C_\mathrm{R}+\mathrm{i}C_\mathrm{I}$ 且 C_R 和 C_I 都是实数,那么令 $\omega t=0$ 可得 $C_\mathrm{R}=0$,令 $\omega t=\pi/2$ 可得 $C_\mathrm{I}=0$。

由公式(3.1.2)可得

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \mathrm{i}\omega\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{3.1.3}$$

类似的结果用于麦克斯韦方程组的其他方程,并在方程中省略位置变量 $\boldsymbol{r}$,可以得到如下的方程组

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = \mathrm{i}\omega\boldsymbol{B} \tag{3.1.4}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = -\mathrm{i}\omega\boldsymbol{D} + \boldsymbol{J} \tag{3.1.5}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \tag{3.1.6}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho \tag{3.1.7}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J} = \mathrm{i}\omega\rho \tag{3.1.8}$$

边界条件与公式(1.9.1)~(1.9.4)和公式(1.9.19)~(1.9.22)给出的边界条件相同,只是这里

的场是复变量。

需要指出的是,复的场矢量只是实的场矢量的一种方便的表示,要从复场量的表示恢复随位置和时间变化的实的场量,只需像公式(3.1.1)所表示的将复场量乘上时间变化项 $e^{-i\omega t}$并取乘积的实部即可。

3.1.2 本构方程和色散介质

在时谐条件下,本构元素一般也是复变量。考虑符合欧姆定律 $\boldsymbol{J}_c = \sigma \boldsymbol{E}$ 的导电介质,根据麦克斯韦方程

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = -i\omega \boldsymbol{D} + \boldsymbol{J}_c + \boldsymbol{J}_f \tag{3.1.9}$$

式中,$\boldsymbol{J}_f$ 是源电流。注意,$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$,可以将 $\boldsymbol{J}_c$ 项并入 $\boldsymbol{D}$,从而有

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = -i\omega\left(\varepsilon + \frac{i}{\omega}\sigma\right)\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}_f$$

进而可以定义复介电常数

$$\varepsilon_c = \varepsilon + \frac{i}{\omega}\sigma \tag{3.1.10}$$

复介电常数实际上已经包含了介质的电导率。当 ε 和 σ 都是实数时,电导率 σ 将決定复介电常数 $\varepsilon + i\sigma/\omega$ 的虚部。

时间色散是多数介质在时变场作用下的共同现象。举例来说,当频率从直流提高到光波频段,水的介电常数将从 $80\varepsilon_0$ 减小到大约 $1.8\varepsilon_0$。介电常数发生这种变化的原因是具有永久偶极矩的水分子在外加电磁场作用下的重新排列在缓变场时要比光波频段时显著得多。另一个例子,等离子体是中性气体电离形成的,它由自由电子和正离子组成。由于正离子的质量要比电子质量大得多,可以假设只有自由电子和电磁波的作用需要加以考虑。令等离子体的电子密度为 N,电子质量为 9.1×10^{-31}kg,电子电量为 $q = -1.6\times10^{-19}$C,那么等离子体中的体电流为 $J_p = Nqv$,进一步可以推导等离子体介质的本构关系。这里 v 是自由电子的运动速度,N 是每平方米体积内的电子数目。

> **注**　当 $v/c \ll 1$ 时,在电磁波场作用下电子受到洛伦兹力的作用,对于自由空间的平面波 $|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{E}|/c$,电子受到的洛伦兹力为
>
> $$\boldsymbol{f} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \approx q\boldsymbol{E}$$
>
> 根据牛顿第二定律 $q\boldsymbol{E} = \mathrm{d}(m\boldsymbol{v})/\mathrm{d}t$,在时谐场激励下,考虑 $v/c \ll 1$ 的情形,用 $-i\omega$ 代替对时间的求导,可以得到 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的关系
>
> $$q\boldsymbol{E} = -i\omega m\boldsymbol{v}$$
>
> 那么由电子引起的体电流是 $\boldsymbol{J}_p = Nq\boldsymbol{v} = iNq^2\boldsymbol{E}/m\omega$。

由麦克斯韦方程

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = -i\omega \boldsymbol{D} + \boldsymbol{J}_p + \boldsymbol{J}_f = -i\omega\varepsilon_p(\omega)\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}_f$$

可以得到等离子体介质的介电常数

$$\varepsilon_p(\omega) = \varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \tag{3.1.11}$$

式中,

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}} \approx 56.4\sqrt{N} \tag{3.1.12}$$

为等离子体频率。方程(3.1.11)表明等离子体的介电常数 ϵ_p 依赖于频率的变化。可以看到 ϵ_p 永远小于 ϵ_o。

例 3.1.1 各向异性导电介质。

考虑符合欧姆定律 $\boldsymbol{J}_c=\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{E}$ 的各向异性介质,根据麦克斯韦方程

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{D}+\boldsymbol{J}_c+\boldsymbol{J}_f \tag{3.1.13}$$

式中,$\boldsymbol{J}_f$ 是源电流,由于在一般的双各向异性介质中 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{H}$,我们可以将 $\boldsymbol{J}_c$ 项并入 $\boldsymbol{D}$,得到

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=-\mathrm{i}\omega\left(\boldsymbol{\varepsilon}+\frac{\mathrm{i}}{\omega}\boldsymbol{\sigma}\right)\cdot\boldsymbol{E}-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{H}+\boldsymbol{J}_f \tag{3.1.14}$$

进一步我们可以定义新的介电常数张量

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c=\boldsymbol{\varepsilon}+\frac{\mathrm{i}}{\omega}\boldsymbol{\sigma} \tag{3.1.15}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_c$ 是一个复张量,它包含了介质的各向异性电导率。

例 3.1.2 回旋介质。

当外加直流磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 作用时,公式(3.1.11)所描述的电子等离子体就变为各向异性介质。设 $\boldsymbol{B}_0$ 在 $\hat{z}$ 方向,则外加磁场的作用通过回旋频率 $\omega_c=qB_0/m$ 影响介质的本构参数。这时介电常数张量为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\epsilon & \mathrm{i}\epsilon_g & 0\\ -\mathrm{i}\epsilon_g & \epsilon & 0\\ 0 & 0 & \epsilon_z\end{bmatrix} \tag{3.1.16}$$

其中的本构参数为

$$\epsilon=\epsilon_0\left[1-\frac{\omega_p^2}{(\omega^2-\omega_c^2)}\right]$$

$$\epsilon_g=\epsilon_0\left[\frac{-\omega_p^2\omega_c}{\omega(\omega^2-\omega_c^2)}\right]$$

$$\epsilon_z=\epsilon_0\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

可以将本构关系写成 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{D}$ 的形式,其中

$$\boldsymbol{\kappa}=\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}=\begin{bmatrix}\kappa & \mathrm{i}\kappa_g & 0\\ -\mathrm{i}\kappa_g & \kappa & 0\\ 0 & 0 & \kappa_z\end{bmatrix}$$

求本构参数 κ,κ_g 和 κ_z。

解 当电磁波的频率远高于等离子体的电子碰撞频率时,电子的碰撞效应可以不考虑,等离子体可以看做是无损耗介质。利用洛伦兹力定律和牛顿定律,有

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$$

在时谐激励和 $v\ll c$ 的条件下,我们可以得到

$$-\mathrm{i}\omega m\boldsymbol{v} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_0)$$

定义矢量 $\boldsymbol{\omega}_c = q\boldsymbol{B}_0/m$，则有

$$\boldsymbol{\omega}_c \times \boldsymbol{v} = \frac{q}{m}\boldsymbol{E} + \mathrm{i}\omega\boldsymbol{v} \tag{3.1.17}$$

分别用 $\boldsymbol{\omega}_c$ 叉乘和点乘上列方程可以得到

$$-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{\omega}_c \times \boldsymbol{v} = \frac{q}{m}\boldsymbol{\omega}_c \times \boldsymbol{E} + \omega_c^2\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\omega}_c(\boldsymbol{\omega}_c \cdot \boldsymbol{v}) \tag{3.1.18}$$

$$-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{\omega}_c \cdot \boldsymbol{v} = \frac{q}{m}\boldsymbol{\omega}_c \cdot \boldsymbol{E} \tag{3.1.19}$$

将方程(3.1.17)和(3.1.19)代入方程(3.1.18)，并利用关系 $\boldsymbol{J} = Nq\boldsymbol{v}$ 和 $\omega_p^2 = Nq^2/m\epsilon_o$ 可以得到

$$-\mathrm{i}\omega\epsilon_o\omega_p^2\boldsymbol{E} + \omega^2\boldsymbol{J} = \epsilon_o\omega_p^2\boldsymbol{\omega}_c \times \boldsymbol{E} + \omega_c^2\boldsymbol{J} - \mathrm{i}\epsilon_o\frac{\omega_p^2}{\omega}\boldsymbol{\omega}_c(\boldsymbol{\omega}_c \cdot \boldsymbol{E})$$

从而

$$\boldsymbol{J} = \frac{-\mathrm{i}\omega\epsilon_o}{\omega^2 - \omega_c^2}\left[\mathrm{i}\frac{\omega_p^2}{\omega}\boldsymbol{\omega}_c \times \boldsymbol{E} - \omega_p^2\boldsymbol{E} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}(\boldsymbol{\omega}_c\boldsymbol{\omega}_c \cdot \boldsymbol{E})\right]$$

根据安培定律，并考虑到 $\boldsymbol{\omega}_c = \hat{z}qB_o/m$，可以得到

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{H} &= \mathrm{i}\omega\epsilon_o\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} = \mathrm{i}\omega\left[\mathrm{i}\epsilon_g\hat{z} \times \boldsymbol{E} + \epsilon\boldsymbol{E} + \frac{\omega_p^2\omega_c^2\epsilon_o}{\omega^2(\omega^2 - \omega_c^2)}\hat{z}(\hat{z}\cdot\boldsymbol{E})\right] \\ &= -\mathrm{i}\omega\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{E}\end{aligned}$$

式中，ϵ_g，ϵ 如前定义。将 $\boldsymbol{\epsilon}$ 写成矩阵形式，可以发现

$$\epsilon_z = \epsilon_o\left(1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 - \omega_c^2/\omega^2} + \frac{\omega_p^2\omega_c^2/\omega^4}{1 - \omega_c^2/\omega^2}\right) = \epsilon_o\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

对 $\boldsymbol{\epsilon}$ 求逆，可以得到 $\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\epsilon}^{-1}$ 的元素表达式

$$\kappa = \frac{\epsilon}{\epsilon^2 - \epsilon_g^2} = \frac{1}{\epsilon_0}\left[\frac{1 - \omega_p^2/\omega^2 - \omega_c^2/\omega^2}{(1 - \omega_p^2/\omega^2)^2 - \omega_c^2/\omega^2}\right]$$

$$\kappa_g = \frac{-\epsilon_g}{\epsilon^2 - \epsilon_g^2} = \frac{1}{\epsilon_0}\left[\frac{\omega_c\omega_p^2/\omega^3}{(1 - \omega_p^2/\omega^2)^2 - \omega_c^2/\omega^2}\right]$$

$$\kappa_z = \frac{1}{\epsilon_z} = \frac{1}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{1 - \omega_p^2/\omega^2}\right)$$

容易验证 $\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{I}$。

当外加磁场无限强时，$\omega_c \to \infty$，这时有

$$\epsilon = \epsilon_o \qquad \kappa = \frac{1}{\epsilon_o}$$

$$\epsilon_g = 0 \qquad \kappa_g = 0$$

$$\epsilon_z = \epsilon_o\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \qquad \kappa_z = \frac{1}{\epsilon_o}\left(\frac{1}{1 - \omega_p^2/\omega^2}\right)$$

此时介质为单轴等离子体。

具有如公式(3.1.16)所示的厄米(Hermit)介电常数张量的各向异性介质称为旋电介质。

具有如下所示形式的厄米磁导率张量

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu & \mathrm{i}\mu_g & 0 \\ -\mathrm{i}\mu_g & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix} \tag{3.1.20}$$

的介质成为旋磁介质。旋磁介质就是一个受到 $\hat{z}$ 方向外加稳恒磁场作用的铁氧体实例,铁氧体将围绕 $\hat{z}$ 发生磁化。应该注意的是,回旋介质的回旋元素尽管是虚数,但并不引起任何损耗。

3.1.3 坡印廷功率矢量的时间平均

将方程(3.1.4)点乘 $\boldsymbol{H}^*$ 减去方程(3.1.5)的复共轭点乘 $\boldsymbol{E}$,就可以导出复坡印廷定理。利用矢量运算恒等式 $\boldsymbol{H}^*\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}^*=\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)$,可以得到

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*) = \mathrm{i}\omega(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}^* - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^*) - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}^* \tag{3.1.21}$$

定义复坡印廷矢量为

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^* \tag{3.1.22}$$

值得指出的是,当涉及坡印廷定理时,复坡印廷矢量 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*$ 的定义在数学上并不是惟一的。事实上,可以给 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*$ 加上一个任意的旋度场$\nabla\times\boldsymbol{A}$,而方程(3.1.21)仍然成立。在物理上,公式(3.1.22)定义的复矢量 $\boldsymbol{S}$ 是一个复功率密度矢量。

方程(3.1.21)右边最后一项 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}^*=\boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{J}_c^*+\boldsymbol{J}_f^*)$包括两部分,一部分决定于欧姆电流 $\boldsymbol{J}_c$,另一部分决定于自由电流 $\boldsymbol{J}_f$。对方程(3.1.21)重新排序,有

$$-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}_f^* = \nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*) + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}_c^* + \mathrm{i}\omega(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^* - \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}^*) \tag{3.1.23}$$

考虑一个小的体积单元 V,方程(3.1.23)的意义是:自由电流 $\boldsymbol{J}_f^*$ 提供给体积单元 V 的功率等于流出 V 的复坡印廷功率流的散度$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)$加上 V 中的复功率耗散$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}_c^*$ 和 V 中储存的电磁能量,这一储存的电磁能量在方程(3.1.23)表示为右边的最后一项。

虽然场矢量的瞬时值可以直接从公式(3.1.1)得到,但是坡印廷功率密度矢量并不能用同样的方法得到。功率流矢量 $\boldsymbol{S}$ 决定于两个场矢量的乘积。为了更深地理解这一点,可将一个复场矢量表示为两个实矢量

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{r}) + \mathrm{i}\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{r}) \tag{3.1.24}$$

式中 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}$ 和 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}$ 都是实矢量,它们分别表示复矢量 $\boldsymbol{E}$ 的实部和虚部。类似地可以给出下列表示

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{r}) + \mathrm{i}\boldsymbol{H}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{r}) \tag{3.1.25}$$

场矢量的瞬时值为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\} = \boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}\cos\omega t + \boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}\sin\omega t \tag{3.1.26}$$

和

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{H}_{\mathrm{R}}\cos\omega t + \boldsymbol{H}_{\mathrm{I}}\sin\omega t \tag{3.1.27}$$

复坡印廷矢量为

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^* = \boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{R}} + \boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{I}} + \mathrm{i}(\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{R}} - \boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{I}}) \tag{3.1.28}$$

定义瞬时坡印廷矢量为

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \tag{3.1.29}$$

由公式(3.1.26)和(3.1.27),有

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{R}}\cos^2\omega t + \boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{I}}\sin^2\omega t + (\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{R}})\sin\omega t\cos\omega t \tag{3.1.30}$$

很显然,式(3.1.30)与式(3.1.28)的关系与式(3.1.1)所给出的复矢量与矢量瞬时值的关系完全不同。瞬时坡印廷矢量 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)$是一个随时间变化的实矢量。为了建立 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$与 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)$之间的联系,必须消去 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)$随时间的变化。这里可对 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)$进行时间平均,从而得到

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d(\omega t)\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)\\ &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}_R\times\boldsymbol{H}_R+\boldsymbol{E}_I\times\boldsymbol{H}_I)\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})\}\end{aligned}\tag{3.1.31}$$

第一个等式给出了 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)$时间平均的定义,第二个等式是由式(3.1.30)而来,第三个等式则是从式(3.1.28)得到的。根据上面的结果,当已知一个复坡印廷矢量 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*$时,取其实部的 1/2 就可以得到瞬时坡印廷矢量的时间平均。

$$\langle \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\}$$

上面的结论可以推广到任意两个场量的乘积,即两个场量乘积的时间平均值等于一个场量与另一个场量复共轭的乘积的实部的一半。

专题 3.1.A 无损耗介质中的对称条件

考虑介质中的无源区域($\boldsymbol{J}=0$),根据复坡印廷定理(3.1.21),复坡印廷矢量散度的时间平均为

$$\langle \nabla\cdot\boldsymbol{S}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\mathrm{i}\omega(\boldsymbol{H}^*\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^*)\}\tag{3.1.32}$$

我们对介质按下述准则进行分类:当$\langle\nabla\cdot\boldsymbol{S}\rangle<0$时,介质为无源介质;当$\langle\nabla\cdot\boldsymbol{S}\rangle>0$时,介质为有源介质;当$\langle\nabla\cdot\boldsymbol{S}\rangle=0$时,介质为无损耗介质。

介质的本构关系的最一般的表示为双各向异性形式。关于 $\boldsymbol{EH}$ 表示的本构方程为

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{H}$$
$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{H}+\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{E}$$

我们应用复坡印廷定理推导无损耗介质中的对称条件。在时谐激励下,介质的本构矩阵 $\boldsymbol{\varepsilon}$,$\boldsymbol{\xi}$,$\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\zeta}$ 通常为与频率有关的复矩阵。在一般情况下,总共有 72 个实参数。

注意,一个复数 C 的实部可以通过下列运算获得

$$\mathrm{Re}\{C\}=\frac{1}{2}(C+C^*)$$

利用这一关系,可以将公式(3.1.32)改写成

$$\langle\nabla\cdot\boldsymbol{S}\rangle=\frac{1}{4}\{\mathrm{i}\omega(\boldsymbol{H}^*\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^*)-[\boldsymbol{H}^*\cdot\boldsymbol{B}-\mathrm{i}\omega(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^*)]^*\}\tag{3.1.33}$$

将双各向异性介质的本构关系代入式(3.1.33)可以得到

$$\begin{aligned}\langle\nabla\cdot\boldsymbol{S}\rangle=\frac{\mathrm{i}\omega}{4}[&\boldsymbol{H}^*\cdot(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{H}+\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{E})-\boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}^*\cdot\boldsymbol{E}^*+\boldsymbol{\xi}^*\cdot\boldsymbol{H}^*)\\ &-\boldsymbol{H}\cdot(\boldsymbol{\mu}^*\cdot\boldsymbol{H}^*+\boldsymbol{\zeta}^*\cdot\boldsymbol{E}^*)+\boldsymbol{E}^*\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{H})]\end{aligned}$$

对于上式中类似于 $\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\mu}^*\cdot\boldsymbol{H}^*$ 的项,可以利用恒等关系 $\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\mu}^*\cdot\boldsymbol{H}^*=\boldsymbol{H}^*\cdot\boldsymbol{\mu}^+\cdot\boldsymbol{H}$ 进行合并简化(其中的上标 + 表示取复矩阵的转置的复共轭)

$$\langle\nabla\cdot\boldsymbol{S}\rangle=\frac{\mathrm{i}\omega}{4}[\boldsymbol{E}^*\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^+)\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{H}^*\cdot(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^+)\cdot\boldsymbol{H}+$$

$$E^* \cdot (\xi - \zeta^+) \cdot H + H^* \cdot (\zeta - \xi^+) \cdot E] \tag{3.1.34}$$

对于无损耗介质,公式(3.1.34)对电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 的所有可能的取值都应为零。由此可以得到介质的无损耗条件为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^+ \tag{3.1.35a}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^+ \tag{3.1.35b}$$

$$\xi = \zeta^+ \tag{3.1.35c}$$

无损耗条件(3.1.35a)和(3.1.35b)说明无损耗介质的 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$ 为厄米矩阵,每个矩阵分别有6个独立的复元素。由于厄米矩阵的对角线元素必须为实数,所以这6个复元素共包括9个实的本构参数。方程(3.1.35c)建立了 ξ 和 ζ 之间的联系,这两个矩阵有9个独立的复元素,从而有18个实的本构参数。所以对双各向异性介质,本构关系总共包含21个独立的复的本构元素,其中6个为实数,或者说双各向异性介质的本构关系共有36个独立的实的本构参数。

通过类似的步骤可以推导出由公式(1.8.20)所给出的关于 ***DB*** 表示的本构参数的无损耗条件为

$$\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}^+$$

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^+$$

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\gamma}^+$$

关于 ***EB*** 表示的本构参数满足

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^+$$

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^+$$

$$\boldsymbol{L} = -\boldsymbol{M}^+$$

习题

3.1.1 考虑有碰撞的电子等离子体,引入碰撞频率 $\omega_{\text{eff}} \approx NT^{-2/3}$,从而引进了一个衰减项,且电子受到的 $\hat{x}$ 方向上的力变为 $f_x = \mathrm{d}^2(mx)/\mathrm{d}t^2 + \omega_{\text{eff}}\mathrm{d}(mx)/\mathrm{d}t$。试推导有碰撞电子等离子体的本构关系

$$\epsilon = \epsilon_0\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{\text{eff}}^2} + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\omega_{\text{eff}}}{\omega(\omega^2 + \omega_{\text{eff}}^2)}\right]$$

当取 $\omega_{\text{eff}}/\omega \to \infty$ 和 $\omega_{\text{eff}} \to 0$ 时的极限是什么?

3.1.2 在本习题中,我们将考察在谐振频率附近的色散现象。当电子像在原子中那样被束缚在离子附近时满足如下方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + g\omega_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\right)\boldsymbol{P} = \frac{Ne^2}{m}\boldsymbol{E}$$

式中,$\boldsymbol{P} = Nq\boldsymbol{r}$ 是单位体积中的总的偶极矩,g 是一个阻尼常数,ω_0 是计及恢复力作用的电子的特征频率。试推导复介电常数

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0\left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \mathrm{i}g\omega\omega_g - \omega^2}\right) = \epsilon_R(\omega) + \mathrm{i}\omega_I(\omega)$$

并画出复介电常数 $\epsilon(\omega)$ 的实部和虚部随频率的变化曲线。找出正常色散区域和非正常色散区域。(在正常色散区域 ϵ_R 随频率的增加而增加,在非正常区域 ϵ_R 随频率的增加而减小)。试证明 ϵ_I 在谐振频率点 ω_0 的取值最大。注意,需要利用当 $\omega \simeq \omega_0$ 时 $(\omega^2 - \omega_0^2) \simeq 2\omega_0(\omega - \omega_0)$ 的近似关系。

3.1.3 在介质的宏观色散理论中,考虑平衡状态的偶极子极化 P_s。当外加一个电场 E 时,立即会建立起一个微扰的极化 P_1,但是偶极子的剩余的极化 P_2 经过一段时间后达到平衡状态。设介质的宏观弛豫时间为 τ,则有

$$\frac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\tau}(P_s - P_1 - P_2)$$

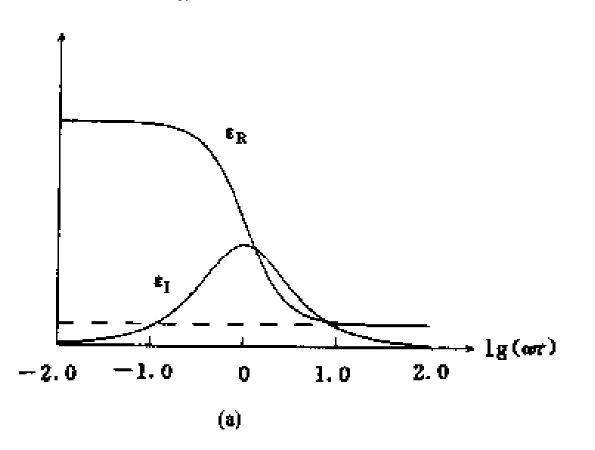
式中，$P_s = (\varepsilon_s - \varepsilon_0)E$，$P_1 = (\varepsilon_\infty - \varepsilon_0)E$，其中 ε_s 和 ε_∞ 都是实数，它们分别表示静态和频率无限大时的介电常数。

(1) 对于角频率为 ω 的时谐场，试证明 $P_2 = \frac{P_s - P_1}{1 - \mathrm{i}\omega\tau}$。并证明德拜(Debye)公式

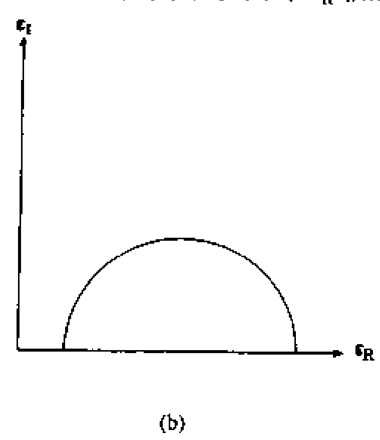
$$D = \varepsilon E = \varepsilon_0 E + P_1 + P_2 = \left(\varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 - \mathrm{i}\omega\tau}\right)E$$

(2) 令 $\varepsilon = \varepsilon_R + \mathrm{i}\varepsilon_I$，画出 ε_R 和 ε_I 的曲线(见图 3.1-1a)并标出 ε_R 和 ε_I 的取值和 ε_I 的最大点。对水分子其数值是多少。

(3) 试证明 ε_I 相对 ε_R 的变化曲线是一个圆。求德拜半圆(见图 3.1-1b)的半径及其与 ε_R 轴的交点。



(a)



(b)

图 3.1-1　德拜 Debye 图

3.1.4　根据实的空间-时间参数的坡印廷定理，有

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}W_e(\boldsymbol{r},t) + P_{EL}(\boldsymbol{r},t)$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\cdot\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}W_m(\boldsymbol{r},t) + P_{ML}(\boldsymbol{r},t)$$

其中，$W_e(\boldsymbol{r},t)$—电场能量密度，　$W_m(\boldsymbol{r},t)$—磁场能量密度，
$P_{EL}(\boldsymbol{r},t)$—电极化损耗密度，　$P_{ML}(\boldsymbol{r},t)$—磁极化损耗密度。

考虑窄带信号，利用傅里叶变换构造下列方程

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2}\int\mathrm{d}\omega\int\mathrm{d}\omega'\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)\cdot\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},\omega')\cdot[\mathrm{i}\omega'\varepsilon^*(\omega') - \mathrm{i}\omega\varepsilon(\omega)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega')t}$$

(1) 试证明，对于具有实的介电常数 $\varepsilon(\omega)$ 和磁导率 μ 的各向同性色散介质，存储电场能量密度的时间平均为

$$\langle W_e\rangle = \frac{1}{4}\frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial\omega}|\boldsymbol{E}|^2$$

存储磁场能量密度的时间平均为

$$\langle W_m\rangle = \frac{1}{4}\frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial\omega}\mu|\boldsymbol{H}|^2$$

(2) 计算介电常数为 $\varepsilon = \varepsilon_0[1 - (\omega_p^2/\omega^2)]$ 的等离子体介质的电场能量密度，其中等离子体频率为 $\omega_p^2 = Ne^2/\varepsilon_0 m$($m$ 是自由电子的质量)。试证明

$$\langle W_e\rangle = \frac{\varepsilon_0}{4}\left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)|\boldsymbol{E}|^2$$

上式中第一项为自由空间中的存储电场能量密度。试证明上式中的第二项表示电荷动能的时间平均。提示，$m\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = eE$。

3.1.5 考虑两个实的时谐矢量 $\boldsymbol{E}_1(t)$ 和 $\boldsymbol{E}_2(t)$，它们分别按照 $\boldsymbol{E}(t)=\mathrm{Re}\{\boldsymbol{E}e^{-i\omega t}\}$ 的规则用两个复矢量 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 表示。令 $\boldsymbol{E}_1=\hat{x}+\hat{y}\,\mathrm{i}$，$\boldsymbol{E}_2=\mathrm{i}(\hat{x}+\hat{y}\,\mathrm{i})$，那么，(1) $\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{E}_2$ 和 $\boldsymbol{E}_1(t)\times\boldsymbol{E}_2(t)$ 是否都等于零，(2) $\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2$ 和 $\boldsymbol{E}_1(t)\cdot\boldsymbol{E}_2(t)$ 是否都等于零。

3.1.6 试证明任意的椭圆极化波可以分解为一个左旋圆极化波和一个右旋圆极化波之和。

3.2 平面波解

考虑均匀各向同性介质中的无源区域，介质的本构参数分别为标量的介电常数 ϵ 和标量的磁导率 μ。麦克斯韦方程的复场矢量形式为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H} \tag{3.2.1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=-\mathrm{i}\omega\epsilon\boldsymbol{E} \tag{3.2.2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0 \tag{3.2.3}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0 \tag{3.2.4}$$

对方程(3.2.1)取旋度，代入方程(3.2.2)并利用方程(3.2.3)的结果可以得到关于电场 $\boldsymbol{E}$ 的波动方程

$$(\nabla^2+\omega^2\mu\epsilon)\boldsymbol{E}=0 \tag{3.2.5}$$

方程(3.2.5)就是齐次亥姆霍兹方程。

方程(3.2.5)一般平面波解可以写成如下的形式

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}_0e^{\mathrm{i}(k_xx+k_yy+k_zz)}=\boldsymbol{E}_0e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{3.2.6}$$

式中，$\boldsymbol{E}_0$ 是一个与空间坐标 x,y 和 z 无关的常矢量。将(3.2.6)代入方程(3.2.5)可以得到色散关系为

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=\omega^2\mu\epsilon=k^2 \tag{3.2.7}$$

式中，k 是矢量 $\boldsymbol{k}$ 的幅度。

$\boldsymbol{k}$ 被称为波矢量、传播矢量或简单地称之为 $\boldsymbol{k}$ 矢量。波矢量 $\boldsymbol{k}$ 可以写成下列形式

$$\boldsymbol{k}=\hat{x}k_x+\hat{y}k_y+\hat{z}k_z \tag{3.2.8}$$

位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 可以写成

$$\boldsymbol{r}=\hat{x}x+\hat{y}y+\hat{z}z \tag{3.2.9}$$

其中，$\hat{x}$，$\hat{y}$ 和 $\hat{z}$ 表示直角坐标系中沿 x,y 和 z 方向的单位矢量，k_x,k_y 和 k_z 是 $\boldsymbol{k}$ 矢量的分量。

对于给定的 $\boldsymbol{k}$ 矢量，一相位等于常数的波前由方程

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=\text{常数}$$

决定，该方程表明波前垂直于 $\boldsymbol{k}$ 矢量(如图 1.5-1 所示)。对于方程(3.2.6)给出的波动解，它的波前是一个平面，并且在波前平面上电场的幅度也是一个常数，我们称之为均匀平面波。由于常数相位波前在所有的时间都必须垂直于 $\boldsymbol{k}$ 矢量，所以可以得出这样的结论，即相位波前沿 $\boldsymbol{k}$ 矢量的方向传播。

对空间变化项 $e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ 进行 $\frac{\partial}{\partial x}$，$\frac{\partial}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial}{\partial z}$ 运算的结果分别为 $\mathrm{i}k_x$，$\mathrm{i}k_y$ 和 $\mathrm{i}k_z$，因此算子

$$\nabla=\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

作用于 $e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ 就等价于 $\mathrm{i}\boldsymbol{k}$。从面对于平面波解，麦克斯韦方程(3.2.1)～(3.2.4)变为

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}=\omega\mu\boldsymbol{H} \tag{3.2.10}$$

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}=-\omega\epsilon\boldsymbol{E} \tag{3.2.11}$$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}=0 \tag{3.2.12}$$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{H}=0 \tag{3.2.13}$$

由方程(3.2.12)和(3.2.13)可以看出，平面波的电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 都在垂直于 $\boldsymbol{k}$ 矢量的波前平面上。

例 3.2.1　单色波的极化。

考虑随时间变化的电场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$。在 $\boldsymbol{r}=0$ 时，令

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}+\mathrm{i}\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}$$

我们发现

$$\boldsymbol{E}(t)=\mathrm{Re}\{(\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}+\mathrm{i}\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}\cos\omega t+\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}\sin\omega t$$

$\boldsymbol{E}(t)$的时间导数为

$$\frac{\partial\boldsymbol{E}(t)}{\partial t}=-\omega(\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}\sin\omega t-\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}\cos\omega t)$$

在图 3.2-1 中，我们画出了两个矢量 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}$ 和 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}$。在 $t=0$ 时刻，$\boldsymbol{E}(t)$等于 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}$，其时间变化率平行于 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}$。当 $\omega t=\pi/2$ 时，$\boldsymbol{E}(t)$等于 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}$，其时间变化率与 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}$ 的方向相反。$\boldsymbol{E}(t)$矢量的顶端随时间变化的轨迹是一个椭圆。由两个 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}$ 和 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}$ 确定的平面被称为极化平面。当 $\boldsymbol{k}$ 的方向垂直于纸面向外时，$\boldsymbol{E}(t)$矢量的顶端沿着右手螺旋方向，拇指指向传播方向 $\boldsymbol{k}$，这样的波被称为右手椭圆极化波。如果 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}$ 和 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}$ 相互垂直并且幅度相等，这样的波被称为圆极化。

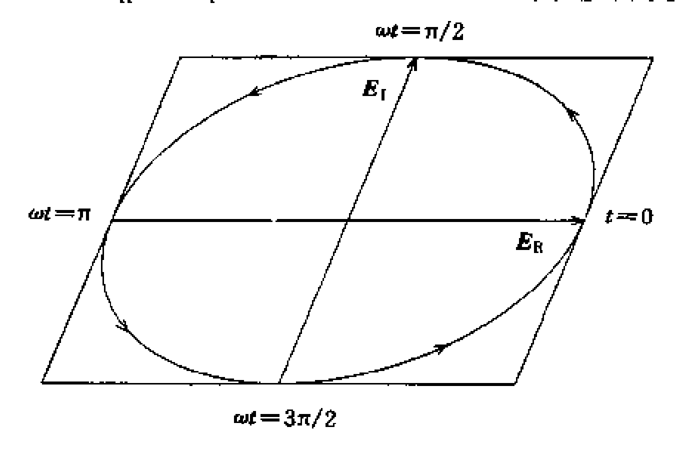


图 3.2-1　极化平面

例 3.2.2　求复坡印廷矢量功率密度 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^{*}$。

解　利用(3.2.11)和(3.2.12)，可以得到

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{\omega\mu^{*}}\boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{k}^{*}\times\boldsymbol{E}^{*})=\frac{\boldsymbol{k}^{*}}{\omega\mu^{*}}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^{*})$$

时间平均坡印廷功率密度为$\langle\boldsymbol{S}\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\boldsymbol{S}\}$。

3.2.1　相位和群速

考虑(3.2.8)所给的波矢量 $\boldsymbol{k}$，例如在 $\hat{x}$ 方向上，垂直于 $\hat{x}$ 的平面不是等相位波前。该平面上的相位分布为 $k_y y+k_z z$。在 $\hat{x}$ 方向上的相速和波长分别为 ω/k_x 和 $2\pi/k_x$，所以在 $\hat{x}$ 方向

上，波的相速显得要大一些，波长显得要长一些。相位时延 $\boldsymbol{T}_p$ 和群时延 $\boldsymbol{T}_g$ 分别定义为

$$\boldsymbol{T}_p = \frac{\boldsymbol{k}}{\omega}$$

$$\boldsymbol{T}_g = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}\omega}$$

其中，$\boldsymbol{T}_p$ 和 $\boldsymbol{T}_g$ 都是矢量。波矢量 $\boldsymbol{k}$ 在某一方向上的分量越大，波前在该方向上移动单位长度的时间延迟越长。

相速和群速的定义分别为

$$v_{pi} = \frac{\omega}{k_i} \tag{3.2.14}$$

和

$$v_{gi} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_i} \tag{3.2.15}$$

其中，下标 i 表示矢量的第 i 个分量。很显然，只有在波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的方向上，相速矢量 v_{pi} 才简化为 $u=\omega/k$。需要注意的是，一个波群可以通过具有不同频率 ω 的平面波或具有不同波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的平面波组合形成。所以相速和群速的差别既可以由介质材料的色散引起，也可以由介质材料的各向异性引起。当介质不是各向同性时，波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的幅度将随着方向的不同而变化。

由于介质的色散关系给出了 ω 和 $\boldsymbol{k}$ 的关系，所以只需给定波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的两个分量就可以决定一个波动过程。也就是说，只需要给定波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的方向就足以决定一个波动过程。而波矢量的幅度 $\boldsymbol{k}$ 可以通过色散关系(3.2.7)确定。当介质不是各向同性时，波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的幅度也是随其方向变化的函数。

考虑自由电子等离子体的色散介质，其介电常数为

$$\varepsilon = \varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

其色散关系 $k=\omega(\mu_0\varepsilon)^{1/2}$ 是 ω 的非线性函数。现将波数记为 $k=k(\omega)$，不同频率的波以不同的相速传播。考虑一组不同角频率的平面波群，在色散介质中沿 $\hat{z}$ 轴方向传播。假设所有的角频率都在一个中心频率 ω_0 附近，则可以用中心频率 ω_0 附近的展开形式表示波数 k：

$$k(\omega) = k(\omega_0) + (\omega - \omega_0)\left[\frac{\delta k(\omega)}{\delta\omega}\right]_{\omega=\omega_0} + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2\left[\frac{\delta^2 k(\omega)}{\delta\omega^2}\right]_{\omega=\omega_0} + \cdots \tag{3.2.16}$$

对于窄带信号，只需保留前面两项。那么该平面波群的空间-时间变化可以表示为

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\omega)z-\mathrm{i}\omega t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\omega_0)z-\mathrm{i}\omega_0 t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)\left\{t-z\left[\frac{\mathrm{d}k(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\right]_{\omega=\omega_0}\right\}}$$

其可以看做是一个相位时延为 $T_p=k/\omega_0$，群时延为 $T_g=\mathrm{d}k(\omega)/\mathrm{d}\omega$ 波的传播。

可以给出 ω 随 k 变化的函数曲线 ω-k。图 3.2-2 是各向同性等离子体介质的 ω-k 曲线。从坐标原点到曲线上 $\omega=\omega_0$ 的点的直线的斜率表示相速度 v_p，在曲线上 $\omega=\omega_0$ 的点上 ω-k 曲线的斜率表示群速度 v_g。得到

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0(1 - \omega_p^2/\omega^2)}}$$

和

$$v_g = \frac{\sqrt{(1-\omega_p^2/\omega^2)}}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

可以看到相速度 v_p 比光速 $c=(\mu_0\varepsilon_0)^{1/2}$要快,并且 $v_p v_g = c^2$。对于非色散介质曲线,ω-k 是一条从坐标原点出发的直线,波群传播的相位时延和群时延相同,所以其相速度和群速度也相同。

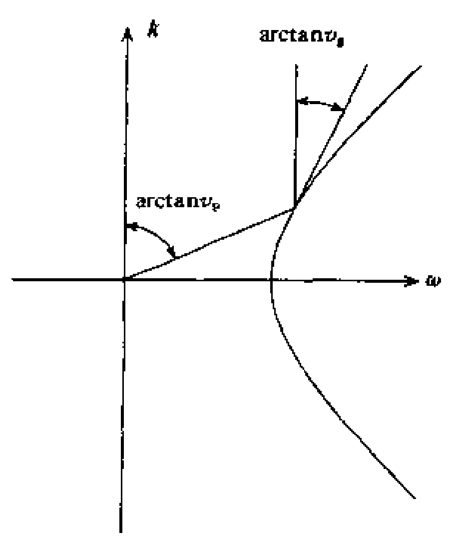


图 3.2-2　等离子体介质的 ω-k 曲线

3.2.2　有耗介质中的穿透深度

对于有耗介质,$\varepsilon=\varepsilon_R+i\varepsilon_I$ 是复数,波数 $k=\omega(\mu\varepsilon)^{1/2}$也是复数。波在沿某一方向传播的同时也沿该方向指数衰减。令 $k=k_R+ik_I$,波沿该方向传播 $1/k_I$ 的距离,相应波幅度的衰减因子为 e^{-1},则称

$$d_p = \frac{1}{k_I} \tag{3.2.17}$$

为穿透深度。

考虑介电常数为 $\varepsilon+i\sigma/\omega=\varepsilon(1+i\sigma/\omega\varepsilon)$的导电介质,其中 $\sigma/\omega\varepsilon$ 被称为损耗正切。对于强导电介质,当 $1\ll\sigma/\omega\varepsilon$,可以得到如下的近似

$$k \approx \omega(\mu\varepsilon)^{1/2}\left(i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^{1/2} = (1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

其穿透深度为

$$d_p = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \delta \tag{3.2.18}$$

对于弱导电介质,当 $1\gg\sigma/\omega\varepsilon$ 时,可以得到如下近似

$$k = \omega(\mu\varepsilon)^{1/2}\left(1+\frac{i\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^{1/2} \approx \omega(\mu\varepsilon)^{1/2}\left(1+\frac{i\sigma}{2\omega\varepsilon}\right) = \omega(\mu\varepsilon)^{1/2} + i\frac{\sigma}{2}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2}$$

其穿透深度为

$$d_p = \frac{2}{\sigma}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} \tag{3.2.19}$$

有趣的是式(3.2.19)所给出的穿透深度与频率无关。这里假设介质是均匀的。对于高频电磁

波，散射将引起很大衰减，这将是第 6 章要讨论的内容。

功率在有耗介质会发生耗散。令一个电场 $\boldsymbol{E}$ 为 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 方向的平面波沿 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 方向传播，

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{x}} E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_\mathrm{R}+\mathrm{i}k_\mathrm{I})z} \tag{3.2.20}$$

对应的磁场为

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu} \nabla \times \boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{y}} \frac{k_\mathrm{R} + \mathrm{i}k_\mathrm{I}}{\omega\mu} E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_\mathrm{R}+\mathrm{i}k_\mathrm{I})z} \tag{3.2.21}$$

在介质中传播的时间平均坡印廷功率密度为

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*\} = \hat{\boldsymbol{z}} \frac{1}{2} \frac{k_\mathrm{R}}{\omega\mu} |E_0|^2 \mathrm{e}^{-2k_\mathrm{I}z} \tag{3.2.22}$$

在穿透深度处，功率密度的衰减因子为 $1/\mathrm{e}^2$。这一衰减量就是有耗介质中的功率耗散。

3.2.3 无耗介质中的凋落波

为了说明坡印廷功率密度矢量 $\boldsymbol{S}$ 的应用，首先要证明在无损耗介质中虽然没有功率的损耗，但仍然会发生平面波的衰减。举一个例子，考虑介电常数为 $\epsilon = \epsilon_0\left(1 - \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2}\right)$ 的各向同性等离子体。当 $\omega < \omega_\mathrm{p}$ 时，$k = \omega(\mu\epsilon)^{1/2} = \mathrm{i}k_\mathrm{I}$，其中 $k_\mathrm{I} = \omega[\mu\epsilon_0(\omega_\mathrm{p}^2/\omega^2 - 1)]^{1/2}$。当电场 $\boldsymbol{E}$ 为 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 方向的平面波沿 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 方向传播时，可以得到

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{x}} E_0 \mathrm{e}^{-k_\mathrm{I}z} \tag{3.2.23}$$

$$\boldsymbol{H} = \hat{\boldsymbol{y}} \frac{\mathrm{i}k_\mathrm{I}}{\omega\mu} E_0 \mathrm{e}^{-k_\mathrm{I}z} \tag{3.2.24}$$

复坡印廷功率密度为

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^* = -\hat{\boldsymbol{z}} \frac{\mathrm{i}k_\mathrm{I}}{\omega\mu} |E_0|^2 \mathrm{e}^{-2k_\mathrm{I}z} \tag{3.2.25}$$

时间平均坡印廷功率密度为

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\{\boldsymbol{S}\} = 0 \tag{3.2.26}$$

所以虽然波的幅度以衰减常数 k_I 指数衰减，但介质中并没有发生功率的耗散。如果介质中的波以指数规律衰减，而介质并不耗散功率，这样的波称为凋落波。

例 3.2.3 非均匀平面波。

即使在介质中波数的幅度 k 为实数，矢量 $\boldsymbol{k}$ 的分量仍然可能不是实数。考虑各向同性介质的色散方程为

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2\mu\epsilon$$

可以看到，即使介质 μ 和 ϵ 都是实数，波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的分量 k_x, k_y 和 k_z 也可以取复数值。在某一方向的复数分量的虚部表示在该方向上波会指数增大或指数衰减。令波矢量 $\boldsymbol{k}$ 有两个分量 k_x 和 k_y，并且 k_y 为虚数，$k_y = \mathrm{i}k_{y\mathrm{I}}$，从而 $k_x^2 - k_{y\mathrm{I}}^2 = \omega^2\mu\epsilon$。那么波的形式为 $\exp(\mathrm{i}k_x x)\exp(-k_{y\mathrm{I}}y)$，它沿 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 方向以相位时延 k_x/ω 传播，同时沿 $\hat{\boldsymbol{y}}$ 方向指数衰减。由于在与 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 方向垂直的常数波前平面上波的幅度不是均匀分布，所以这样的波被称为非均匀平面波。凋落非均匀平面波将在后面的章节中结合边界平面上的全反射进行讨论。

习　题

3.2.1

(1) 微波炉的圆形烤盘在工作频率为2.5GHz时的复介电常数为 $\epsilon = 40(1 + i0.3)\epsilon_o$。求其穿透深度。

(2) 计算海水在60Hz和10MHz两个频率上的损耗正切和趋肤深度。在这些频率上,海水的介质参数为电导率 $\sigma = 4S$,介电常数 $\epsilon = 80\epsilon_0$,磁导率 $\mu = \mu_o$。

(3) 频率为100Hz的电磁波向海水中传播,恰在海水表面以下处的电场强度 E 为1V/m。求在海水表面下100m深度处的电场强度是多少。求在海水表面处(表面深度为0m)和100m的深度上的时间平均坡印廷功率密度是什么。

3.2.2　电场为 $\boldsymbol{E} = \hat{x}E(z,t)$ 的电磁波在 $\epsilon = 9\epsilon_0$ 的介质中沿 $\hat{z}$ 方向传播。假设 $E(z,t)$ 在自由空间的波数为 $10^3 K_o$,并且在 $t = 0, z = 10\text{cm}$ 取得电场强度的最大值为 10^{-5}V/m。

(1) 求介质中的波数 $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$;

(2) 求电磁波的角频率。

(3) 写出任意时刻 t 和任意位置 z 的电场 $\boldsymbol{E}$ 的表达式。

(4) 求对应的磁场 $\boldsymbol{H}(z,t)$。

(5) 求在 $t = 10^{-6}$ 时刻确定电场 $\boldsymbol{E}$ 取得最大值的位置。

3.2.3　推导导电介质中电场 $\boldsymbol{E}$ 的方程。通过求 k_I 和 k_R 的值,证明

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \hat{x}e^{-k_I z}\cos(k_R z - \omega t)$$

是方程的解。

3.2.4　超导最早是由Kamerlingh Onnes于1911年发现的。在1933年Meissner和Ochsenfeld发现磁场不能穿透超导金属。当普通的金属被冷却到超导状态时,其中的磁场将会被驱除出去。1935年London提出了超导的宏观理论,随后在1957年Bardeen, Cooper和Schrieffer发展了超导的微观理论。

超导的一个简单模型是具有很高电子密度 N 的自由电子等离子体模型。

(1) 证明具有很大电子密度 N 的等离子体的穿透深度具有

$$d_p = \sqrt{\frac{m}{Ne^2\mu_0}}$$

的形式。

(2) 取 $N = 7\times10^{28}\text{m}^{-3}$,计算 d_p。

(3) 比较上述结果和良导体的趋肤深度。解释为什么变化很慢(低频)的磁场可以穿透良导体却不能穿透超导体。

3.2.5　图3.2-3画出了一个简单干涉仪的示意图。从一个光源发出的光被一个半透明的镜子分成两束。半透明的镜子透射 $e^{-i\phi_t}/\sqrt{2}$ 的入射电场,反射 $e^{-i\phi_r}/\sqrt{2}$ 的入射电场。假设两个反射镜具有相同的反射系数 $e^{i\phi_0}$。

考虑光源发出电场强度为 E_0 的光,且令入射波为

$$\boldsymbol{E}_i = \hat{\boldsymbol{e}}_i E_0 e^{i\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}}, \quad \boldsymbol{H}_i = \hat{\boldsymbol{h}}_i\frac{E_0}{\eta}e^{i\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}}$$

入射到表面的功率密度为

$$P_i = \frac{1}{2}\text{Re}\{\boldsymbol{E}_i\times\boldsymbol{H}_i^*\}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{2\eta}E_0^2\cos\theta$$

其中 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 是反射面/透射面的法线方向,$\cos\theta = \hat{\boldsymbol{k}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$。

反射场和透射场为

$$\boldsymbol{E}_t = \hat{\boldsymbol{e}}_t E_0\left(\frac{e^{-i\phi_t}}{\sqrt{2}}\right)e^{i\boldsymbol{k}_t\cdot\boldsymbol{r}} \quad \boldsymbol{H}_t = \hat{\boldsymbol{h}}_t\frac{E_0}{\eta}\left(\frac{e^{-i\phi_t}}{\sqrt{2}}\right)e^{i\boldsymbol{k}_t\cdot\boldsymbol{r}}$$

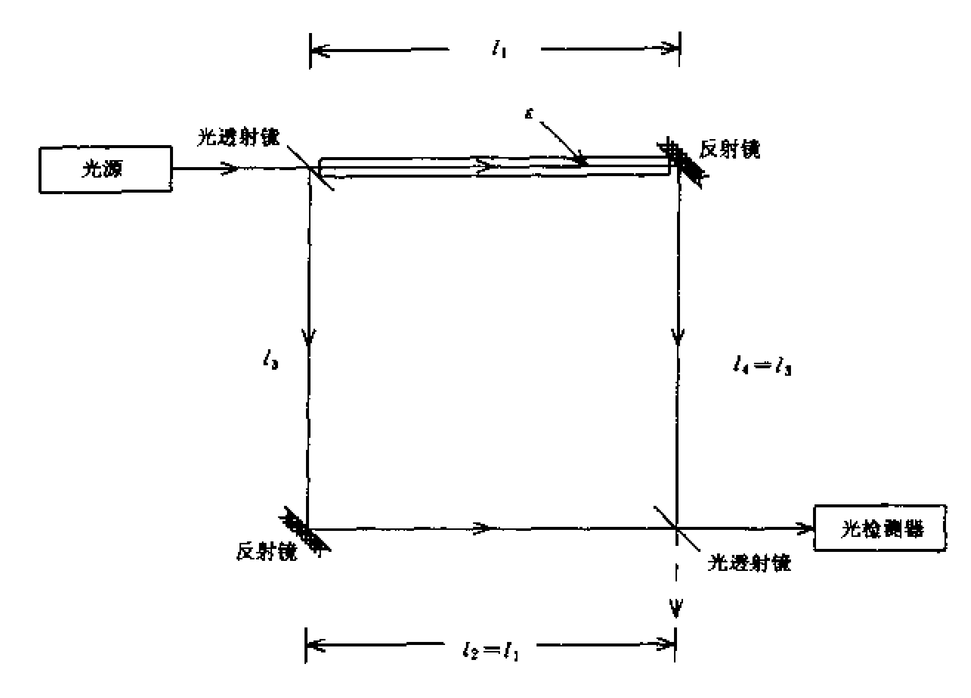


图 3.2-3 简单干涉仪示意图

$$\boldsymbol{E}_t = \hat{\boldsymbol{e}}_t E_0\left(\frac{e^{-i\phi_t}}{\sqrt{2}}\right)e^{i\boldsymbol{k}_t\cdot\hat{\boldsymbol{r}}},\quad \boldsymbol{H}_t = \hat{\boldsymbol{h}}_t\frac{E_0}{\eta}\left(\frac{e^{-i\phi_t}}{\sqrt{2}}\right)e^{i\boldsymbol{k}_t\cdot\hat{\boldsymbol{r}}}$$

(1) 证明半透明镜分别透射和反射 1/2 的入射功率。

(2) 假设 $\varepsilon=\epsilon_0$,确定 ϕ_r 和 ϕ_t 之间的关系。到达光检测器的电场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_1 &= \boldsymbol{E}_0\frac{e^{-i\phi_t}}{\sqrt{2}}e^{ik_0l_1}e^{i\phi_0}e^{ik_0l_3}\frac{e^{-i\phi_r}}{\sqrt{2}}+\boldsymbol{E}_0\frac{e^{-i\phi_r}}{\sqrt{2}}e^{ik_0l_3}e^{i\phi_0}e^{ik_0l_1}\frac{e^{-i\phi_t}}{\sqrt{2}}\\ &= \boldsymbol{E}_0e^{i(\phi_0-\phi_r+k_0l_1+k_0l_3)}\end{aligned}$$

没有到达光检测器的电场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_2 &= \boldsymbol{E}_0\frac{e^{-i\phi_r}}{\sqrt{2}}e^{ik_0l_3}e^{i\phi_0}e^{ik_0l_1}\frac{e^{-i\phi_r}}{\sqrt{2}}+\boldsymbol{E}_0\frac{e^{-i\phi_t}}{\sqrt{2}}e^{ik_0l_1}e^{i\phi_0}e^{ik_0l_3}\frac{e^{-i\phi_t}}{\sqrt{2}}\\ &= \boldsymbol{E}_0e^{i\phi_0+ik_0(l_1+l_3)-i(\phi_r+\phi_t)}\cos(\phi_t-\phi_r)\end{aligned}$$

令到达光检测器的功率等于入射功率,没有到达光检测器的功率为 0。证明

$$\phi_t-\phi_r=\frac{\pi}{2}+l\pi$$

(3) 假定区域 l_1 充满电子密度为 N,介电常数为

$$\varepsilon=\epsilon_0\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

的等离子体,其中 $\omega_p=\sqrt{Ne^2/m\epsilon_0}$,当 $\omega_p\ll\omega$ 时,求功率密度随 N 变化的函数关系。忽略光检测器和等离子体边界的反射,证明到达光检测器的功率与没有到达光检测器的功率之和等于入射功率。

3.2.6 脉冲星每隔大约1s钟发射 5~50ms 的脉冲无线电能量。对于任意一颗脉冲星,辐射重复频率的稳定度高于 10^{-8}。脉冲辐射的幅度和脉冲形状变化很大,但每个脉冲星都具有自己的特征平均脉冲波形。

在发现脉冲星之后的几个月里,对脉冲星的观测出现了下面的现象。观测发现,辐射的到达时间与观测频率有关,当用较低的频率观测时,到达时间要比用较高的频率观测得到的到达时间晚一些。这一延迟是由于星际介质的色散引起的。星际介质是电子密度为 $N_e\approx10^5\mathrm{m}^{-3}$的电离氢元素。

(1) 证明当 $\omega\gg\omega_p$ 时,延迟时间 Δt 随

$$\left[\frac{1}{f^2}-\frac{1}{(f+\Delta f)^2}\right]$$

变化的曲线是一条直线。直线的斜率可以用来表示到脉冲星的距离。

(2) 对于脉冲星 CP0328,在频率 151408 和 610MHz 上测量得到的到达时间如下。

f(MHz)	Δt(s)
151	
	4.18
408	
	0.367
610	

根据上面的测量结果,证明到 CP0328 的距离为 266pc(parsec,秒差距)(1pc = 3.086×10^{16}m。在这个距离上,地球的轨道半径(1.496×10^{11}m)的张角为 1 角秒,即 1pc = $1.496\times10^{11}\times180\times3600/\pi$)。

3.3　介质中的电磁波和 *kDB* 坐标系

现在研究无源介质中麦克斯韦方程的解,所谓无源介质是指介质中 $\boldsymbol{J}=\rho=0$ 的区域。当然这并不表示在空间所有的位置上都无源。在所考虑的无源区域之外必须有电流或电荷源,才能在所考虑的区域中产生场。在无源区域,麦克斯韦方程的时谐场方程是

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\mathrm{i}\omega\boldsymbol{B} \tag{3.3.1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{D} \tag{3.3.2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{3.3.3}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0 \tag{3.3.4}$$

另外我们进一步假设介质是均匀的,即介质的本构方程与空间坐标无关,这时平面波解的形式仍然成立。令所有的复数场矢量具有相同的随空间变化的形式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$,从式(3.3.1)~(3.3.4)可以得到

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}=\omega\boldsymbol{B} \tag{3.3.5}$$

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}=-\omega\boldsymbol{D} \tag{3.3.6}$$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{3.3.7}$$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{D}=0 \tag{3.3.8}$$

从式(3.3.7)和(3.3.8)可以看出,复矢量 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 总是与波矢量 $\boldsymbol{k}$ 垂直。可以将这个包含 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 并且与 $\boldsymbol{k}$ 垂直的平面称为 *DB* 平面。对于满足 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$ 的介质,矢量 $\boldsymbol{H}$ 也在 *DB* 平面上。如果介质是各向异性的,满足 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E}$,可以看到 $\boldsymbol{E}$ 不在 *DB* 平面上。因为这个原因,可以用矢量 $\boldsymbol{D}$ 定义平面波的极化,而不是像在前面的章节里那样用矢量 $\boldsymbol{E}$ 定义。值得注意的是坡印廷矢量在 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 的方向上,在各向异性介质中,这个方向并不需要与波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的方向一致。所以平面波的功率流的方向并不总是与波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的方向一致。现在详细研究几种各向异性介质和双各向异性介质的传播特性。

3.3.1　*kDB* 坐标系

为了能够讨论一般均匀介质中波动特性和场矢量的解,首先要建立一个方便的坐标系,这种坐标系称为 *kDB* 坐标系,*kDB* 坐标系由波矢量 $\boldsymbol{k}$ 和 *DB* 平面组成。*kDB* 坐标系具有单位矢量 $\hat{e}_1,\hat{e}_2$ 和 $\hat{e}_3$。令 $\hat{e}_3$ 与 $\boldsymbol{k}$ 的方向一致,即有 $\boldsymbol{k}=\hat{e}_3k$。如图 3.3-1 所示,用 *xyz* 坐标系表示可以得到

$$\hat{e}_3=\hat{x}\sin\theta\cos\phi+\hat{y}\sin\theta\sin\phi+\hat{z}\cos\theta \tag{3.3.9}$$

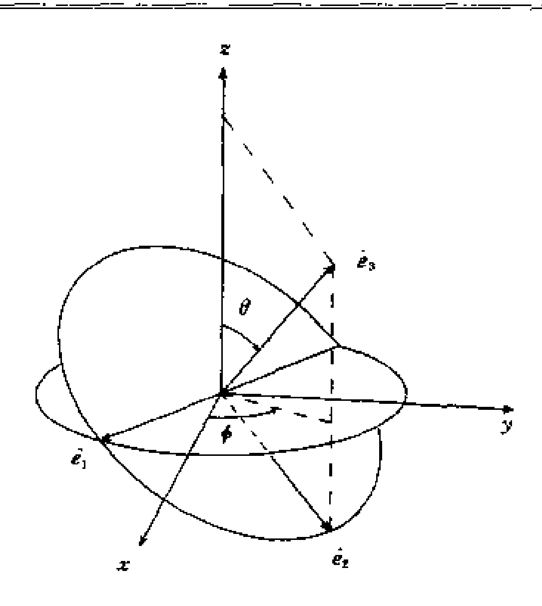


图 3.3-1 kDB 坐标系

取单位矢量 $\hat{e}_2$ 与 $\hat{\theta}$ 的方向一致，可以得到

$$\hat{e}_2 = \hat{x}\cos\theta\cos\phi + \hat{y}\cos\theta\sin\phi - \hat{z}\sin\theta \tag{3.3.10}$$

单位矢量 $\hat{e}_1$ 与单位矢量 $\hat{e}_2$ 和 $\hat{e}_3$ 正交构成一个右手坐标系

$$\hat{e}_1 = \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{x}\sin\phi - \hat{y}\cos\phi \tag{3.3.11}$$

单位矢量 $\hat{e}_1$ 在 x-y 平面上。三个单位矢量相互垂直（如图 3.3-1 所示），即

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 = \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_1 = 0$$

可以看到，如果 x-y 平面围绕 $\hat{z}$ 轴逆时针旋转 $\phi - \pi/2$ 角度，然后围绕新的 x 轴旋转一个角度 θ，所得到的与矢量 $\boldsymbol{k}$ 垂直的平面就是 DB 平面。

现在建立场矢量分量的变换公式。一个矢量 $\boldsymbol{A}$ 用投影到 xyz 坐标系的分量表示为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \tag{3.3.12}$$

如果这个矢量用投影到 kDB 坐标系的分量表示时被称为 $\boldsymbol{A}_k$，其形式为

$$\boldsymbol{A}_k = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \tag{3.3.13}$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 的分量与矢量 $\boldsymbol{A}_k$ 的分量之间的关系由下式表示

$$\boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{A} \tag{3.3.14}$$

或者

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}_k \tag{3.3.15}$$

式中 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 是 $\boldsymbol{T}$ 的逆矩阵。我们将要确定变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 及其逆 $\boldsymbol{T}^{-1}$。

由于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}_k$ 是同一个矢量的不同表达形式，所以有

$$\begin{aligned} A_1 &= \hat{e}_1 \cdot \boldsymbol{A} = \hat{e}_1 \cdot \hat{x}A_x + \hat{e}_1 \cdot \hat{y}A_y + \hat{e}_1 \cdot \hat{z}A_z \\ &= \sin\phi A_x - \cos\phi A_y \end{aligned} \tag{3.3.16}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \hat{e}_2 \cdot \boldsymbol{A} = \hat{e}_2 \cdot \hat{x}A_x + \hat{e}_2 \cdot \hat{y}A_y + \hat{e}_2 \cdot \hat{z}A_z \\ &= \cos\theta\cos\phi A_x + \cos\theta\sin\phi A_y - \sin\theta A_z \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

$$A_3 = \hat{e}_3 \cdot A = \hat{e}_3 \cdot \hat{x}A_x + \hat{e}_3 \cdot \hat{y}A_y + \hat{e}_3 \cdot \hat{z}A_z$$
$$= \sin\theta\cos\phi A_x + \sin\theta\sin\phi A_y - \cos\theta A_z \tag{3.3.18}$$

在上面的推导中用到了式(3.3.9)~(3.3.11)的结果。将式(3.3.16)~(3.3.18)写成矩阵的形式,并与(3.3.14)比较可以得到

$$T = \begin{bmatrix} \sin\phi & -\cos\phi & 0 \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{3.3.19}$$

矩阵算子 T 的逆为

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \sin\phi & \cos\theta\cos\phi & \sin\theta\cos\phi \\ -\cos\phi & \cos\theta c\sin\phi & \sin\theta\sin\phi \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{3.3.20}$$

这正好是 T 的转置。式(3.3.20)可以通过三种不同的方法得到:(1)直接计算 T 的逆矩阵 T^{-1}。(2)利用关系式 $A_x = \hat{x} \cdot A_k$, $A_y = \hat{y} \cdot A_k$ 和 $A_z = \hat{z} \cdot A_k$,通过与式(3.3.16)~(3.3.18)类似的步骤推导得到 T^{-1}。(3)首先证明矩阵 T 是正交矩阵,从而 T 的逆矩阵就是 T 的转置矩阵。显然式(3.3.19)与(3.3.20)的乘积是单位矩阵。

式(3.3.14)和(3.3.15)所建立的变换公式适用于所有的矢量场 E, D, B 和 H。现在推导本构关系从 xyz 坐标系到 kDB 坐标系的变换公式。值得注意的是,由于 $D_3 = B_3 = 0$,所以矢量 D 和 B 的形式要比矢量 E 和 H 的形式简单得多。在 xyz 坐标系中,本构关系给出了矢量 E, H 与矢量 D, B 之间的关系

$$E = \kappa \cdot D + \chi \cdot B \tag{3.3.21}$$
$$H = \nu \cdot B + \gamma \cdot D \tag{3.3.22}$$

我们称之为 DB 表示中的本构关系。利用变换关系(3.3.15),可以得到 $E = T^{-1} \cdot E_k$ 及关于 H, D 和 B 的类似关系。其结果为

$$E_k = (T \cdot \kappa \cdot T^{-1}) \cdot D_k + (T \cdot \chi \cdot T^{-1}) \cdot B_k \tag{3.3.23}$$
$$H_k = (T \cdot \nu \cdot T^{-1}) \cdot B_k + (T \cdot \gamma \cdot T^{-1}) \cdot D_k \tag{3.3.24}$$

因此可以得到

$$\kappa_k = T \cdot \kappa \cdot T^{-1} \tag{3.3.25}$$
$$\chi_k = T \cdot \chi \cdot T^{-1} \tag{3.3.26}$$
$$\nu_k = T \cdot \nu \cdot T^{-1} \tag{3.3.27}$$
$$\gamma_k = T \cdot \gamma \cdot T^{-1} \tag{3.3.28}$$

在 kDB 坐标系中,有

$$E_k = \kappa_k \cdot D_k + \chi_k \cdot B_k \tag{3.3.29}$$
$$H_k = \nu_k \cdot B_k + \gamma_k \cdot D_k \tag{3.3.30}$$

利用变换公式(3.3.14)和式(3.3.25)~(3.3.28),可以将所有的量从 xyz 坐标系变换到 kDB 坐标系。

3.3.2 kDB 坐标系中的麦克斯韦方程

在 kDB 坐标系的框架,均匀的无源介质内平面波的麦克斯韦方程具有(3.3.5)~(3.3.8)形式。

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_k=\omega\boldsymbol{B}_k \tag{3.3.31}$$

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}_k=-\omega\boldsymbol{D}_k \tag{3.3.32}$$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_k=0 \tag{3.3.33}$$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{D}_k=0 \tag{3.3.34}$$

由于矢量 $\boldsymbol{k}$ 与 $\hat{\boldsymbol{e}}_3$ 的方向一致,即

$$\boldsymbol{k}=\hat{\boldsymbol{e}}_3 k \tag{3.3.35}$$

根据式(3.3.33)和(3.3.34)可知 $D_3=B_3=0$。利用本构方程(3.3.29)和(3.3.30),根据式(3.3.31)和(3.3.32)可以得到

$$\omega B_2=kE_1=k(\kappa_{11}D_1+\kappa_{12}D_2+\chi_{11}B_1+\chi_{12}B_2)$$

$$\omega B_1=-kE_2=-k(\kappa_{21}D_1+\kappa_{22}D_2+\chi_{21}B_1+\chi_{22}B_2)$$

$$\omega D_2=-kH_1=-k(\nu_{11}B_1+\nu_{12}B_2+\gamma_{11}D_1+\gamma_{12}D_2)$$

$$\omega D_1=-kH_2=k(\nu_{21}B_1+\nu_{22}B_2+\gamma_{21}D_1+\gamma_{22}D_2)$$

首先将上面等式的两边除以 k 并令 $u=\omega/k$。重新排列等式的各项并写成矩阵的形式,可以得到

$$\begin{bmatrix}\kappa_{11} & \kappa_{12}\\ \kappa_{21} & \kappa_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\chi_{11} & \chi_{12}-u\\ \chi_{21}+u & \chi_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix} \tag{3.3.36}$$

$$\begin{bmatrix}\nu_{11} & \nu_{12}\\ \nu_{21} & \nu_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}+u\\ \gamma_{21}-u & \chi_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\end{bmatrix} \tag{3.3.37}$$

进一步可以从式(3.3.36)和(3.3.37)中消去 $\boldsymbol{B}_k$ 或 $\boldsymbol{D}_k$,从而推导出关于单独的 $\boldsymbol{B}_k$ 或 $\boldsymbol{D}_k$ 的 2×2 阶矩阵方程。所得到的两个方程为线性齐次矩阵方程。令 2×2 阶矩阵的行列式等于 0,可以得到均匀介质的色散关系。在下面将讨论 kDB 坐标系在均匀介质平面波特性研究中的应用。

我们注意到,利用 kDB 坐标系推导色散关系的过程也可以用于耗散介质,对于耗散介质(或称为有耗介质),矢量 $\boldsymbol{k}=\hat{x}k_x+\hat{y}k_y+\hat{z}k_z$ 是一个复矢量。首先将 k 及角度 θ 和 ϕ 当做实数处理;当得到方程的解以后,利用 θ 和 ϕ 与矢量 $\boldsymbol{k}$ 在最初的 xyz 坐标系的直角分量的关系,以及将 $\boldsymbol{k}$ 看为复矢量消去解中的 θ 和 ϕ。

举个例子,考虑各向同性介质在 $\boldsymbol{DB}$ 表示中的本构关系为

$$\boldsymbol{E}=\kappa\boldsymbol{D}$$

$$\boldsymbol{H}=\nu\boldsymbol{B}$$

式中,$\kappa=1/\epsilon$ 被称为容阻率,$\nu=1/\mu$ 被称为磁阻率。

在 kDB 坐标系中,可以发现

$$\boldsymbol{E}_k=\kappa\boldsymbol{D}_k$$

$$\boldsymbol{H}_k=\nu\boldsymbol{B}_k$$

将上面的等式代入式(3.3.36)和(3.3.37),并注意到 $\kappa_{11}=\kappa_{22}=\kappa$,$\nu_{11}=\nu_{22}=\nu$ 以及本构矩阵的其他元素都为 0,可以得到

$$\kappa\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & u\\ -u & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}$$

$$\nu\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -u\\ u & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\end{bmatrix}$$

消去上面两个方程中的 $\boldsymbol{B}_k$，得到

$$\begin{bmatrix} u^2-\kappa\nu & 0 \\ 0 & u^2-\kappa\nu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}=0$$

可以看到，如果介质中有波场，那么下面的关系必然成立

$$u^2-\kappa\nu=0$$

这就是各向同性介质的色散关系。

平面波的相速 $u=\omega/k$ 是

$$u=\pm\sqrt{\kappa\nu}=\pm\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

式中 ± 表示波沿相反的方向传播。用 ω 和 k 表示的色散关系为

$$k^2=\omega^2\mu\epsilon$$

当介质为色散介质，即当 μ 和 ϵ 是频率的函数时，色散关系则是 ω 和 k 之间复杂的函数关系。

例 3.3.1　均匀介质中平面波的色散关系可以用多种不同的方法推导。例如可以利用 ***EH*** 表示其中的本构关系

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{H}$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{H}+\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{E}$$

可以从上述本构方程以及(3.3.5)，(3.3.6)式中消去场矢量 $\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$。对任意的矢量 $\boldsymbol{A}$ 定义算子 $\boldsymbol{k}$ 使 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}$，可以得到

$$[\omega^2\boldsymbol{\varepsilon}+(\boldsymbol{k}+\omega\boldsymbol{\xi})\cdot\boldsymbol{\mu}^{-1}\cdot(\boldsymbol{k}-\omega\boldsymbol{\zeta})]\cdot\boldsymbol{E}=0$$

对于矢量 $\boldsymbol{E}$ 的非寻常解，作用于 $\boldsymbol{E}$ 的算子矩阵的行列式必为 0。所以有

$$|\omega^2\boldsymbol{\varepsilon}+(\boldsymbol{k}+\omega\boldsymbol{\xi})\cdot\boldsymbol{\mu}^{-1}\cdot(\boldsymbol{k}+\omega\boldsymbol{\zeta})|=0$$

这就是介质的色散关系，它建立了波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的分量与角频率 ω 之间的函数关系。对于各向同性介质，可以得到色散关系的简化形式。对于各向异性介质，波特性的研究变得复杂起来。*kDB* 坐标系为一般介质中各种平面波特性的解释提供了一种系统性的研究工具。

3.3.3　单轴介质中的平面波

在 *xyz* 坐标系中，单轴介质本构关系的 ***DB*** 表示形式为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{D} \tag{3.3.38}$$

$$\boldsymbol{H}=\nu\boldsymbol{B} \tag{3.3.39}$$

式中

$$\boldsymbol{\kappa}=\begin{bmatrix} \kappa & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_z \end{bmatrix} \tag{3.3.40}$$

被称为容阻张量。介质的光轴与 $\hat{z}$ 方向一致。用介电常数张量表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} \tag{3.3.41}$$

由于 $\boldsymbol{\kappa}=\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}$,可以得到 $\kappa=1/\varepsilon$ 和 $\kappa_z=1/\varepsilon_z$。磁阻率 ν 和磁导率 μ 之间的关系是 $\nu=1/\mu$。将式(3.3.25)变换到 kDB 坐标系可以得到

$$\boldsymbol{\kappa}_k = \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \kappa & 0 & 0 \\ 0 & \kappa\cos^2\theta+\kappa_z\sin^2\theta & (\kappa-\kappa_z)\sin\theta\cos\theta \\ 0 & (\kappa-\kappa_z)\sin\theta\cos\theta & \kappa\sin^2\theta+\kappa_z\cos^2\theta \end{bmatrix} \tag{3.3.42}$$

由于单轴介质具有关于 z 轴的柱对称性,所以可以期望上式所给出的变换关系与 ϕ 无关。利用式(3.3.26),(3.3.27)可以得到

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 \\ 0 & \kappa_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & u \\ -u & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{3.3.43}$$

$$\nu\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -u \\ u & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \tag{3.3.44}$$

由式(3.3.42)可以得到 $\boldsymbol{\chi}=\boldsymbol{\gamma}=0,\kappa_{11}=\kappa$ 和 $\kappa_{22}=\kappa\cos^2\theta+\kappa_z\sin^2\theta$。同样,虽然在式(3.3.42)中计算了 κ_{23} 和 κ_{33},它们在式(3.3.43)并没有用到,而且在后面将要给出的利用 $\boldsymbol{D}_k$ 计算 $\boldsymbol{E}_k$ 的过程中也没有用到这两个参数。从式(3.3.43)和(3.3.44)中消去 $\boldsymbol{B}_k$ 可以得到

$$\begin{bmatrix} u^2-\nu\kappa_{11} & 0 \\ 0 & u^2-\nu\kappa_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{3.3.45}$$

为了满足式(3.3.45)的要求,可以有以下4种情况。

(1) $D_1=D_2=0$。

(2) $D_1\neq0, D_2=0$,并且 $u^2-\nu\kappa_{11}=0$。

(3) $D_1=0, D_2\neq0$,并且 $u^2-\nu\kappa_{22}=0$。

(4) $D_1\neq0, D_2\neq0$,并且 $u^2-\nu\kappa_{11}=u^2-\nu\kappa_{22}=0$。

情况(1)表示介质中没有场。

寻常波和非常波

上述情况(2)对应的极化方向为 $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ 方向的线极化波。从图3.3-2可以注意到 $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ 垂直于由光轴和波矢量 $\boldsymbol{k}$ 形成的平面。该平面波传播的相速为

$$u=\pm\sqrt{\nu\kappa_{11}} \tag{3.3.46}$$

该平面波的其他场分量可以通过公式(3.3.44)和本构关系(3.3.38)和(3.3.39)得到。则有

$$\boldsymbol{D}_k=\hat{\boldsymbol{e}}_1 D_1 \tag{3.3.47}$$

$$\boldsymbol{B}_k=\hat{\boldsymbol{e}}_2\frac{u}{\nu}D_1 \tag{3.3.48}$$

$$\boldsymbol{H}_k=\hat{\boldsymbol{e}}_2 uD_1 \tag{3.3.49}$$

$$\boldsymbol{E}_k=\hat{\boldsymbol{e}}_1\kappa D_1 \tag{3.3.50}$$

所以有 $\boldsymbol{D}_k$ 与 $\boldsymbol{E}_k$ 的方向一致,$\boldsymbol{B}_k$ 与 $\boldsymbol{H}_k$ 的方向一致(如图3.3-2所示),可称之为单介质中的寻常波。

情况(3)对应极化方向为 $\hat{\boldsymbol{e}}_2$ 方向的线极化波。$\hat{\boldsymbol{e}}_2$ 方向在由光轴和波矢量 $\boldsymbol{k}$ 决定的平面上并且垂直于 $\boldsymbol{k}$。该线极化波传播的相速为

$$u=\pm\sqrt{\nu\kappa_{22}}=\pm\left[\nu(\kappa\cos^2\theta+\kappa_z\sin^2\theta)\right]^{1/2} \tag{3.3.51}$$

这一相速与传播的方向有关。其他场分量可以根据式(3.3.44)以及本构关系(3.3.38)和(3.3.39)确定。可以得到

$$\boldsymbol{D}_k = \hat{\boldsymbol{e}}_2 D_2 \tag{3.3.52}$$

$$\boldsymbol{B}_k = -\hat{\boldsymbol{e}}_1 \frac{u}{\nu} D_2 \tag{3.3.53}$$

$$\boldsymbol{H}_k = -\hat{\boldsymbol{e}}_1 u D_2 \tag{3.3.54}$$

$$\boldsymbol{E}_k = \hat{\boldsymbol{e}}_2 \kappa_{22} D_2 + \hat{\boldsymbol{e}}_3(\kappa - \kappa_z)\sin\theta\cos\theta D_2 \tag{3.3.55}$$

我们看到 $\boldsymbol{E}_k$ 与 $\boldsymbol{D}_k$ 都在由光轴 $\hat{z}$ 和波矢量 $\boldsymbol{k}$ 所确定的平面上，但它们的方向不再一致。对于正单轴介质，$\varepsilon_z > \varepsilon$，$\boldsymbol{E}_k$ 在矢量 $\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{D}_k$ 之间(如图3.3-3所示)。对于负单轴介质，$\boldsymbol{E}_k$ 与 $\boldsymbol{k}$ 的夹角大于 $\pi/2$。所以，坡印廷矢量的方向也不再与波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的方向一致。这一点可以从叉积 $\boldsymbol{E}_k \times \boldsymbol{H}_k^*$ 的结果看出。该线极化波被称为单轴介质的非常波，它的相速的大小与角度有关，方向也不再与坡印廷矢量的方向一致。

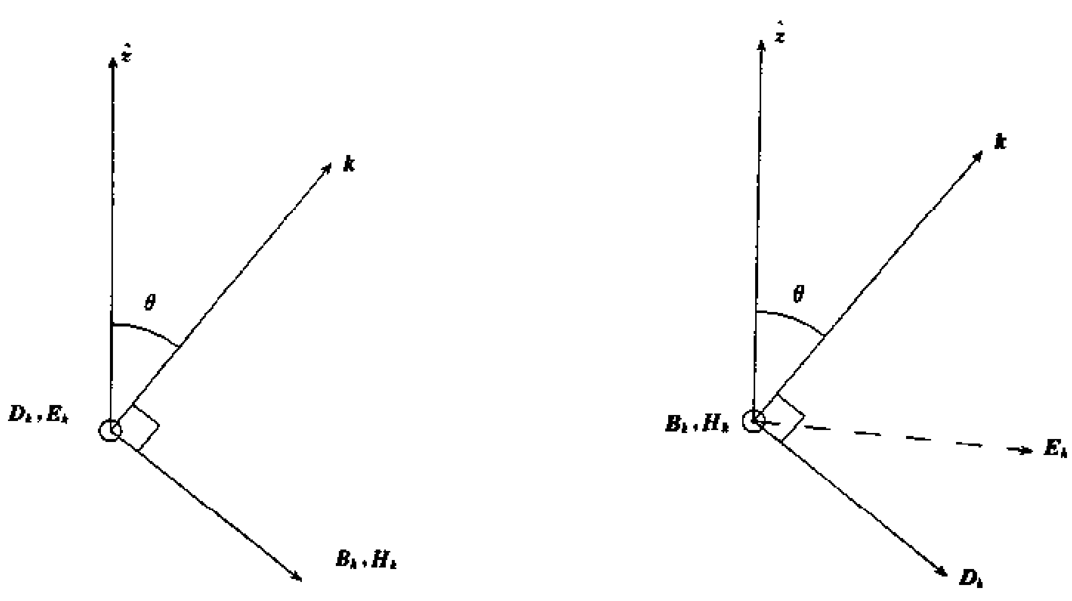


图3.3-2　单轴介质中的寻常波　　图3.3-3　单轴介质中的非常波

对于情况(4)，为了满足 $D_1 \neq 0, D_2 \neq 0$，必须要求 $\kappa_{11} = \kappa_{22}$，只有当下列两个条件满足时，这一要求才能成立。①介质是各向同性的。②波的传播方向为 $\hat{z}$ 方向。所以只有当波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的方向与光轴方向一致时，非线极化波才能传播。一般情况下，单轴介质中的平面波要么是寻常线极化波，其电通量矢量 $\boldsymbol{D}$ 垂直于由光轴方向和波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的方向决定的平面，其传播的相速由式(3.3.46)确定；要么是非常线极化波，其电通量矢量 $\boldsymbol{D}$ 在由光轴方向和波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的方向决定的平面上，其传播的相速由式(3.3.51)确定。在介质中上述两种特征波以不同的相速度传播的结果被称为双折射，这样的介质被称为双折射介质。当电磁波进入单轴介质后，它将分解为两个传播速度不同的特征线极化波，这一现象被称为双折射。考虑一个单轴介质片，它的前后表面都与 $\hat{y}$ 方向垂直，平面波沿 $\hat{y}$ 方向入射到介质片上。忽略介质表面的反射，电磁波进入介质片后分解为 $\boldsymbol{D} = \hat{x}D_o$ 的寻常波和 $\boldsymbol{D} = \hat{z}D_e$ 的沿光轴方向的非常波。$\boldsymbol{D}$ 矢量的空间变化具有下面的形式

$$\boldsymbol{D} = \hat{x}D_o e^{ik_y^{(o)}y} + \hat{z}D_e e^{ik_y^{(e)}y}$$

式中，

$$k_y^{(o)} = \frac{i\omega}{\sqrt{\nu\kappa}}, \quad k_y^{(e)} = \frac{i\omega}{\sqrt{\nu\kappa_z}}$$

需要注意的是在这里利用式(3.3.46)和(3.3.51)确定 $k = \omega/u$ 时,取 $\theta = \pi/2$。所以当波传播一段距离 y 后,入射波的极化已经被改变。如果 $D_o = D_e$,那么在 $y = 0$ 的位置上,线极化波的极化方向相对光轴方向成45°角。如果经过一段距离 d 后,有

$$(k_y^{(o)} - k_y^{(e)})d = \frac{(2m+1)\pi}{2}$$

其中,m 是一个整数,这时的波已经变为圆极化波。具有这样的厚度的介质片被称为1/4波片。偏光片就是一种单轴介质片,它的 ϵ_z 的虚部很大,所以波通过这样的介质片以后,其非常波分量被极大地衰减了,而寻常波分量则衰减很小。

k 表面

公式(3.3.46)和(3.3.51)所给出的寻常波和非常波的色散关系可以从角度的函数转化为关于波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的直角分量的函数,波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的直角分量 k_x,k_y 和 k_z 形成一个三维 k 空间。注意到 $u = \omega/k$,$k\cos\theta = k_z$ 和 $k\sin\theta = k_s$,其中 k_s 是 $\boldsymbol{k}$ 的横向分量,被称为横向波数。对于寻常波,有

$$\omega^2 = \nu\kappa k_z^2 + \nu\kappa k_s^2 \tag{3.3.56}$$

对于非常波,有

$$\omega^2 = \nu\kappa k_z^2 + \nu\kappa_z k_s^2 \tag{3.3.57}$$

方程(3.3.56)描述了一个圆,而方程(3.3.57)描述了一个椭圆(如图3.3-4所示)。将它们围绕 k_z 旋转,对于寻常波可以得到一个球,对于非常波可以得到一个椭球。

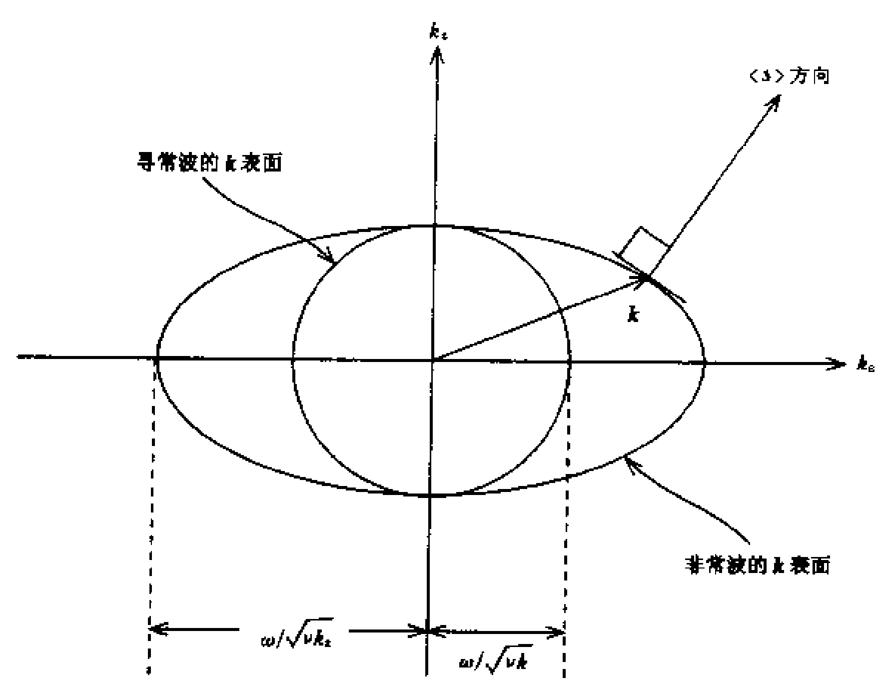


图3.3-4 在 $\kappa/\kappa_z > 1$ 的正单轴介质中,寻常波与非常波的 k 表面

色散关系给出了波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的分量与角频率 ω 之间的泛函关系。当存在不止一个特征波时,色散方程通常是 k 的二次方程。可以写出一个一般的表达式

$$f(k_x, k_y, k_z, \omega) = 0$$

在三维 $\boldsymbol{k}$ 空间中，二次方程表示一个二维超表面。这一超表面被称为波表面，或简称为 k 表面。

观察用 k 表面描述的 $\boldsymbol{k}$，它的幅度可能是一个随方向变化的函数。在某一方向上，矢量 $\boldsymbol{k}$ 与 k 表面相交于一点。$\boldsymbol{k}$ 在该方向上的幅度正比于从坐标原点到该交点的距离长度，介质中波的相速为 $u=\omega/k$。与某一 k 表面对应的群速的定义由式(2.2.16)给出

$$v_{gi}=\frac{\partial\omega}{\partial k_i}=-\frac{\partial f/\partial k_i}{\partial f/\partial\omega}$$

由于分量为 $\partial f/\partial k_i$ 的矢量与 k 表面 $f(k_x,k_y,k_z,\omega)=0$ 正交，可以得出一个结论，即当波沿着 $\boldsymbol{k}$ 方向以相速 u 传播时，其群速的方向为 $\boldsymbol{k}$ 方向与 k 表面的交点上 k 表面的法线方向。

现在我们证明，在一般情况下，有时间平均坡印廷矢量流的方向与 k 表面垂直。所以群速的方向就是能量速度的方向，能量速度的定义为时间平均坡印廷矢量除以电磁能量密度。因此，用数学表述就是证明 $\langle\boldsymbol{S}\rangle$ 垂直于 k 表面的切向，即 $\delta\boldsymbol{k}\cdot\langle\boldsymbol{S}\rangle=0$。首先对 $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}=\omega\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}^*=-\omega\boldsymbol{D}^*$ 求导可以得到

$$\delta\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}+\boldsymbol{k}\times\delta\boldsymbol{E}=\omega\delta\boldsymbol{B}\tag{3.3.58}$$

$$\delta\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}^*+\boldsymbol{k}\times\delta\boldsymbol{H}^*=-\omega\delta\boldsymbol{D}^*\tag{3.3.59}$$

对式(3.3.58)点乘 $\boldsymbol{H}^*$ 减去式(3.3.59)点乘 $\boldsymbol{E}$，并利用矢量恒等式

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

可以得到

$$\begin{aligned}2\delta\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)&=\omega(\boldsymbol{H}^*\cdot\delta\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D})+\delta\boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}^*)-\delta\boldsymbol{H}^*\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E})\\&=\omega(\boldsymbol{H}^*\cdot\delta\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D}^*-\boldsymbol{D}^*\cdot\delta\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\cdot\delta\boldsymbol{H}^*)\end{aligned}\tag{3.3.60}$$

对于单介质，可以发现

$$\begin{aligned}2\delta\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)&=\omega(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*\cdot\delta\boldsymbol{E}^*-\delta\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*\cdot\boldsymbol{E}^*+\boldsymbol{H}^*\cdot\mu\delta\boldsymbol{H}-\delta\boldsymbol{H}^*\cdot\mu\boldsymbol{H})\\&=\omega[(\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\delta\boldsymbol{E})^*-(\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^+\cdot\delta\boldsymbol{E})+(\boldsymbol{H}^*\cdot\mu\delta\boldsymbol{H})-(\boldsymbol{H}^*\cdot\mu^*\delta\boldsymbol{H})^*]\end{aligned}$$

利用无损耗条件 $\boldsymbol{\varepsilon}^+=\boldsymbol{\varepsilon}$ 和 $\mu^*=\mu$，可以看到上式的右边是一个纯虚数。由于时间平均坡印廷矢量等于 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*$ 实部的 1/2，可以得到

$$\delta\boldsymbol{k}\cdot\langle\boldsymbol{S}\rangle=0\tag{3.3.61}$$

我们可以一般性地证明，对于双各向异性介质，(3.3.60)式的右边是一个纯虚数。所以在 k 表面的一点上，时间平均坡印廷矢量的方向在该点上垂直于 k 表面。

专题 3.3.A　回旋介质中的平面波

现在研究 *kDB* 坐标系用于均匀介质中特征波求解的另一个例子，考虑回旋介质具有下面的本构关系：

$$\boldsymbol{H}=\nu\boldsymbol{B}\tag{3.3.62}$$

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{D}\tag{3.3.63}$$

其中，

$$\boldsymbol{\kappa}=\begin{bmatrix}\kappa & \mathrm{i}\kappa_g & 0\\-\mathrm{i}\kappa_g & \kappa & 0\\0 & 0 & \kappa_z\end{bmatrix}\tag{3.3.64}$$

具有上述本构关系的回旋介质的一个例子是，外加 $\hat{z}$ 方向直流磁场的各向异性等离子体。在例 3.1.2中我们已经推导了用等离子体频率和回旋频率表示的本构参数 κ，κ_g 和 κ_z。

色散关系和特征波

利用式(3.3.25)~(3.3.28),可以将色散矩阵变换到 kDB 坐标系,可以得到 $\nu_k=\nu$ 和

$$\boldsymbol{\kappa}_k=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix}\kappa & \mathrm{i}\kappa_g\cos\theta & \mathrm{i}\kappa_g\sin\theta\\ -\mathrm{i}\kappa_g\cos\theta & \kappa\cos^2\theta+\kappa_z\sin^2\theta & (\kappa-\kappa_z)\sin\theta\cos\theta\\ -\mathrm{i}\kappa_g\sin\theta & (\kappa-\kappa_z)\sin\theta\cos\theta & \kappa\sin^2\theta+\kappa_z\cos^2\theta\end{bmatrix} \tag{3.3.65}$$

将本构矩阵元素的值代入到式(3.3.36)和(3.3.37)可以得到

$$\begin{bmatrix}\kappa & \mathrm{i}\kappa_g\cos\theta\\ -\mathrm{i}\kappa_g\cos\theta & \kappa\cos^2\theta+\kappa_z\sin^2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & u\\ -u & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix} \tag{3.3.66}$$

$$\nu\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -u\\ u & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\end{bmatrix} \tag{3.3.67}$$

消去 $\boldsymbol{B}_k$ 有

$$\begin{bmatrix}u^2-\nu\kappa & -\mathrm{i}\nu\kappa_g\cos\theta\\ \mathrm{i}\nu\kappa_g\cos\theta & u^2-\nu(\kappa\cos^2\theta+\kappa_z\sin^2\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\end{bmatrix}=0 \tag{3.3.68}$$

对于 $\boldsymbol{D}_k$ 的非平凡解,令 2×2 阶矩阵的行列式等于 0,可以得到

$$u^2=\frac{\nu}{2}\left[\kappa(1+\cos^2\theta)+\kappa_z\sin^2\theta\pm\sqrt{(\kappa-\kappa_z)^2\sin^4\theta+4\kappa_g^2\cos^2\theta}\right] \tag{3.3.69}$$

用 $\boldsymbol{k}$ 的分量表示可以得到如下结果。

$$\omega^2=\frac{\nu}{2}\left[\kappa(k^2+k_z^2)+\kappa_z k_s^2\pm\sqrt{(\kappa-\kappa_z)^2k_s^4+4\kappa_g^2k_z^2k^2}\right] \tag{3.3.70}$$

这就是联系 ω 和 $\boldsymbol{k}$ 的色散关系。

场矢量 $\boldsymbol{D}_k$ 的两个分量之间具有下面的关系式

$$\frac{D_2}{D_1}=\frac{-2\mathrm{i}\kappa_g\cos\theta}{(\kappa-\kappa_z)\sin^2\theta\pm\sqrt{(\kappa-\kappa_z)^2\sin^4\theta+4\kappa_g^2\cos^2\theta}} \tag{3.3.71}$$

如果定义角度 ψ 满足

$$\tan2\psi=\frac{2\kappa_g\cos\theta}{(\kappa-\kappa_z)\sin^2\theta} \tag{3.3.72}$$

则上面的关系式可以大大简化,对于(3.3.69)中相速为 u 取 + 号的特征波,(3.3.71)简化为

$$\frac{D_2}{D_1}=-\mathrm{i}\tan\psi \tag{3.3.73}$$

可称之为回旋介质中的 I 型波。对于(3.3.69)中相速为 u 取 − 号的特征波,(3.3.71)简化为

$$\frac{D_2}{D_1}=-\mathrm{i}\cot\psi \tag{3.3.74}$$

可称之为 II 型波。I 型波传播的速度对应式(3.3.69)中 ± 取 + 的结果,而 II 型波传播的速度对应式(3.3.69)中 ± 取 − 的结果。这两种特征波都是椭圆极化波。当 $\kappa_g=0$ 时,介质变成单轴介质,特征波也变成线极化波。当 $\theta=\pi/2$ 时,波传播的方向垂直于外加直流磁场的方向 $\hat{z}$,这两种特征波也都变成线极化波。这种双折射现象被称为科顿-穆顿(Cotton-Mouton)效应。

利用上面的结果,可以很容易地推导在电离层无线电波研究中非常重要的关于折射指数的 Appleton-Hartree 公式。折射指数定义为比值 $D_1/\epsilon_0E_1=D_2/\epsilon_0E_2$。例如,从式(3.3.65)可以

发现 $E_1 = \kappa D_1 + i\kappa_g\cos\theta D_2$，从式(3.3.68)的第一个方程可以得到 $u^2 D_1 = \nu(\kappa D_1 + i\kappa_g\cos\theta D_2)$，所以得到 $u^2 D_1 = \nu E_1$ 及 $n^2 = D_1/\varepsilon_0 E_1 = \varepsilon_0/\nu u^2$。根据 $n^2 = D_2/\varepsilon_0 E_2$ 可以进行类似的推导并得到相同的结果。

为使得到的 Appleton-Hartree 公式与文献中结果一致，首先定义 $X = \omega_p^2/\omega^2$ 和 $Y = \omega_c/\omega$。对于本构参数，有下面的结果

$$\varepsilon_0\kappa = \frac{1 - X - Y^2}{(1 - X)^2 - Y^2}$$

$$\varepsilon_0\kappa_z = \frac{1}{1 - X}$$

$$\varepsilon_0\kappa_g = \frac{XY}{(1 - X)^2 - Y^2}$$

进一步可以得到折射指数为

$$n^2 = \frac{\varepsilon_0}{\nu u^2} = \frac{2(1 - X)[(1 - X)^2 - Y^2]}{2[(1 - X)^2 - Y^2] + X(Y^2 + Y_L^2) \pm \sqrt{Y_T^4 + 4(1 - X)^2 Y_L^2}}$$

式中，$Y_L = Y\cos\theta$ 对应沿磁场 $\boldsymbol{B}$ 的方向的纵向回旋频率，而 $Y_T = Y\sin\theta$ 对应与 $\boldsymbol{B}$ 正交的横向回旋频率。

为了进一步表明等离子体介质对 $n = 1$ 的自由空间的影响，可以将上面的结果写成下面的形式

$$\begin{aligned} n^2 &= 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\nu u^2}\right) \\ &= 1 - X\frac{2[(1 - X)^2 - Y^2] + (Y^2 + Y_L^2) \pm \sqrt{Y_T^4 + 4(1 - X)^2 Y_L^2}}{2[(1 - X)^2 - Y^2] + X(Y^2 + Y_L^2) \pm \sqrt{Y_T^4 + 4(1 - X)^2 Y_L^2}} \\ &= 1 - \frac{2X(1 - X)}{2(1 - X) - Y_L^2 \pm \sqrt{Y_T^4 + 4(1 - X)^2 Y_L^2}} \end{aligned} \tag{3.3.75}$$

这就是人们熟知的根据极化电流推导得到的 Appleton-Hartree 公式的结果。当外加的直流磁场不存在时，$Y_T = Y_L = 0$，$n^2 = 1 - X$。当等离子体介质不存在时 $X = 0$，$n^2 = 1$，这就是自由空间的情况。

法拉第旋转

当波沿着外加磁场的方向 $\hat{z}$ 传播时，$\theta = 0$ 且式(3.3.68)变成

$$\begin{bmatrix} u^2 - \nu\kappa & -i\nu\kappa_g \\ i\nu\kappa_g & u^2 - \nu\kappa \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{3.3.76}$$

相速的大小为

$$u = \sqrt{\nu(\kappa \pm \kappa_g)}, \qquad k_z = \omega/\sqrt{\nu(\kappa \pm \kappa_g)}$$

$\boldsymbol{D}_k$ 的两个分量的比值为

$$\frac{D_2}{D_1} = \mp i$$

所以两个特征波都是圆极化波。I 型波的速度为 $(\nu\kappa + \nu\kappa_g)^{1/2}$，II 型波的速度为 $(\nu\kappa - \nu\kappa_g)^{1/2}$。其中，I 型波为沿 $\hat{z}$ 方向传播的左圆极化波，II 型波为沿 $\hat{z}$ 方向传播的右圆极化波。

考虑一个线极化波沿 $\hat{z}$ 方向进入回旋介质，忽略边界上的反射。入射波将会分解为两个以不同速度传播的圆极化波。令分解的形式为

$$\boldsymbol{D} = \hat{\boldsymbol{e}}_1 D_0 = \frac{D_0}{2}(\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \hat{\boldsymbol{e}}_2 \mathrm{i}) + \frac{D_0}{2}(\hat{\boldsymbol{e}}_1 - \hat{\boldsymbol{e}}_2 \mathrm{i}) \tag{3.3.77}$$

式中 D_0 是一个实数。当波在介质中传播一段距离 z_0 后，这两个波分量的相移将有一个差值，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D} &= \frac{D_0}{2}(\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \hat{\boldsymbol{e}}_2 \mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{\mathrm{II}}} + \frac{D_0}{2}(\hat{\boldsymbol{e}}_1 - \hat{\boldsymbol{e}}_2 \mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{\mathrm{I}}} \\ &= \hat{\boldsymbol{e}}_1 \frac{D_0}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{\mathrm{II}}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{\mathrm{I}}}) + \hat{\boldsymbol{e}}_2 \frac{\mathrm{i}D_0}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{\mathrm{II}}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{\mathrm{I}}})\end{aligned} \tag{3.3.78}$$

式中

$$\phi_{\mathrm{I}} = \frac{\omega z_0}{\sqrt{\nu(\kappa + \kappa_g)}} = k_z^{\mathrm{I}} z_0 \tag{3.3.79}$$

$$\phi_{\mathrm{II}} = \frac{\omega z_0}{\sqrt{\nu(\kappa - \kappa_g)}} = k_z^{\mathrm{II}} z_0 \tag{3.3.80}$$

$\boldsymbol{D}_k$ 的两个分量的比值为

$$\frac{D_2}{D_1} = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{\mathrm{II}}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{\mathrm{I}}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{\mathrm{II}}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{\mathrm{I}}}} = -\tan\frac{(\phi_{\mathrm{II}} - \phi_{\mathrm{I}})}{2}$$

这两个分量是同相的，所以波是线极化的（如图 3.3-5(a)所示）。应该注意的是，当观察者向 $-\hat{z}$ 方向看去时，入射波顺时针旋转了一个角度 $(\phi_{\mathrm{II}} - \phi_{\mathrm{I}})/2$。

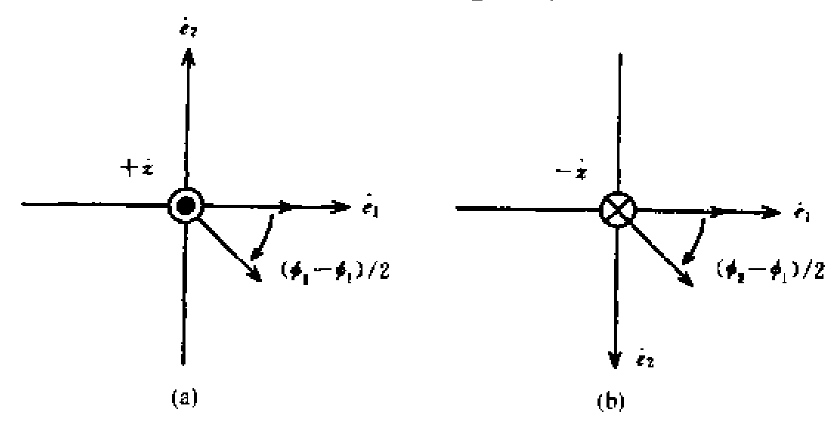


图 3.3-5　法拉第旋转

现在考虑波沿 $-\hat{z}$ 方向传播的情况。应该注意，在图 3.3-5(b)所示的 *kDB* 坐标系中，图 3.3-5(b)中的 $\hat{\boldsymbol{e}}_2$ 轴与图 3.3-1 中的方向相反。这时有 $\theta=\pi$，于是式(3.3.68)变成

$$\begin{bmatrix} u^2 - \nu\kappa & \mathrm{i}\nu\kappa_g \\ -\mathrm{i}\nu\kappa_g & u^2 - \nu\kappa \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{3.3.81}$$

相速的大小为

$$u = \sqrt{\nu(\kappa \pm \kappa_g)} \tag{3.3.82}$$

$\boldsymbol{D}_k$ 的两个分量的比值为

$$\frac{D_2}{D_1} = \pm \mathrm{i} \tag{3.3.83}$$

式中取符号“+”对应 I 型特征波，取符号“-”对应 II 型特征波。当波沿 $-\hat{z}$ 方向传播时，I 型波为右圆极化波，II 型波为左圆极化波。

式(3.3.77)所表示的线极化波沿 $-\hat{z}$ 方向传播一段距离到 $z=-z_0$ 后变成

$$\boldsymbol{D}=\frac{D_0}{2}(\hat{\boldsymbol{e}}_1+\hat{\boldsymbol{e}}_2\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{\mathrm{I}}}+\frac{D_0}{2}(\hat{\boldsymbol{e}}_1-\hat{\boldsymbol{e}}_2\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{\mathrm{II}}} \tag{3.3.84}$$

有

$$\frac{D_2}{D_1}=\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{\mathrm{I}}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{\mathrm{II}}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{\mathrm{I}}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{\mathrm{II}}}}=\tan\frac{\phi_{\mathrm{II}}-\phi_{\mathrm{I}}}{2} \tag{3.3.85}$$

我们又一次看到，当观察者向 $-\hat{z}$ 方向看去时，出射波顺时针旋转了一个角度 $(\phi_{\mathrm{II}}-\phi_{\mathrm{I}})/2$。所以无论波向 $\hat{z}$ 方向还是向 $-\hat{z}$ 方向传播，波都将向同样的方向旋转同样的角度。

通过回旋介质后线极化场矢量的旋转现象被称为法拉第旋转。对于等离子体介质，电子围绕磁力线的旋转运动是造成这一效应的物理原因。法拉第旋转也发生在外加磁场的铁氧体中，那种情况的物理原因是磁流旋转轴围绕磁场的运动。铁氧体的法拉第现象的另一种分析是具有磁阻张量 $\boldsymbol{\nu}$ 的磁各向异性介质模型。

专题 3.3.B　双各向异性介质中的平面波

考虑双各向异性介质具有下面的本构关系

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}\kappa & 0 & 0\\ 0 & \kappa & \\ 0 & 0 & \kappa_z\end{bmatrix}\cdot\boldsymbol{D}+\begin{bmatrix}\chi & 0 & 0\\ 0 & \chi & 0\\ 0 & 0 & \chi_z\end{bmatrix}\cdot\boldsymbol{B} \tag{3.3.86}$$

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\gamma & 0 & 0\\ 0 & \gamma & 0\\ 0 & 0 & \gamma_z\end{bmatrix}\cdot\boldsymbol{D}+\begin{bmatrix}\nu & 0 & 0\\ 0 & \nu & 0\\ 0 & 0 & \nu_z\end{bmatrix}\cdot\boldsymbol{B} \tag{3.3.87}$$

当 $\boldsymbol{\chi}=\boldsymbol{\gamma}$ 时，该关系就退化为 Dzyaloshinskii 所描述的磁电介质。

色散关系和特征波

在 kDB 坐标系中，本构矩阵 $\boldsymbol{\kappa}_k$ 变为

$$\boldsymbol{\kappa}_k=\begin{bmatrix}\kappa & 0 & 0\\ 0 & \kappa\cos^2\theta+\kappa_z\sin^2\theta & (\kappa-\kappa_z)\sin\theta\cos\theta\\ 0 & (\kappa-\kappa_z)\sin\theta\cos\theta & \kappa\sin^2\theta+\kappa_z\cos^2\theta\end{bmatrix} \tag{3.3.88}$$

其他的本构矩阵 $\boldsymbol{\chi}_k$，$\boldsymbol{\gamma}_k$ 和 $\boldsymbol{\nu}_k$ 也有类似的形式。将相应的本构参数代入式(3.3.36)和(3.3.37)并消去 $\boldsymbol{B}_k$ 可以得到

$$\begin{bmatrix}\kappa_\theta(u^2\nu+\nu_\theta\chi\gamma-\kappa\nu\nu_\theta) & u\kappa_\theta(\nu_\theta\chi-\nu\gamma_\theta)\\ u\kappa(\nu_\theta\gamma-\nu\chi_\theta) & \kappa(u^2\nu_\theta+\nu\chi_\theta\gamma_\theta-\kappa_\theta\nu\nu_\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\end{bmatrix}=0 \tag{3.3.89}$$

式中

$$\kappa_\theta=\kappa\cos^2\theta+\kappa_z\sin^2\theta$$

$$\nu_\theta=\nu\cos^2\theta+\nu_z\sin^2\theta$$

$$\chi_\theta=\chi\cos^2\theta+\chi_z\sin^2\theta$$

$$\gamma_\theta=\gamma\cos^2\theta+\gamma_z\sin^2\theta$$

从式(3.3.89)中求解 u 和 $\boldsymbol{D}_k$，虽然结果冗长，但却是很直接的。下面讨论几种特殊情况。

考虑无损耗的磁电介质，$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\chi}$ 并且都是实张量。从式(3.3.89)可以看出其特征波是线极

化波。在 $\hat{z}$ 方向上 $\theta=0$，式(3.3.89)变成

$$\begin{bmatrix} u^2-\kappa\nu+\chi^2 & 0 \\ 0 & u^2-\kappa\nu+\chi^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}=0 \tag{3.3.90}$$

这是一种退化的情形。特征波可以是相速为 $u^2=\kappa\nu-\chi^2$ 的任意极化的波。应该注意在这种情况下必须有 $\kappa\nu>\chi^2$，否则速度就是一个虚数。

手征介质中的光学活性

考虑 χ 和 γ 都是虚数的无损耗双各向异性介质。取 $\boldsymbol{\chi}\to \mathrm{i}\boldsymbol{\chi}$，则无损耗条件要求 $\boldsymbol{\gamma}=-\mathrm{i}\boldsymbol{\chi}$。根据式(3.3.89)可以看到这种介质中的特征波为椭圆极化。

包括多种聚合物、蔗糖溶液和生物物质在内的许多物质都是手征介质。手征介质的本构关系为

$$\boldsymbol{E}=\kappa\boldsymbol{D}+\mathrm{i}\chi\boldsymbol{B} \tag{3.3.91a}$$

$$\boldsymbol{H}=-\mathrm{i}\chi\boldsymbol{D}+\nu\boldsymbol{B} \tag{3.3.91b}$$

我们将在第5章中证明，方程(3.3.91)描述了一种具有互易特性的双各向同性介质。

令式(3.3.89)中 $\kappa_z=\kappa,\nu_z=\nu,\chi_z=\chi$，可以得到双各向同性介质

$$\begin{bmatrix} u^2-\kappa\nu+\chi^2 & \mathrm{i}2\chi u \\ -\mathrm{i}2\chi u & u^2-\kappa\nu+\chi^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}=0 \tag{3.3.92}$$

特征波的传播速度由方程 $u^2-\kappa\nu+\chi^2=\pm 2\chi u$ 确定，对应的极化分量之比为 $D_2/D_1=\pm\mathrm{i}$。所以两个特征波都是圆极化波。右旋圆极化波的相速为 $\sqrt{\kappa\nu}+\chi$，左旋圆极化波的相速为 $\sqrt{\kappa\nu}-\chi$。与回旋介质的情况相同，沿 $\hat{z}$ 方向进入这种介质的线极化波将分裂为两个以不同相速传播的特征波。最后的结果表现为传播矢量的旋转，但这种旋转与法拉第旋转也存在本质的不同。通过比较式(3.3.89)和式(3.3.92)可以发现，当 θ 从0变到 π 时，式(3.3.92)中的非对角元素的正负号发生了变化，而式(3.3.89)中的非对角元素的正负号不发生变化。

对这种显著的区别可以做如下解释。考虑一个线极化波沿 $\hat{z}$ 方向穿过回旋介质片，假设其极化方向旋转了45°，如果出射波被一个镜面反射后重新进入该介质片并穿过介质片，整个过程的极化方向旋转90°。对于同样的实验过程，只是回旋介质片换成双各向同性介质片，则在反射后穿过介质片的过程中波的极化方向又回到原来的方向，即全过程并不造成极化方向的旋转。由于这种区别，我们将这种旋转效应称为光学运动以区别于法拉第效应。在后面的第5章中将会看到，这种光学运动是互易的，而法拉第旋转效应则是非互易的。

专题3.3.C 非线性介质中的平面波

考虑一个非线性介质可以用下面的本构关系表示

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)=\varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t) \tag{3.3.93a}$$

其中，$\boldsymbol{P}$ 的第 i 个分量是

$$P_i=\chi_{ij}E_j+2\chi_{ijk}E_jE_k+4\chi_{ijkl}E_jE_kE_l+\cdots \tag{3.3.93b}$$

在前面的章节中已经对线性项 χ_{ij} 进行了研究。二阶非线性项 χ_{ijk} 是产生二次谐波、参量放大和振荡等现象的原因。三阶非线性项 χ_{ijkl} 则是产生三次谐波、拉曼(Raman)和布里渊(Brillouin)散射、自会聚和相位共轭等效应的原因。

在无源自由空间中，麦克斯韦方程的空间-时间变化形式为

$$\nabla\times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) \tag{3.3.94a}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) \tag{3.3.94b}$$

考虑$\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$的一维情况，可以得到 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 个分量的波动方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}E_i - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_i - \mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}P_i = 0 \tag{3.3.95}$$

假设在三个频率 ω_1,ω_2 和 ω_3 上的平面波解为

$$E_{1i}(z,t) = \frac{1}{2}[E_{1i}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1z-\omega_1t)} + c.c.] \tag{3.3.96a}$$

$$E_{2j}(z,t) = \frac{1}{2}[E_{2j}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2z-\omega_2t)} + c.c.] \tag{3.3.96b}$$

$$E_{3k}(z,t) = \frac{1}{2}[E_{3k}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_3z-\omega_3t)} + c.c.] \tag{3.3.96c}$$

其中，$k_l = \omega_l(\mu_0\varepsilon_0)^{1/2}$，$l = 1,2,3$，$c.c.$ 表示复共轭。当 $\boldsymbol{P}=0$ 时，幅度 $E_{1i}(z)$，$E_{2j}(z)$和$E_{3k}(z)$将与 z 无关。

二次谐波的产生(SHG)

这里只考虑二阶非线性项 χ_{ijk}。对于在频率 ω_3 和 ω_2 上的电场，有

$$\begin{aligned}P_i(z,t) = 2\chi_{ijk}&\left[\frac{1}{2}E_{3j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_3z-\omega_3t)} + \frac{1}{2}E_{2j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2z-\omega_2t)} + c.c.\right]\cdot\\ &\left[\frac{1}{2}E_{3k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_3z-\omega_3t)} + \frac{1}{2}E_{2k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2z-\omega_2t)} + c.c.\right]\end{aligned} \tag{3.3.97}$$

对于频率 $\omega_1 = \omega_3 - \omega_2$，非线性极化为

$$\begin{aligned}P_{1i}(z,t) &= \frac{1}{2}\chi_{ijk}[(E_{3j}E_{2k}^* + E_{3k}E_{2j}^*)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_3-k_2)z-\mathrm{i}(\omega_3-\omega_2)t} + c.c.]\\ &= \chi_{ijk}[E_{3j}E_{2k}^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_3-k_2)z-\mathrm{i}(\omega_3-\omega_2)t} + c.c.]\end{aligned} \tag{3.3.98}$$

这里的推导中利用了求和公式和无损耗条件 $\chi_{ijk} = \chi_{ikj}$。

假设 E_{1i} 作为 z 的函数变化很小，即满足 $\mathrm{d}^2E_{1i}/\mathrm{d}z^2 \ll k_1\mathrm{d}E_{1i}/\mathrm{d}z$。对 E_{1i} 分量令 $k_l = \omega_l(\mu_0\varepsilon_l)^{1/2}$，$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 + \chi_{ij} = \varepsilon_l\delta_{ij}$，可以将关于 $E_{1i}(z,t)$的波动方程(3.3.95)简化为下面关于复数 $E_{1i}(z,t)$的方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_{1i}(z) - \mathrm{i}\omega_1\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}\chi_{ijk}E_{3j}(z)E_{2k}^*(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-k_1+k_3-k_2)z} = 0 \tag{3.3.99a}$$

类似地可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_{3j}(z) - \mathrm{i}\omega_3\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_3}}\chi_{jkl}E_{1k}(z)E_{2l}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1-k_3+k_2)z} = 0 \tag{3.3.99b}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_{2k}^*(z) - \mathrm{i}\omega_2\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}}\chi_{klm}E_{1l}(z)E_{3m}^*(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1-k_3+k_2)z} = 0 \tag{3.3.99c}$$

对于二次谐波的产生(SHG)，$\omega_1 = \omega_2$ 和 $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 = 2\omega_1$。方程(3.3.99c)只是方程(3.3.99a)的复共轭。方程(3.3.99b)可以从(3.3.97)推导得到，并取下面的形式

$$P_i(z,t) = 2\chi_{ijk}\left[\frac{1}{2}E_{1j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1z-\omega_1t)} + c.c.\right]\cdot\left[\frac{1}{2}E_{1k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1z-\omega_1t)} + c.c.\right]$$

对于 $\omega_3=2\omega_1$ 可以得到

$$P_{3i}(z,t)=\frac{1}{2}\chi_{ijk}[E_{1j}E_{1k}e^{i2(k_1z-\omega_1t)}+c.c.]$$

与式(3.3.98)相比有一个1/2的倍数差。式(3.3.95)简化得到式(3.3.99b),可变成下面的形式

$$\frac{d}{dz}E_{3j}(z)-i\frac{\omega_3}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_3}}\chi_{jkl}E_{1k}(z)E_{1l}(z)e^{-i\Delta kz}=0 \tag{3.3.100a}$$

方程(3.3.99a)可以改写成

$$\frac{d}{dz}E_{1i}(z)-i\omega_1\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_1}}\chi_{ijk}E_{3j}(z)E_{1k}^{*}(z)e^{i\Delta kz}=0 \tag{3.3.100b}$$

式中,$\Delta k=k_3-2k_1$。式(3.3.100)构成研究 SHG 的基础。应该注意 $k_3=\omega_3(\mu_0\epsilon_3)^{1/2}$, $k_1=\omega_1(\mu_0\epsilon_1)^{1/2}$, E_{3j}是在频率ω_3上电场的第 j 个分量,E_{1i}是在频率ω_1上电场的第 i 个分量。

假设二次谐波很小,波在频率 ω_1 上的损耗很小。在式(3.3.100b)中 $E_{3j}\approx0$, E_{1i}的解是个常数。令在 $z=0$ 处的二次谐波输入为0,从而 $E_{3j}(0)=0$,由式(3.3.100a)可以得到下面的近似解,

$$E_{3j}(z)=\frac{\omega_3}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_3}}\chi_{jkl}E_{1k}E_{1k}E_{1l}\frac{1-e^{-i\Delta kz}}{\Delta k} \tag{3.3.101}$$

可以看出在频率 ω_3 上产生的功率包含一个干涉因子 $\sin^2(\Delta kz/2)$。因此,产生二次谐波的 z 的范围要小于由 $l_c=2\pi/\Delta k$ 所确定的相干长度。

当 $\Delta k=0$ 时,相干长度无限长,二次谐波的产生最为显著,这种情况被称为相位匹配条件。应该注意在频率 ω_3 的电场 E_{3j}可以与 ω_1 的电场 E_{1k}具有不同的极化。利用色散各向异性介质是实现相位匹配条件的一个途径。例如 E_{1k}可以是频率为ω_1 的非常波,而 E_{3j}是频率为ω_3 的寻常波。与 $\omega_3=2\omega_1$ 相应的相位匹配条件 $\Delta k=\omega_3\sqrt{\mu_0\epsilon_3(\omega_3)}-2\omega_1\sqrt{\mu_0\epsilon_1(\omega_1)}$对应沿 $\hat{z}$ 方向有 $n_o(\omega_3)-n_e(\omega_1)=0$。令 $k^{(o)}(\omega_3)=\omega\sqrt{\mu\epsilon_3(\omega_3)}$, $k^{(e)}(\omega_1)=\omega\sqrt{\mu\epsilon_1(\omega_1)}$,图3.3-6表明,通过改变对应频率 ω_1 和 ω_3 的 k 表面的取向可以使这两个k 表面相交于z,从而满足相位匹配条件。

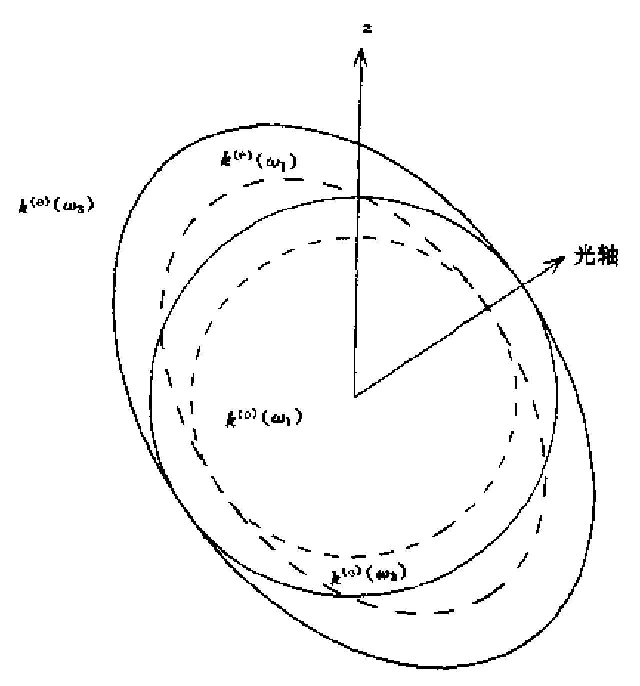


图3.3-6 相位匹配

当 $\Delta k=0$ 的相位匹配条件得以满足时，通过令 $E_{3j}=\mathrm{i}\sqrt{\omega_3/n_o(\omega_3)}A_3$，$E_{1k}=\sqrt{\omega_1/n_e(\omega_1)}A_1$ 和 $\kappa=c\mu\chi_{211}\omega_1\sqrt{\omega_3}/n_e\sqrt{n_o}$，可以将式(3.3.100)简化。假设 A_1 为实数，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_3=\frac{\kappa}{2}A_1^2 \tag{3.3.102a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_1=-\kappa A_1A_3 \tag{3.3.102b}$$

将式(3.3.102a)乘以 $2A_3$，式(3.3.102b)乘以 A_1，并将两个乘积相加可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[A_1^2(z)+2A_3^2(z)]=0$$

由于不存在频率为 ω_3 的输入，即 $A_3(z=0)=0$，所以有 $A_1^2(z)+2A_3^2(z)=A_1^2(0)$。方程(3.3.102a)变成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_3(z)=\frac{\kappa}{2}[A_1^2(0)+2A_3^2(z)]$$

该方程的解是

$$A_3(z)=\frac{A_1(0)}{\sqrt{2}}\tanh\left[\frac{A_1(0)}{\sqrt{2}}\kappa z\right] \tag{3.3.103}$$

应该注意，当 $z\to\infty$ 时，$A_3\to A_1(0)/\sqrt{2}$，并且当整个的转化过程完成之后，由于非线性作用产生的二次谐波 $\omega_3=2\omega_1$ 的功率等于频率为 ω_1 的输入功率的一半，由于频率为 ω_3 的光子能量为 $\hbar\omega_3=2\hbar\omega_1$，所以能量守恒得以满足。

相位共轭

现在我们考虑由于 4 波混频引起的相位共轭，这种 4 波混频是三阶非线性项 χ_{ijkl} 作用的结果。4 波混频的目的是产生与频率为 ω_4 的入射波相位共轭、频率为 ω_3 的输出波。如图 3.3-7所示，给非线性介质注入两个方向相反($\boldsymbol{k}_1=-\boldsymbol{k}_2$)，频率分别为 ω_1 和 ω_2 的输入波。假设得到的平面波解具有类似于式(3.3.97)的频率为 ω_1,ω_2 和 ω_4 的电场的非线性极化，

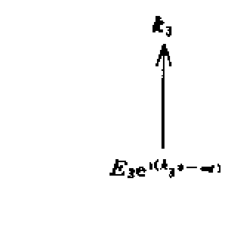
$$\begin{aligned}P_i(z,t)=&\frac{1}{2}\chi_{ijkl}\cdot\\&[E_{1j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega_1t)}+E_{2j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega_2t)}+E_{3j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_4\cdot\boldsymbol{r}-\omega_4t)}+c.c.]\cdot\\&[E_{1k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega_1t)}+E_{2k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega_2t)}+E_{3k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_4\cdot\boldsymbol{r}-\omega_4t)}+c.c.]\cdot\\&[E_{1l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega_1t)}+E_{2l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega_2t)}+E_{3l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_4\cdot\boldsymbol{r}-\omega_4t)}+c.c.]\end{aligned} \tag{3.3.104}$$

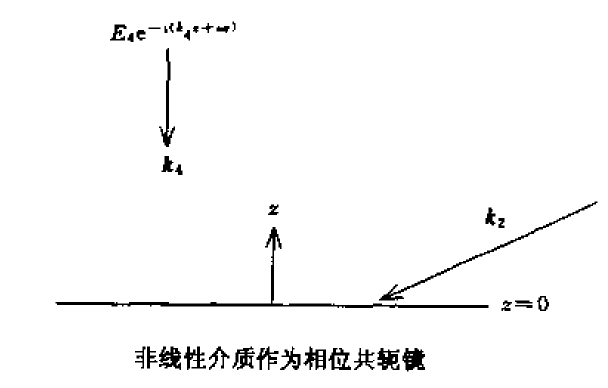
令 $\omega_1=\omega_2=\omega_4=\omega$，$\boldsymbol{k}_1=-\boldsymbol{k}_2$，$\boldsymbol{k}_4=-\hat{z}k$，对于 $\omega_3=\omega_1+\omega_2-\omega_4$，有

$$\begin{aligned}P_{3i}(z,t)&=\frac{1}{2}\chi_{ijkl}E_{1j}E_{2k}E_{4l}^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{r}+kz-(\omega_1+\omega_2)t+\omega_4t]}+c.c.\\&=\frac{1}{2}\chi E_1E_2E_4^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}+c.c.\end{aligned} \tag{3.3.105}$$

式中省略下标并令 $\chi=6\chi_{ijkl}$。非线性极化产生了波分量$\left[\frac{1}{2}E_3(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}+c.c.\right]$，根据波动方程(3.3.95)，省略其中的$\partial^2E_3/\partial z^2$ 项，有

$$\mathrm{i}k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_3(z)=-\frac{1}{2}\omega^2\mu_0\chi E_1E_2E_4^* \tag{3.3.106}$$





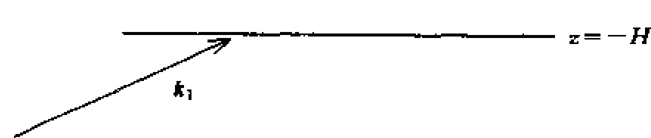


图 3.3-7 相位共轭波的产生

其中，$k=\omega(\mu_0\varepsilon)^{1/2}$，$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_0+\chi_{ij}=\varepsilon\delta_{ij}$，二阶项 $\chi_{ijk}=0$。

新产生的波 E_3 将会与 E_1 和 E_2 混合产生新的极化

$$P_4(z,t)=\frac{1}{2}\chi E_1E_2E_3^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kz+\omega t)}+c.c. \tag{3.3.107}$$

该分量将会与入射波分量 $E_4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kz+\omega t)}$有很强的相互作用。根据关于 $E_4(z)$的波动方程，有

$$-\mathrm{i}k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_4(z)=-\frac{1}{2}\omega^2\mu_0\chi E_1E_2E_3^* \tag{3.3.108}$$

式(3.3.107)和(3.3.108)可以通过与式(3.3.104)～(3.3.106)类似地推导得到。

定义耦合系数

$$\kappa=\frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\chi E_1E_2$$

并注意到 $k=\omega(\mu_0\varepsilon)^{1/2}$，根据式(3.3.106)和式(3.3.108)的复共轭，可以得到耦合方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_3(z)=\mathrm{i}\kappa E_4^*(z) \tag{3.3.109a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_4^*(z)=\mathrm{i}\kappa^*E_3(z) \tag{3.3.109b}$$

给定 $E_4(0)$和 $E_3(-H)$，耦合方程(3.3.109)的解具有下面的形式

$$E_3(z)=\frac{\cos(|\kappa|z)}{\cos(|\kappa|H)}E_3(-H)-\mathrm{i}\frac{\kappa\sin(|\kappa|(z+H))}{|\kappa|\cos(|\kappa|H)}E_4^*(0) \tag{3.3.110a}$$

$$E_4^*(z)=\mathrm{i}\frac{|\kappa|\sin(|\kappa|z)}{\kappa\cos(|\kappa|H)}E_3(-H)-\frac{\cos(|\kappa|(z+H))}{\cos(|\kappa|H)}E_4^*(0) \tag{3.3.110b}$$

令 $E_3(-H)=0$，$z=0$ 处有入射波 $E_4(0)$产生的反射波为

$$E_3(0)=\mathrm{i}\left(\frac{\kappa}{|\kappa|}\tan(|\kappa|H)\right)E_4^*(0) \tag{3.3.111}$$

所以有 $E_3(0)$正比于 $E_4(0)$的复共轭 $E_4^*(0)$。

需要注意,反射波在空间上,而不是在时间上是入射波的复共轭。如果入射波的脉冲波形具有 $f(z+ct)$ 的形式,那么经过共轭镜面反射之后的反射波的脉冲波形具有 $f(z-ct)$ 的形式。所以反射波与入射波的脉冲波形在时间上正好相反。进一步,如果入射波 $E_3(0)$ 不是平面波,而是具有一个复杂的波前

$$E_4 = \mathrm{Re}\{E_4(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t+kz)}\}$$

那么

$$E_3 = \mathrm{Re}\left\{-\mathrm{i}\left(\frac{\kappa}{|\kappa|}\tan(|\kappa|H)\right)E_4^*(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kz+(\omega t)}\right\}$$

只需根据波动方程的线性性质对前面的推导略加修改就可以证明上面的结果。

有趣的是,我们可以注意到 $|E_4(-H)|>|E_4(0)|$,并且当 $\pi/4<|\kappa|H<3\pi/4$ 时,$|E_3(0)|>|E_4(0)|$。$E_4(-H)$ 的放大和 $E_3(0)$ 的产生必须以 E_1 和 E_2 的注入为代价。事实上,当 $|\kappa|H=\pi/2$ 时,$|E_4(-H)/E_4(0)|\to\infty$ 和 $|E_3(0)/E_4(0)|\to\infty$ 给出了没有输入波的自然谐振。

习　题

3.3.1　令复矢量 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{D}_r(\boldsymbol{r})+\mathrm{i}\boldsymbol{D}_i(\boldsymbol{r})$,$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{D}_r\cos\omega t+\boldsymbol{D}_i\sin\omega t$。由 $\partial\boldsymbol{D}^2(\boldsymbol{r},t)/\partial t=2\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)\cdot\partial\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)/\partial t=0$,证明 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)$ 取得最大值和最小值的时刻为

$$\tan2\omega t = \frac{2\boldsymbol{D}_r\cdot\boldsymbol{D}_i}{|\boldsymbol{D}_r|^2-|\boldsymbol{D}_i|^2}$$

矢量 $\boldsymbol{D}$ 在时间 $\mathrm{d}t$ 内扫过的微分面积为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}(\mathrm{d}\boldsymbol{D})\times\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}\omega\mathrm{d}t(\boldsymbol{D}_i\times\boldsymbol{D}_r)$$

由于 $\mathrm{d}a=\frac{1}{2}D^2\mathrm{d}\phi$,证明旋转角速度 $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$ 在矢量位于短轴位置时最大,而当矢量位于长轴位置时最小。

令 $\boldsymbol{D}=\hat{\boldsymbol{x}}(1-\mathrm{i}\sqrt{3})+\hat{\boldsymbol{y}}(3+\mathrm{i}\sqrt{3})$,求在什么时刻 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)$ 取得最大值和最小值,并计算极化椭圆的长轴和短轴长度。

3.3.2　在单轴介质中,寻常波和非常波的射线矢量形成一个夹角 α。非常波的射线矢量 $\boldsymbol{s}_e$ 与非常波的 k 表面垂直

$$\boldsymbol{s}_e \,//\, \frac{1}{2}\nabla_k(\omega^2\mu) = \hat{\boldsymbol{\rho}}\kappa_z k_\rho + \hat{\boldsymbol{z}}\kappa k_z = \hat{\boldsymbol{\rho}}\kappa_z k\sin\theta + \hat{\boldsymbol{z}}\kappa k\cos\theta$$

式中 $\omega^2\mu=\kappa(k_\rho^2+k_z^2)$。寻常波的射线矢量 $\boldsymbol{s}_o$ 与寻常波的 k 表面垂直

$$\boldsymbol{s}_o \,//\, \frac{1}{2}\nabla_k(\omega^2\mu) = \hat{\boldsymbol{\rho}}\kappa k\sin\theta + \hat{\boldsymbol{z}}\kappa k\cos\theta$$

证明 $\boldsymbol{s}_e$ 与 $\boldsymbol{s}_o$ 的夹角 α 由下式决定

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{s}_e\cdot\boldsymbol{s}_o}{|\boldsymbol{s}_e||\boldsymbol{s}_o|} = \frac{\kappa_z\sin^2\theta+\kappa\cos^2\theta}{(\kappa_z^2\sin^2\theta+\kappa^2\cos^2\theta)^{1/2}}$$

证明当

$$\sin\theta_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa_z}}\cos\theta_0$$

时,α 取得最大值 $\alpha_{\max}$,并计算 $\cos\alpha_{\max}$。

3.3.3　考虑导电单轴介质的介电常数张量和电导率张量分别为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix}\varepsilon & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_z\end{bmatrix}$$

和

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

求该介质的色散关系。利用该模型解释满足 $\sigma_z/\sigma \ll 1$ 的偏光板的作用机理。证明这样的偏光板可以将任意的波转化为线极化波。

3.3.4 菲涅耳椭球被定义为具有如下特性的各向异性介质

$$\epsilon_{ij}x_i x_j = 1$$

式中，ϵ_{ij}为主坐标系定义、介电常数张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的逆张量 $\boldsymbol{\kappa}$ 被称为容阻张量。如果在主坐标系中以 $\boldsymbol{\kappa}$ 而不是以 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 定义一个椭球

$$\kappa_{ij}x_i x_j = 1$$

可称之为张量椭球。对双轴介质构造菲涅耳椭球和张量椭球。在这些定义下，用主坐标系表示的主折射指数通常用 $n_i^2\delta_{ij}$代替 ε_{ij}，用 δ_{ij}/n_i^2 代替 κ_{ij}，在这种情况下、张量椭球又被称为指数椭球或互易椭球。

3.3.5 满足 $\kappa_{ij} = \kappa_{ji}$ 的各向异性晶体介质中的电场能量为 $W_e = \kappa_{ij}D_iD_j/2$。在主坐标系表示下，证明 $D_x^2/n_x^2 + D_y^2/n_y^2 + D_z^2/n_z^2 = 2W_e$。该方程与定义指数椭球或指数矩阵的方程相同。指数椭球可以用来确定与两个特征波有关的两个折射指数和与之对应的矢量 $\boldsymbol{D}$ 的两个方向。求通过指数椭球原点的平面与法线沿 $\boldsymbol{k}$ 方向的表面相交形成的椭圆。令 $\boldsymbol{k}$ 沿 $\hat{\boldsymbol{e}}_3$ 方向，证明该椭圆的两个主轴的方向分别与两个特征波的矢量 $\boldsymbol{D}$ 的方向一致。

3.3.6 用指数矢量 $\boldsymbol{n}$ 替换波矢量 $\boldsymbol{k}$ 就可以得到菲涅耳方程，其中指数矢量可以定义为 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$。联系指数椭球和菲涅耳椭球讨论用 $\boldsymbol{n}$ 表示的色散关系。

3.3.7 几何光学中的费马原理就是变分原理。根据费马原理，沿介质中两点之间的真实光线程函取最小值。其中程函的定义为 $\int \boldsymbol{k}\cdot d\boldsymbol{l}$。利用该原理和色散关系 $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{n}(\omega/c)$，证明非均匀介质中的光线将向折射指数增加的方向弯曲。

3.3.8 单轴介质的本构张量为

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_z \end{bmatrix} \text{和} \ \boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} \nu & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \nu_z \end{bmatrix}$$

求其色散关系并对结果进行讨论。

3.3.9 在铁氧体中，磁矩 $\boldsymbol{M}$ 大致满足关系 $d\boldsymbol{M}/dt = g\mu_0\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{H}$，其中 g 为磁旋比。当存在一个 $\hat{z}$ 方向的直流磁场 $\boldsymbol{H}_0$(零阶)时，总场具有的形式为 $\boldsymbol{H} = \hat{z}H_0 + \boldsymbol{H}_1$，$\boldsymbol{M} = \hat{z}M_0 + \boldsymbol{M}_1$。求一阶场的色散关系，并证明铁氧体存在法拉第旋转。

3.3.10 由于地球磁场的存在，电离层成为回旋介质。无线电波穿过电离层的传播受到法拉第旋转效应的影响。电离层中电子密度的瞬时变化会造成采用线极化波的卫星通信天线设计上的问题。

频率为 f 的线极化微波以相对天底方向 θ 角度向地球发射，它离开地球磁场矢量 H_e 一个小角度 ϕ。

(1) 假设电离层的电子密度 N 和 H_e 都是高度 h 的函数，证明法拉第旋转的角度近似为

$$\Omega = \frac{\eta e^2\mu_0}{8\pi^2 m^2 f^2}\int M(h)N(h)dh$$

式中

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377\Omega$$

$$M = H_e\sec\theta\cos\phi$$

e 和 m 分别为电子的电量和质量。

在上面的推导中，假设工作频率远高于等离子体的回旋频率，并忽略下列因素的作用：① 由于粒子碰撞引起的损耗；② 由于电离层的不均匀特性引起的内部反射；③ 寻常波和非常波的射线分裂。

(2) 假设电离层具有均匀的电子密度 $10^{11}/\mathrm{m}^3$,地球磁场相对天底方向的夹角为 60°,并且具有均匀的强度 $H_e = 50\mathrm{A/m}$(对应 $B = 0.628\mathrm{Gs} = 0.628\times10^{-4}\mathrm{T}$)。工作频率为 1.4GHz 的无线电波沿着地球磁场 $\boldsymbol{H}_e$ 的方向从 1000km 的高度发射到地球表面的法拉第旋转角度。

3.3.11　利用 kDB 坐标系确定双各向同性介质(Tellegen 介质)的色散关系。这种介质的本构关系为

$$\boldsymbol{D} = \epsilon\boldsymbol{E} + \xi\boldsymbol{H}$$
$$\boldsymbol{B} = \xi\boldsymbol{E} + \mu\boldsymbol{H}$$

并对所得结果进行讨论。

3.3.12　在双轴介质中,三个主要的介电常数是不同的。在主坐标系中,本构张量为

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_x & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_y & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_z \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{\nu} = \nu\boldsymbol{I}$$
$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\gamma} = 0$$

其中,$\boldsymbol{\kappa}$ 又被称为容阻张量。它与介电常数之间的关系为 $\kappa_x = 1/\epsilon_x$,$\kappa_y = 1/\epsilon_y$ 和 $\kappa_z = 1/\epsilon_z$。ν 是 μ 的倒数。

(1) 证明在 kDB 坐标系中,本构参数分别为

$$\kappa_{11} = \kappa_x\sin^2\phi + \kappa_y\cos^2\phi$$
$$\kappa_{12} = \kappa_{21} = (\kappa_x - \kappa_y)\cos\theta\sin\phi\cos\phi$$
$$\kappa_{22} = (\kappa_x\cos^2\phi + \kappa_y\sin^2\phi)\cos^2\theta + \kappa_z\sin^2\theta$$
$$\kappa_{13} = \kappa_{31} = (\kappa_x - \kappa_y)\sin\theta\sin\phi\cos\phi$$
$$\kappa_{23} = \kappa_{32} = (\kappa_x\cos^2\theta + \kappa_y\sin^2\theta - \kappa_z)\sin\theta\cos\theta$$
$$\kappa_{33} = (\kappa_x\cos^2\theta + \kappa_y\sin^2\theta)\sin^2\theta + \kappa_z\cos^2\theta$$

(2) 证明特征波的相速为

$$u^2 = \frac{\nu}{2}\left[(\kappa_{11} + \kappa_{22}) \pm \sqrt{(\kappa_{11} - \kappa_{22})^2 + 4\kappa_{12}^2}\right]$$

证明在 DB 平面上

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{\nu\kappa_{12}}{u^2 - \nu\kappa_{22}} = \frac{2\kappa_{12}}{\kappa_{11} - \kappa_{22} \pm \sqrt{(\kappa_{11} - \kappa_{22})^2 + 4\kappa_{12}^2}}$$

其中,DB 平面用 kDB 的两个基矢量 $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ 和 $\hat{\boldsymbol{e}}_2$ 表示。两个特征波分别是什么极化? 令

$$\tan 2\psi = \frac{2\kappa_{12}}{\kappa_{11} - \kappa_{22}}$$

证明

$$\frac{D_2}{D_1} = \tan\psi \text{ 或 } -\cot\psi$$

在 DB 平面上,画出两个特征波矢量。两个特征波的速度都是 θ 和 ϕ 的函数。证明两个特征波的电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 都不在 DB 平面上,即都具有 $\boldsymbol{k}$ 的电场分量。因此,两个特征波的能量传播方向都不同于 $\boldsymbol{k}$ 方向,并且这两个特征波都是非常波。

3.3.13　双各向异性介质具有本构关系

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{E} + \mathrm{i}\chi\boldsymbol{H}$$
$$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H} - \mathrm{i}\chi\boldsymbol{E}$$

其中,$\boldsymbol{\epsilon}$ 由式(3.1.16)给出。推导沿 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 方向的波矢量并讨论介质中特征波的极化状态。

3.3.14 在复杂介质中波的传播方向将变得不确定。根据坡印廷定理，可知道电磁场的能量流动决定于坡印廷矢量，$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$。用坡印廷矢量除以总的电磁能量将得到能量速度，所以能量速度分别垂直于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$。我们已经知道，相速的方向与 $\boldsymbol{k}$ 一致，它分别垂直于 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}$。在双各向异性介质中，能量速度的方向与相速的方向通常是不一致的。

坡印廷功率流的方向用射线矢量 $\boldsymbol{s}$ 刻画。定义 $\boldsymbol{s}$ 的幅度为

$$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{k}=1$$

其中，$\boldsymbol{s}$ 分别垂直于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$：

$$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{E}=0$$

$$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{H}=0$$

射线矢量 $\boldsymbol{s}$ 具有长度的量纲。

(1) 利用矢量恒等式 $\boldsymbol{s}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E})=\boldsymbol{k}(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{E})-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{s})\boldsymbol{E}$ 证明

$$\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{B}=-\frac{\boldsymbol{E}}{\omega}$$

$$\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{D}=\frac{\boldsymbol{H}}{\omega}$$

(2) 类似于波表面定义射线表面。证明对于寻常波有

$$s_x^2+s_y^2+s_z^2=\frac{1}{\omega^2\mu\epsilon}$$

对于非常波有

$$s_x^2+s_y^2+\frac{\epsilon}{\epsilon_z}s_z^2=\frac{1}{\omega^2\mu\epsilon_z}$$

对于负的和正的单轴介质分别绘出射线表面。

(3) 由于 $\boldsymbol{s}$ 与能量速度的方向一致，$\boldsymbol{s}\cdot\delta\boldsymbol{k}=0$，波表面的法线方向给出了相应的射线矢量的方向。证明射线表面的法线方向并给出相应的波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的方向。

(4) 波沿射线的相位可以写成下面的形式

$$\psi=\int\boldsymbol{k}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int\boldsymbol{k}\cdot\frac{\boldsymbol{s}}{s}\mathrm{d}l=\frac{l}{s}$$

式中，l 表示沿射线路径的线段长度。在几何光学中，无量纲量 $\psi/(\omega/c)$ 是波的程函。证明当 l 等于 s 再乘以一个常数时，程函等于 c/ω 乘上一个常数。射线表面给出 s 在所有方向上的大小。所以射线表面表述了波传播的等相位面。

3.3.15 在非线性介质中，可以通过注入一个频率为 ω_3 的波对一个频率为 ω_1 的信号波进行放大，因为在二次非线性的参数放大过程中产生一个频率为 $\omega_2=\omega_3-\omega_1$ 的无效波分量。

(1) 假定 $E_{3j}(z)=E_{3j}(0)$，证明式(3.3.99)可以写成

$$\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}A_2^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta kz}$$

$$\frac{\mathrm{d}A_2^*}{\mathrm{d}z}=\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta kz}$$

确定参数 α,A_1,A_2 和 Δk。

(2) 令 $A_2(0)=0$ 并假设满足相位匹配条件 $\Delta k=0$。证明

$$A_1(z)=A_1(0)\cosh\frac{\alpha}{2}z$$

$$A_2^*(z)=\mathrm{i}A_1(0)\sinh\frac{\alpha}{2}z$$

(3) 推导 Manley-Rowe 关系

$$-\frac{\Delta P_3}{\omega_3}=\frac{\Delta P_2}{\omega_2}=\frac{\Delta P_1}{\omega_1}$$

其中，$\Delta P_l, l=1,2,3$ 是输入与输出的功率变化。对于加到信号上的每个光子，有一个光子加到无效波上，有一个光子离开注入波，能量是否守恒。

3.4　反射与透射

3.4.1　相位匹配

考虑一个平面是两个均匀介质的边界。边界的位置为 $z=0$（见图 3.4-1）。一个平面波从 0 区域的介质入射到边界上，在该介质区域中产生反射波，并在区域 t 产生透射波。入射波、反射波和透射波的空间变化形式分别为 $e^{i\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}}$，$e^{i\boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{r}}$和 $e^{i\boldsymbol{k}_t\cdot\boldsymbol{r}}$，其中，

入射波波矢量　$\boldsymbol{k}_i=\hat{x}k_{ix}+\hat{y}k_{iy}+\hat{z}k_{iz}$

反射波波矢量　$\boldsymbol{k}_r=\hat{x}k_{rx}+\hat{y}k_{ry}+\hat{z}k_{rz}$

透射波波矢量　$\boldsymbol{k}_t=\hat{x}k_{tx}+\hat{y}k_{ty}+\hat{z}k_{tz}$

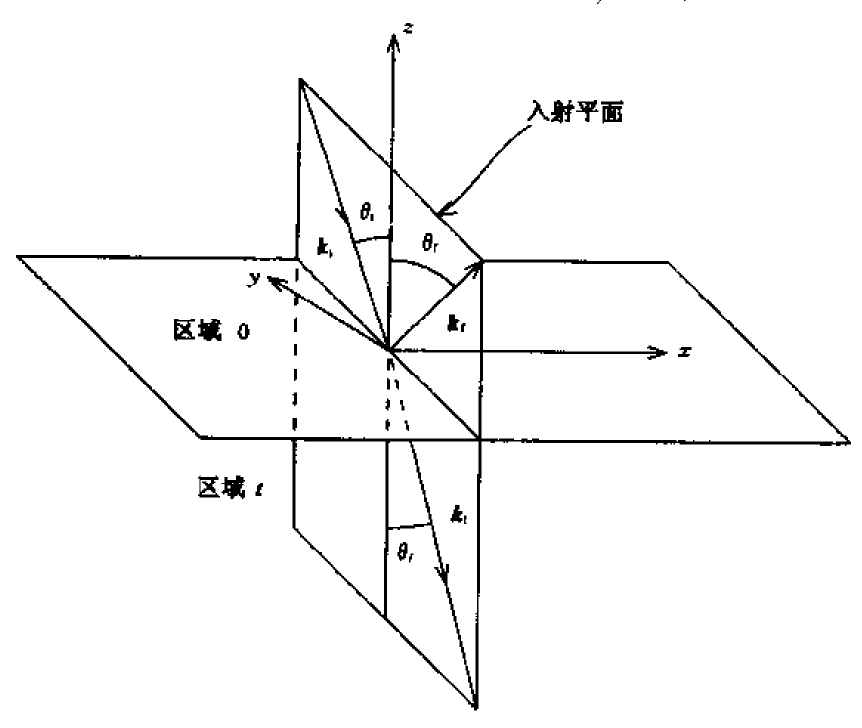


图 3.4-1　波矢量 $\boldsymbol{k}_i,\boldsymbol{k}_r$ 和 $\boldsymbol{k}_t$

$z=0$ 处的边界条件要求，对于所有的 x 和 y，电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量连续。需要注意的是，波矢量 $\boldsymbol{k}_i,\boldsymbol{k}_r$ 和 $\boldsymbol{k}_t$ 表示常数相位波前的传播方向，对于均匀平面波而言，在相位波前具有常数幅度和相位。所以在区域 0 中任意一点，都同时存在入射波和反射波。例如，令入射波、反射波和透射波电场切向分量的幅度分别为 E_i,E_r 和 E_t。根据 $z=0$ 处的边界条件可以得到

$$E_i e^{ik_{ix}x+ik_{iy}y}+E_r e^{ik_{rx}x+ik_{ry}y}=E_t e^{ik_{tx}x+ik_{ty}y} \tag{3.4.1}$$

在 $z=0$ 的边界平面上，对于所有的 x 和 y 方程(3.4.1)成立。则 $E_i+E_r=E_t$，并且有

$$k_{ix}=k_{rx}=k_{tx}=k_x$$

和

$$k_{iy}=k_{ry}=k_{ty}=k_y$$

因此满足边界条件的结果是所有波矢量的切向分量都连续。这一结果被称为相位匹配条件。

斯涅耳定律

根据相位匹配条件,入射波、反射波和透射波的波矢量都处在同一平面上,该平面被称为入射平面(见图 3.4-1)。入射平面由入射波矢量 $\boldsymbol{k}_i$ 和边界面的法线方向确定。考虑两个介质都是各向同性介质的情况,波矢量的幅度用色散关系来刻画

$$k_i^2 = k_r^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0 \tag{3.4.2}$$

及

$$k_t^2 = \omega^2\mu_t\varepsilon_t \tag{3.4.3}$$

令 θ_i,θ_r 和 θ_t 分别表示入射角、反射角和透射角,并且 θ_i,θ_r 和 θ_t 都小于 $\pi/2$(见图 3.4-1)。由于三个波矢量的切向分量都连续,可以得到

$$k_i\sin\theta_i = k_r\sin\theta_r \tag{3.4.4}$$

$$k_i\sin\theta_i = k_t\sin\theta_t \tag{3.4.5}$$

由式(3.4.2)和(3.4.4)可以得到反射角 θ_r 等于入射角 θ_i。由式(3.4.3)和(3.4.5)可以得到

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{n_t}{n_0} \tag{3.4.6}$$

其中,$n_t = c\sqrt{\mu_t\varepsilon_t}$ 和 $n_0 = c\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ 是折射指数。方程(3.4.6)被称为斯涅耳定律。

可以用简单的图表示相位匹配条件(图 3.4-2)。假设入射平面在 x-y 平面上,给出两个各向同性介质的 k 表面。令 $n_0 < n_t$,则对应 0 区域介质的 k 表面的半径小于对应 t 区域介质的 k 表面的半径。图 3.4-2 给出了 k 空间中的 k_x-k_z 平面。虽然 k_x 并不是一个物理轴,但它给出了物理边界的含义。所以在图中,对于 0 区域用虚线表示 k_x 坐标轴下面的 k 表面。类似地对于 t 区域用虚线表示 k_x 坐标轴上面的 k 表面。在图中绘出了从 k 表面到坐标原点的入射 $\boldsymbol{k}$ 矢量、斯涅耳定律要求切向波矢量分量 k_x 连续,在图 3.4-2 中对反射波和透射波构造了波矢量 $\boldsymbol{k}$。

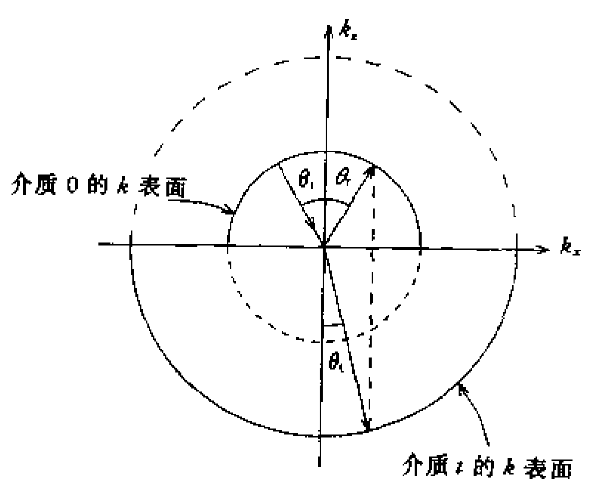


图 3.4-2　用 k 表面进行相位匹配

但是,并非总能够构造反射波矢量 $\boldsymbol{k}_r$ 和透射波矢量 $\boldsymbol{k}_t$。假设区域 0 中的介质比区域 t 中的介质密,即 $n_0 > n_t$,则区域 t 的 k 表面的半径区域 0 中 k 表面的半径短(图 3.4-3)。根据相位匹配条件,可以看到入射波的切向波矢量 k_{ix} 分量变得比 k_t 更大时,它与较小的圆将不相交。这是因为除非一个矢量是复数,否则不能要求矢量的一个分量比它的幅度还大。区域 t

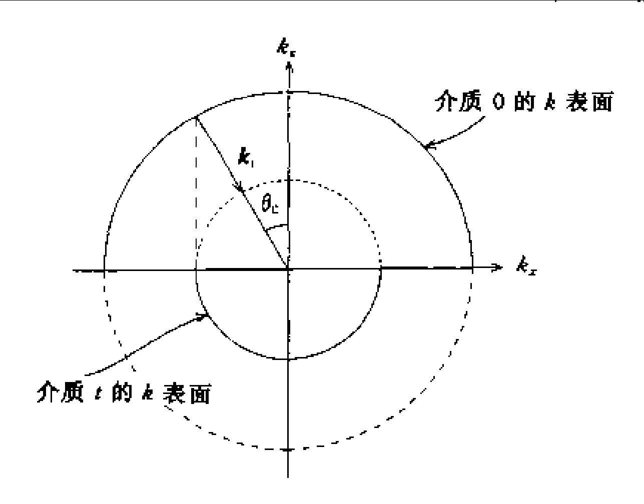


图 3.4-3　介质 0 的 k 表面大于介质 t 的 k 表面

的 k 表面可以用下面的方程描述

$$k_{tz}^2 + k_{ix}^2 = k_t^2 \tag{3.4.7}$$

由于 $k_{ix} > k_t$，所以 k_{tz} 必然为纯虚数，即有

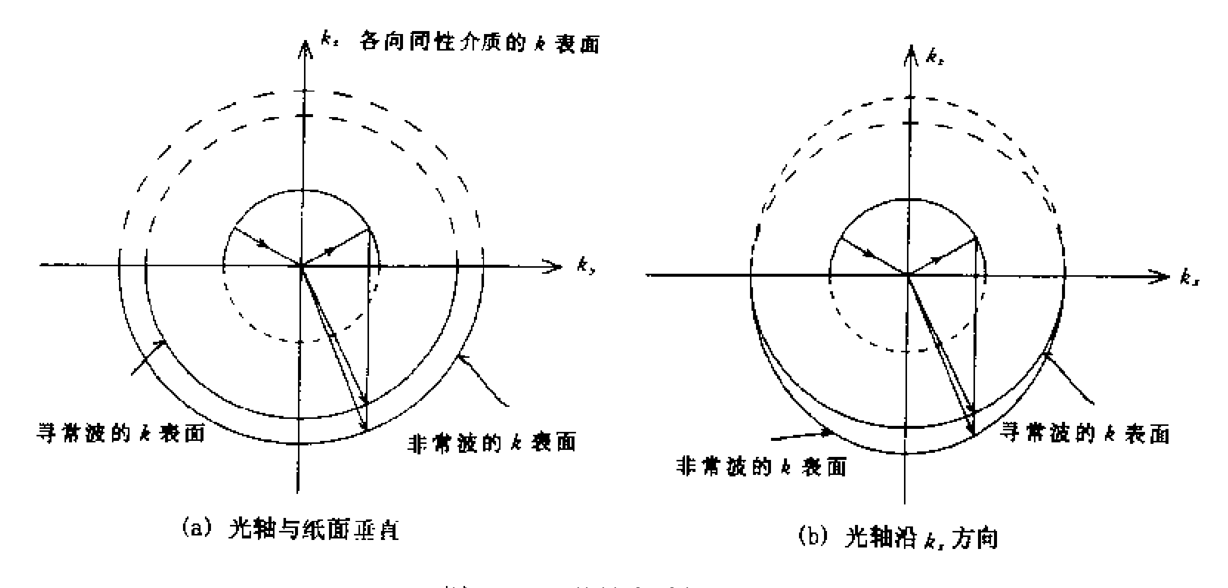
$$k_{tz} = \pm\sqrt{k_t^2 - k_{ix}^2} = \pm \mathrm{i}\alpha_{tz} \tag{3.4.8}$$

在区域 t 中的波用 $\exp(\mathrm{i}k_{tz}z + \mathrm{i}k_x x)$ 刻画，所以对于 $k_x > k_t$ 的情形，该描述将变成 $\exp(\alpha_{tz}z + \mathrm{i}k_x x)$。在这里取式(3.4.8)中 ± 为 − 号的情形，这样沿着 $-\hat{z}$ 方向，透射波将指数衰减。而沿着 $\hat{x}$ 方向，透射波将以相速 ω/k_x 传播。这种情况可以看做是平面波的波前与边界表面垂直，它的幅度在边界表面上取得最大值并随着离开边界表面而指数衰减。这样的波被称为表面波。表面波在 $-\hat{z}$ 方向上是凋落波。由于当 $k_t = k_x = k\sin\theta_c$ 透射波的衰减开始出现，所以角度 θ_c 是入射的临界角。在解出波的幅度并确定波的能量流量后，会发现当入射角大于 θ_c 时，将没有时间平均功率进入区域 t 中的介质。由于这个原因，这一现象被称为全反射。

双折射

构造 k 表面可以直观地看到反射区域和透射区域的波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的特性(见图 3.4-2 和 3.4-3)。这一方法也可用于非各向同性介质。如图 3.4-4 所示，考虑正单轴介质的双折射现象。首先考虑介质光轴垂直于入射平面的情况，两个透射波矢量如图 3.4-4(a)所示，这时寻常波和非常波的功率流的方向与波矢量的方向相同。然后考虑介质光轴平行于入射平面的情况，两个透射波矢量如图 3.4-4(b)所示，这时非常波的功率流的方向将不再与波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的方向一致。应该注意，只在一定的源激励下，才能既产生寻常波，又产生非常波。例如，如果入射波是垂直于入射平面的线极化波，那么将只能激励起寻常波。

另外考虑在单轴介质中激励的波入射到各向同性介质界面的情形。令介质的光轴平行于入射平面并与边界平面构成一定的夹角，图 3.4-5 给出了这种情况下的 k 表面。在图 3.4-2～3.4-4 中，我们绘出的入射波矢量 $\boldsymbol{k}_i$ 的箭头是朝着 $\boldsymbol{k}$ 空间的坐标原点的。虽然在图中对半球用虚线表示物理边界的含义，但必须清楚我们所绘的是 $\boldsymbol{k}$ 空间而不是物理空间。在图 3.4-5 中绘出了反射波矢量。在这里不是指向正的 k_x 和 k_z 方向，而是分别指向正的 k_x 和负的 k_z 方向。所以对于反射波而言，一方面它将能量带离介质界面，另一方面它的波前又向着介质界面传播。这被称为相对界面法线的后向波。



(a) 光轴与纸面垂直　　(b) 光轴沿 k_z 方向

图 3.4-4　单轴介质的双折射

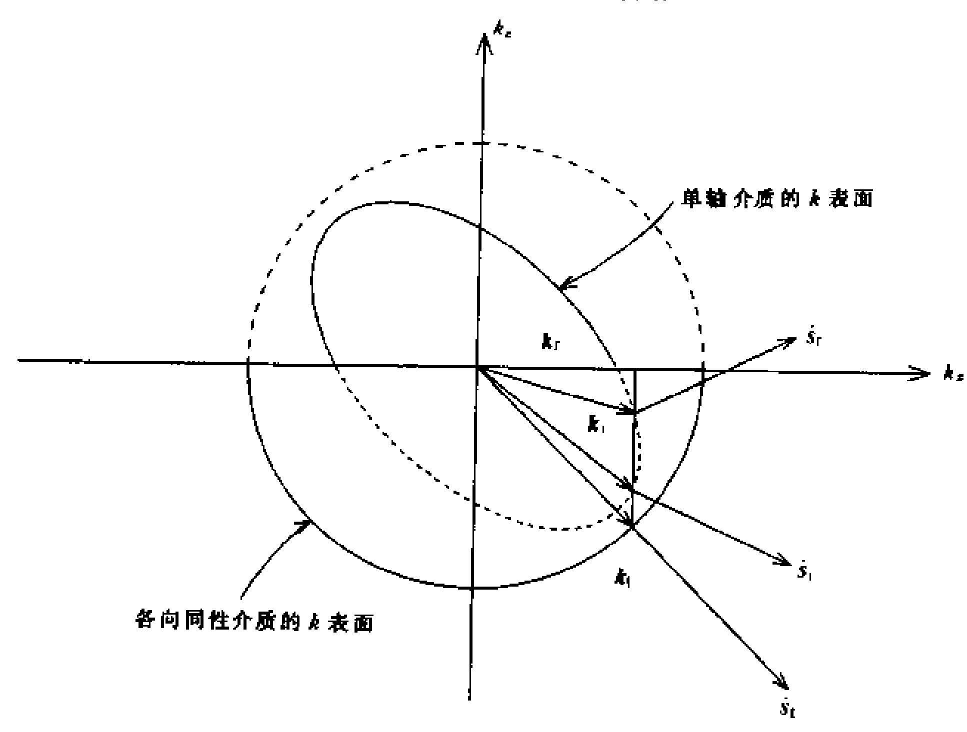


图 3.4-5　波矢量的方向和功率流的方向

3.4.2　平面边界的反射和透射

任意极化的入射波都可以分解为 TE(横电)波和 TM(横磁)波分量。TE 波是电场矢量垂直于入射平面的线极化波,它被称为正交极化、水平极化或简称为 $\boldsymbol{E}$ 波或 s 波。TM 波是电场矢量平行于入射平面的线极化波,它被称为平行极化、垂直极化或简称为 $\boldsymbol{H}$ 波或 p 波。对这两种波分量可以分别进行研究。

如图 3.4-6 所示,一个平面波从介电常数为 ϵ_0、磁导率为 μ_0 的各向同性介质中入射到另外的介电常数为 ϵ_t、磁导率为 μ_t 的介质上。假设入射平面平行于 x-z 平面,根据相位匹配条件,所有平面波的 $\boldsymbol{k}$ 矢量都在 x-z 平面上。由于 $\partial/\partial y=0$,所以在区域 0 中麦克斯韦方程变成

$$H_x=-\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu_0}\frac{\partial}{\partial z}E_y \tag{3.4.9}$$

$$H_z = -\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu_0}\frac{\partial}{\partial x}E_y \tag{3.4.10}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2\mu_0\varepsilon_0\right)E_y = 0 \tag{3.4.11}$$

$$E_x = \frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}H_y \tag{3.4.12}$$

$$E_z = -\frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}H_y \tag{3.4.13}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2\mu_0\varepsilon_0\right)H_y = 0 \tag{3.4.14}$$

方程(3.4.9)和(3.4.10)是法拉第定律的 x 分量和 z 分量，而方程(3.4.12)和(3.4.13)则是无源安培定律的 x 分量和 z 分量，利用式(3.4.12)和(3.4.13)求法拉第定律的 y 分量就可以得到式(3.4.14)。对于区域 t，只需用 μ_t 和 ε_t 替换 μ_0 和 ε_0 就可以得到类似的方程组。可以看到 TE 波完全由方程(3.4.9)～(3.4.11)决定，而 TM 波则完全由方程(3.4.12)～(3.4.14)决定，而且这两组方程相互没有耦合，这两组方程相互对偶。通过 $\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}\to-\boldsymbol{E}$ 和 $\mu_0\rightleftharpoons\varepsilon_0$ 的替换，就能够从一组方程得到另一组方程。

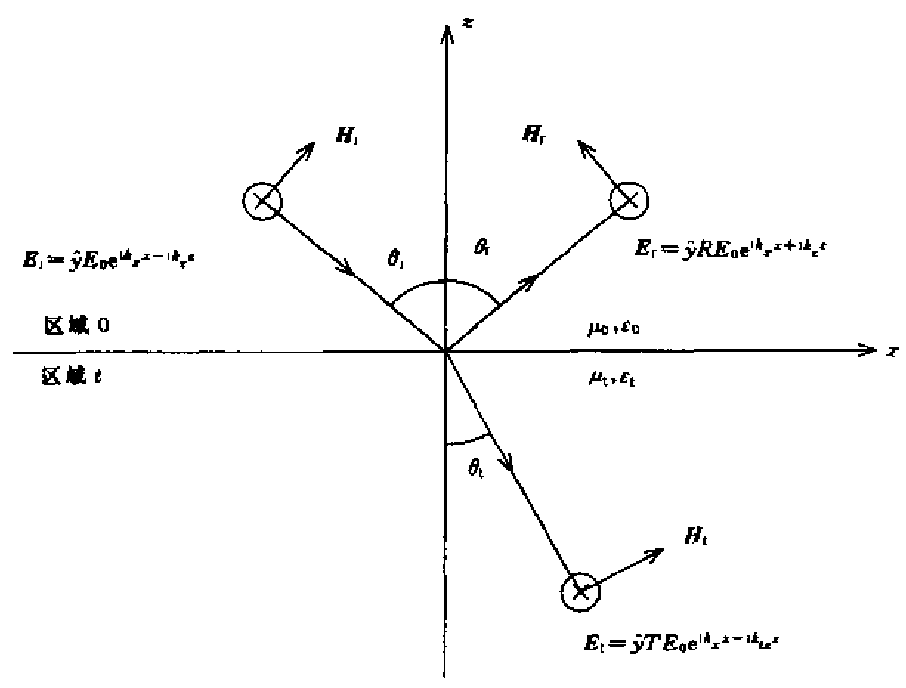


图 3.4-6　TE 波在区域 0 与区域 t 的平面边界上的反射和透射

TE 波的反射与透射

对于入射到各向同性介质上的 TE 波，区域 0 中的总电场和总磁场是反射场与入射场分量的叠加(见图 3.4-6)。可将其写成

$$E_y = (RE_0e^{\mathrm{i}k_zz} + E_0e^{-\mathrm{i}k_zz})e^{\mathrm{i}k_xx} \tag{3.4.15}$$

$$H_x = -\frac{k_z}{\omega\mu_0}(RE_0e^{\mathrm{i}k_zz} - E_0e^{-\mathrm{i}k_zz})e^{\mathrm{i}k_xx} \tag{3.4.16}$$

$$H_z = \frac{k_x}{\omega\mu_0}(RE_0e^{\mathrm{i}k_zz} + E_0e^{-\mathrm{i}k_zz})e^{\mathrm{i}k_xx} \tag{3.4.17}$$

式中 E_0 为入射波幅度，R 表示电场反射系数。方程(3.4.16)和(3.4.17)是从式(3.4.15)得到的，并利用了式(3.4.9)和(3.4.10)。根据相位匹配的要求，在式(3.4.15)～(3.4.17)的指数中入射波和反射波的波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的 x 分量相等。入射波和反射波波矢量的 z 分量符号相反，表示反射波与入射波传播方向在 $\hat{z}$ 轴上的投影方向相反。入射波和反射波波矢量的幅度相等是由于它们遵循相同的色散关系

$$k_x^2 + k_z^2 = \omega^2\mu_0\epsilon_0 \tag{3.4.18}$$

将式(3.4.15)代入亥姆霍兹波动方程(3.4.11)可以很容易得到这一关系。

在区域 t 中只存在透射波(见图 3.4-6)。TE 波的解具有下面的形式

$$E_{ty} = TE_0 e^{-ik_{tz}z + ik_x x} \tag{3.4.19}$$

$$H_{tx} = \frac{k_{tz}}{\omega\mu_t} TE_0 e^{-ik_{tz}z + ik_x x} \tag{3.4.20}$$

$$H_{tz} = \frac{k_x}{\omega\mu_t} TE_0 e^{-ik_{tz}z + ik_x x} \tag{3.4.21}$$

式中，T 表示电场的透射系数。同样，这组方程也满足式(3.4.9)～(3.4.11)和区域 t 中介质的色散关系

$$k_x^2 + k_{tz}^2 = \omega^2\mu_t\epsilon_t \tag{3.4.22}$$

由于相位匹配条件的要求，透射波矢量 $\boldsymbol{k}_t$ 的 x 分量等于入射波和反射波矢量的 x 分量。

令介质边界为 $z=0$ 的平面，在该边界上 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量连续。可以得到

$$R + 1 = T \tag{3.4.23}$$

$$\frac{k_z}{\mu_0}(R - 1) = -\frac{k_{tz}}{\mu_t}T \tag{3.4.24}$$

需要注意，这里并没有利用 $z=0$ 处 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的法向分量连续的边界条件，这是由于 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的法向分量的边界条件与关于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量的边界条件并不是独立的，就像两个高斯定律与法拉第定律和安培定律并不独立一样。在这种情况下可以看到 $\boldsymbol{B}$ 的法向分量连续的边界条件可以得到与式(3.4.23)相同的结果，而这里并没有 $\boldsymbol{D}$ 的法向分量。

从式(3.4.23)和式(3.4.24)可以很容易地确定反射系数 R 和透射系数 T，

$$R = R_{0t} = \frac{1 - p_{0t}}{1 + p_{0t}} \tag{3.4.25}$$

$$T = T_{0t} = \frac{2}{1 + p_{0t}} \tag{3.4.26}$$

对于 TE 波，式中

$$p_{0t} = \frac{\mu_0 k_{tz}}{\mu_t k_z} \tag{3.4.27}$$

对应式(3.4.27)所给的 p_{0t} 的定义，式(3.4.25)所给出的 R_{0t} 被称为在分开区域 0 和区域 t 的边界上 TE 波从区域 0 向区域 t 入射的菲涅耳反射系数。

很容易证明，当边界面不是位于 $z=0$ 处而是位于 $z=-d_0$ 处时，反射波和透射波的相位将随着边界面位置的变化面变化。反射系数 R 将增加一个相移 $2k_z d_0$，面透射系数将增加一个相移 $(k_z - k_{tz})d_0$。

对于已知的反射系数和透射系数，入射波、反射波和透射波的时间平均坡印廷矢量的计算结果为

$$\langle \boldsymbol{S}_i \rangle = \frac{1}{2}\left(-\hat{z}\frac{k_z}{\omega\mu_0} + \hat{x}\frac{k_x}{\omega\mu_0}\right)|E_0|^2 \tag{3.4.28}$$

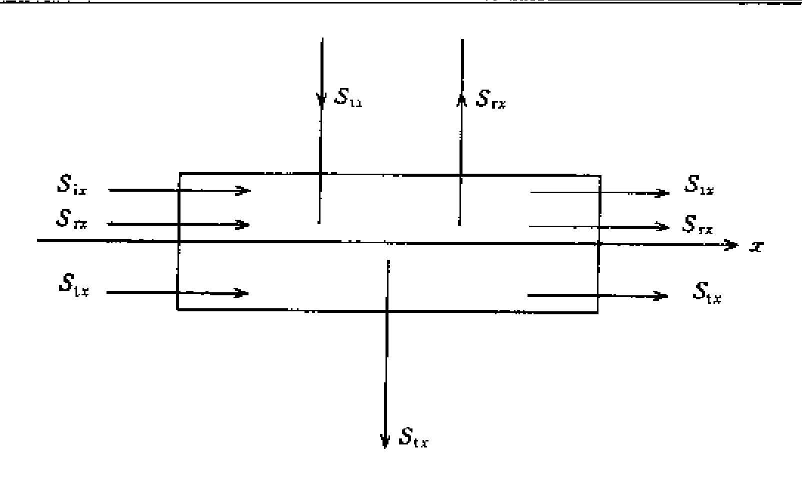


图3.4-7 平面边界的功率守恒

$$\langle \boldsymbol{S}_r \rangle = \frac{1}{2}\left(\hat{z}\frac{k_z}{\omega\mu_0} + \hat{x}\frac{k_x}{\omega\mu_0}\right)|R|^2|E_0|^2 \tag{3.4.29}$$

$$\langle \boldsymbol{S}_t \rangle = \frac{1}{2}\left(-\hat{z}\frac{k_{tz}}{\omega\mu_t} + \hat{x}\frac{k_x}{\omega\mu_t}\right)|T|^2|E_0|^2 \tag{3.4.30}$$

这里假设 k_x 和 k_{tz}都是实数。如图3.4-7所示,通过考虑一个穿越边界面的控制体积可以看到功率守恒的结果。为了得到功率守恒的结果,必须证明反射功率的法向分量与透射功率的法向分量之和等于入射功率的法向分量。现定义功率反射系数(或称为反射率)为

$$r = \frac{\hat{z}\cdot\langle \boldsymbol{S}_r \rangle}{-\hat{z}\cdot\langle \boldsymbol{S}_i \rangle} = |R|^2 \tag{3.4.31}$$

同样可以定义功率透射系数(或称为透射率)为

$$t = \frac{-\hat{z}\cdot\langle \boldsymbol{S}_t \rangle}{-\hat{z}\cdot\langle \boldsymbol{S}_i \rangle} = p_{0t}|T|^2 \tag{3.4.32}$$

由式(3.4.25)~(3.4.27)可以看到 $r+t=1$。这一结果表明了边界面上反射与透射的功率守恒。

当入射角大于临界角时,k_{tz}成为一个纯虚数。从式(3.4.19)~(3.4.21)看,并注意到在区域 t 中 z 取负值,可以将其写成 $k_{tz}=\mathrm{i}\alpha_{tz}$,其中 α_{tz}是一个正实数。在这种情况下,透射的复坡印廷矢量变成

$$\boldsymbol{S}_t = \left(\hat{z}\frac{\mathrm{i}\alpha_{tz}}{\omega\mu_t} + \hat{x}\frac{k_x}{\omega\mu_t}\right)\mathrm{e}^{2\alpha_{tz}(z+d_0)}|T|^2|E_0|^2 \tag{3.4.33}$$

由于 $\boldsymbol{S}_t$ 实部的 z 分量为0,可以看到并没有时间平均功率沿 $\hat{z}$ 方向透射进入区域 t,所以透射率 t 等于0,而反射率 r 必须等于1。这一结果可以从非涅耳反射系数得到

$$R_{0t} = \frac{1-p_{0t}}{1+p_{0t}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\phi} \tag{3.4.34}$$

对于TE波,式中

$$p_{0t} = \mathrm{i}\frac{\mu_0\alpha_{tz}}{\mu_t k_z} \tag{3.4.35}$$

$$\phi = -\arctan\frac{\mu_0\alpha_{tz}}{\mu_t k_z} \tag{3.4.36}$$

R_{0t}的幅度为1。所以沿 $\hat{z}$ 方向的时间平均入射功率全部被反射。全反射的非涅耳反射系数的相移 ϕ 被称为Goos-Hanchen相移。

TM 波的反射与透射

TM 波在平面边界上的反射和透射可以通过与 TE 波类似的处理过程进行研究，也可以利用对偶原理直接写出结果。通过进行 $\boldsymbol{E}\rightarrow\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}\rightarrow-\boldsymbol{E}$ 和 $\mu_0\rightleftharpoons\varepsilon_0$ 的替换并利用 $z=0$ 的边界面上 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量连续的边界条件，可以看出 TE 问题的对偶就是 TM 问题(图 3.4-8)。像式(3.4.25)，(3.4.26)那样，可以得到反射系数和透射系数，只是对于 TM 波需要将式(3.4.27)替换为

$$p_{0t} = \frac{\varepsilon_0 k_{tz}}{\varepsilon_t k_z} \tag{3.4.37}$$

反射率和透射率与式(3.4.31)，(3.4.32)完全相同，不同于式(3.4.36)，TM 波全内反射的 Goos-Hanchen 相移为

$$\phi = -\arctan\frac{\varepsilon_0 \alpha_{tz}}{\varepsilon_t k_z} \tag{3.4.38}$$

需要注意的是对于 TM 波，非涅耳反射系数表示的是反射磁场与入射磁场之比。

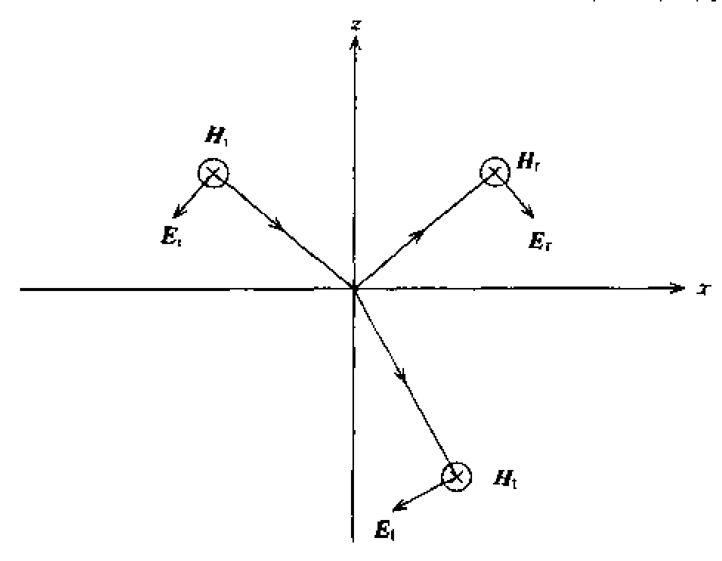


图 3.4-8 TM 波的反射和透射

在理想导体表面，可以通过令 $\varepsilon_t\rightarrow\infty$ 计算反射系数。可以发现，对于 TE 波有 $p_{0t}\rightarrow\infty$ 及 $R_{0t}\rightarrow-1$，对于 TM 波有 $p_{0t}\rightarrow0$ 及 $R_{0t}\rightarrow1$。所以在理想导体边界面上切向电场消失而切向磁场加倍以保证导体表面的感应电流。

现在讨论 $\mu_t=\mu_0$ 的非磁介质的布儒斯特角 θ_B。θ_B 是指当没有反射功率时的入射角。令 $R_{0t}=0$ 或者 $p_{0t}=1$，根据式(3.4.27)可以发现，对于 TE 波有

$$k_{tz} = k_z \tag{3.4.39}$$

对于 TM 波有

$$\varepsilon_0 k_{tz} = \varepsilon_t k_z \tag{3.4.40}$$

由于只有当两个介质具有相同的介电常数时才有 $k_{tz}=k_z$，所以对 TE 波不存在布儒斯特角。对于 TM 波，式(3.4.40)可以写成

$$k\cos\theta_t = k_t\cos\theta_B \tag{3.4.41}$$

这里利用了 $\varepsilon_0/\varepsilon_t=k^2/k_t^2$ 的事实和布儒斯特角的定义 $k_z=k\cos\theta_B$。另外，根据斯涅耳定律

$$k\sin\theta_B = k_t\sin\theta_t \tag{3.4.42}$$

消去式(3.4.41)和(3.4.42)中的 k 和 k_t,可以发现 $\sin 2\theta_B = \sin 2\theta_t$。该方程的解也是 $\theta_t = \theta_B$,即两边的介质相同,这样的结果没有什么意义。考虑到角度 θ_B 和 θ_t 都大于 0°且小于 90°,还可以得到另外一个解

$$\theta_B + \theta_t = \frac{\pi}{2} \tag{3.4.43}$$

由于反射方向垂直于透射方向,所以反射波矢量 $\boldsymbol{k}_r$ 也垂直于透射波矢量 $\boldsymbol{k}_t$(见图 3.4-9)。

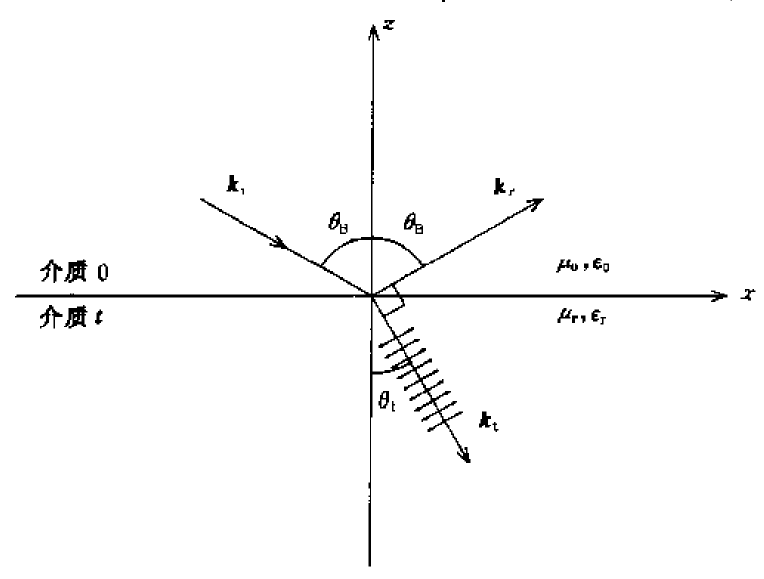


图 3.4-9　布儒斯特角入射

关于以布儒斯特角入射时无反射的物理解释,可以将介质看成是由偶极子组成的,这些偶极子被透射波激励并以相同的频率辐射。每个偶极子的辐射方向图都是在与偶极子轴向垂直的方向上取得最大值,而在沿着偶极子的轴向方向上辐射为 0。对于 TM 波激励,所有偶极子的振荡都平行于沿电力线方向的入射平面。当 TM 波以布儒斯特角入射时,反射波矢量 $\boldsymbol{k}_r$ 与透射介质中偶极子振荡的方向一致,所以没有 TM 波被反射。

将式(3.4.43)代入(3.4.42),可以得到布儒斯特角为

$$\theta_B = \arctan\frac{k_t}{k} = \arctan\sqrt{\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_0}} \tag{3.4.44}$$

在图 3.4-10 中,绘出了反射率随入射角变化的曲线。通常情况下,在一个固体介质边界上 TE 波的反射比 TM 波的反射强。当非极化波以布儒斯特角入射到各向同性介质时,反射波将变成垂直于入射平面的线极化波。所以布儒斯特角也被称为极化角。

波阻抗和传输线等效

利用式(3.4.19)和(3.4.20)的比值可以定义透射区域中的波阻抗 $Z(z)$为

$$Z_t = \frac{E_{ty}}{H_{tx}} = \frac{\omega\mu_t}{k_{tz}} \tag{3.4.45}$$

对于正透射有 $k_{tz} = \omega(\mu_t\varepsilon_t)^{1/2}$,所以波阻抗简化为介质 t 的特性阻抗 $Z_t = (\mu_t/\varepsilon_t)^{1/2}$。当入射角大于临界角 θ_c 时,Z_t 是纯虚数。

区域 0 中的波阻抗可以用式(3.4.15)与(3.4.16)的比值定义,即

$$Z(z) = \frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu_0}{k_z}\frac{1 + R\mathrm{e}^{i2k_z z}}{1 - R\mathrm{e}^{i2k_z z}}$$

当区域 t 为理想导体时,$R=-1$。可以看到,当 $2k_z z$ 从 0 变到 2π 时,波阻抗将重复它在 $z=0$ 处的值。这一结果也与 z 方向上场的幅度的周期变化有关。从式(3.4.15)有

$$E_y = E_0 e^{ik_x x - ik_z z}(1 + Re^{i2k_z z})$$

括号中部分将随着 $2k_z z$ 以 2π 为间隔的变化而周期重复,利用第 2.5 节中的传输线理论可以对这一现象给出很好的解释。图 3.4-11 给出了式(3.4.15)和(3.4.16)的传输线模型,其中 Z_t 是区域 t 的波阻抗。

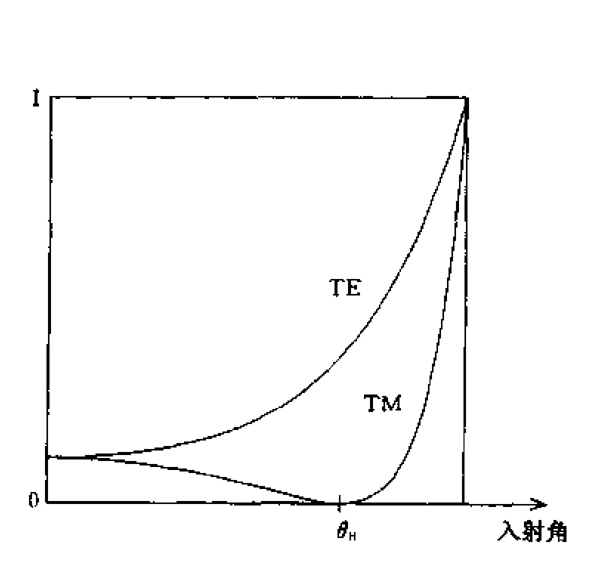


图 3.4-10 TE 波与 TM 波的反射率

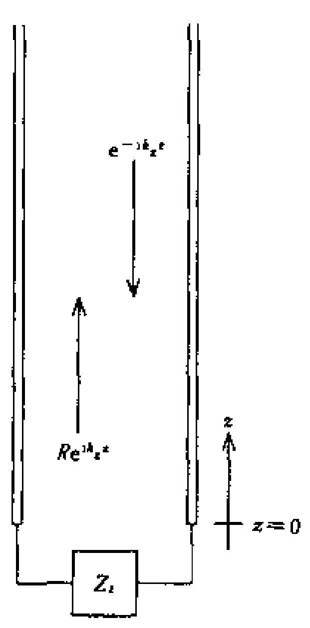


图 3.4-11 传输线模型

3.4.3 分层介质的反射和透射

如图 3.4-12 所示,考虑一平面波入射到边界位于 $z=-d_0,-d_1,\cdots,-d_n$ 处的分层介质。第$(n+1)$层的介质区域为半无限大区域并记作区域 t,$t=n+1$。每一层介质的介电常数和磁导率分别记作 ε_l 和 μ_l。平面波从区域 0 入射,入射平面平行于 x-z 平面。所有的场矢量都只随 x 和 z 坐标变化而与 y 无关。由于$\partial/\partial y=0$,所以在任意的介质层(区域 l)中,麦克斯韦方程可以分成 TE 分量和 TM 分量,这两个分量分别决定于 E_{ly}和 H_{ly}。可以得到

$$H_{lx} = -\frac{1}{i\omega\mu_l}\frac{\partial}{\partial z}E_{ly} \tag{3.4.46}$$

$$H_{lz} = -\frac{1}{i\omega\mu_l}\frac{\partial}{\partial x}E_{ly} \tag{3.4.47}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2\mu_l\varepsilon_l\right)E_{ly} = 0 \tag{3.4.48}$$

$$E_{lx} = \frac{1}{i\omega\varepsilon_l}\frac{\partial}{\partial z}H_{ly} \tag{3.4.49}$$

$$E_{lz} = -\frac{1}{i\omega\varepsilon_l}\frac{\partial}{\partial x}H_{ly} \tag{3.4.50}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2\mu_l\varepsilon_l\right)H_{ly} = 0 \tag{3.4.51}$$

TE 波完全决定于方程(3.4.46)~(3.4.48),TM 波完全决定于方程(3.4.49)~(3.4.51)。这两组方程通过 $\boldsymbol{E}_l\to\boldsymbol{H}_l$,$\boldsymbol{H}_l\to-\boldsymbol{E}_l$ 和 $\mu_l\rightleftharpoons\varepsilon_l$ 的替换关系相互对偶。

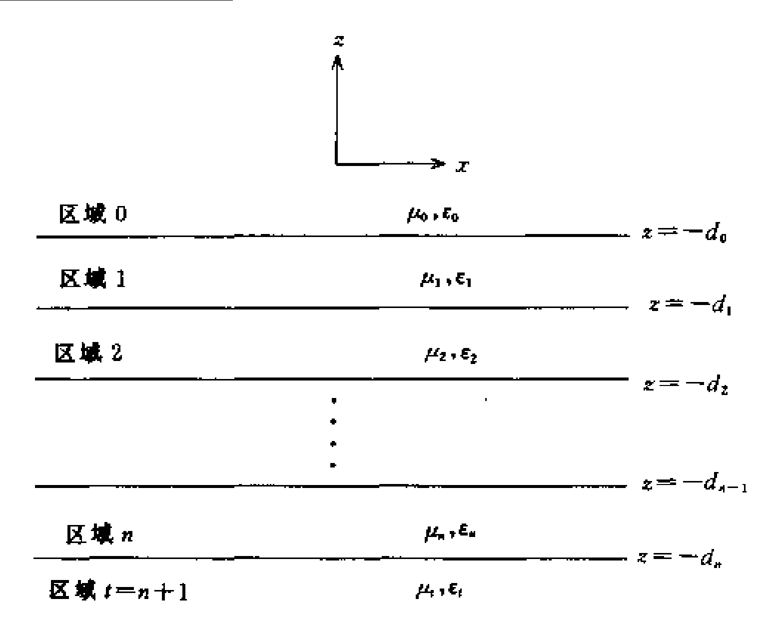


图 3.4-12 分层介质

如果 TE 平面波 $E_y = E_0 e^{-ik_z z + ik_x x}$ 入射到分层介质上，第 l 层介质中的总场可以表示为

$$E_{ly} = (A_l e^{ik_{lz} z} + B_l e^{-ik_{lz} z}) e^{ik_x x} \tag{3.4.52}$$

$$H_{lx} = -\frac{k_{lz}}{\omega\mu_l}(A_l e^{ik_{lz} z} - B_l e^{-ik_{lz} z}) e^{ik_x x} \tag{3.4.53}$$

$$H_{lz} = \frac{k_x}{\omega\mu_l}(A_l e^{ik_{lz} z} + B_l e^{-ik_{lz} z}) e^{ik_x x} \tag{3.4.54}$$

显然式(3.4.52)满足亥姆霍兹波动方程(3.4.48)。将式(3.4.52)代入式(3.4.48)可以得到色散关系

$$k_x^2 + k_{lz}^2 = \omega^2 \mu \epsilon_l \tag{3.4.55}$$

考虑到相位匹配条件的结果，在上面的推导和表示中对 $\boldsymbol{k}$ 矢量的 x 分量没有注明下标 l。实际上，在每一个介质层 l 中都存在多次反射和透射。所以幅度 A_l 表示所有的具有 $\hat{z}$ 方向传播速度分量的波分量，而 B_l 则表示所有的具有 $-\hat{z}$ 方向传播速度分量的波分量。

在区域 0 中，记 $l=0$，则

$$A_0 = RE_0 \tag{3.4.56}$$

$$B_0 = E_0 \tag{3.4.57}$$

在区域 t 中，$l = n+1 = t$，可以得到

$$A_t = 0 \tag{3.4.58}$$

$$B_t = TE_0 \tag{3.4.59}$$

由于区域 t 为半无限空间，而且其中不存在具有沿 $+\hat{z}$ 方向速度分量传播的波，可把透射幅度记作 T。

区域 l 中波的幅度 A_l 和 B_l 与相邻区域中波的幅度的关系满足边界条件。在 $z=-d_l$ 处，边界条件要求 E_y 和 H_x 连续，即

$$A_l e^{-ik_{lz} d_l} + B_l e^{ik_{lz} d_l} = A_{l+1} e^{-ik_{(l+1)z} d_l} + B_{l+1} e^{ik_{(l+1)z} d_l} \tag{3.4.60}$$

$$\frac{k_{lz}}{\mu_l}(A_l e^{-ik_{lz} d_l} - B_l e^{ik_{lz} d_l}) = \frac{k_{(l+1)z}}{\mu_{l+1}}[A_{l+1} e^{-ik_{(l+1)z} d_l} - B_{l+1} e^{ik_{(l+1)z} d_l}] \tag{3.4.61}$$

图 3.4-12 所示的分层介质模型有 $n+1$ 个边界,决定 $(2n+2)$ 个边界方程。在区域 0 中的未知量为反射系数 R,在区域 t 中的未知量为透射系数 T。在其他区域 $l=1,2,\cdots,n$ 中,每层有两个未知量 A_l 和 B_l,所以总的未知量的数目为 $(2n+2)$。为了从 $(2n+2)$ 个边界方程中求解 $(2n+2)$ 个未知量,可以将边界方程写成矩阵形式,其中 $(2n+2)$ 个未知量构成一个 $(2n+2)$ 阶的列向量,系数构成一个 $(2n+2)\times(2n+2)$ 阶的方阵。方程的解可以通过对矩阵的求逆获得。这个求解过程是一个直接的方法但也是一个冗长的方法。这里将给出一个简单的方法处理这个问题。

反射系数

由于需要求得分层介质的反射系数,这里将推导反射系数 R 的闭式表达。通过求解方程 (3.4.60) 和 (3.4.61) 可以得到 A_l 和 B_l

$$A_l e^{-ik_{lz}d_l} = \frac{1}{2}[1+p_{l(l+1)}][A_{l+1}e^{-ik_{(l+1)z}d_l} + R_{l(l+1)}B_{l+1}B_{l+1}e^{ik_{(l+1)z}d_l}] \tag{3.4.62}$$

$$B_l e^{ik_{lz}d_l} = \frac{1}{2}[1+p_{l(l+1)}][R_{l(l+1)}A_{l+1}e^{-ik_{(l+1)z}d_l} + B_{l+1}e^{ik_{(l+1)z}d_l}] \tag{3.4.63}$$

式中

$$p_{l(l+1)} = \frac{\mu_l k_{(l+1)z}}{\mu_{l+1}k_{lz}} \tag{3.4.64}$$

对于 TE 波,

$$R_{l(l+1)} = \frac{1-p_{l(l+1)}}{1+p_{l(l+1)}} \tag{3.4.65}$$

这是在区域 l 和区域 $l+1$ 的边界上引起的区域 l 中波的反射系数。从式(3.4.64)可以注意到

$$p_{(l+1)l} = \frac{1}{p_{l(l+1)}} \tag{3.4.66}$$

所以区域 $l+1$ 和区域 l 的边界引起的区域 $l+1$ 中的反射系数

$$R_{(l+1)l} = -R_{l(l+1)} \tag{3.4.67}$$

取式(3.4.62)与(3.4.63)的比值可以得到

$$\begin{aligned}\frac{A_l}{B_l} &= \frac{e^{i2k_{lz}d_l}}{R_{l(l+1)}} + \frac{[1-(1/R_{l(l+1)}^2)]e^{i2(k_{(l+1)z}+k_{lz})d_l}}{[1/R_{l(l+1)}]e^{i2k_{(l+1)z}d_l} + (A_{l+1}/B_{l+1})} \\ &= \frac{e^{i2k_{lz}d_l}}{R_{l(l+1)}} + \frac{[1-(1/R_{l(l+1)}^2)]e^{i2(k_{(l+1)z}+k_{lz})d_l}}{[1/R_{l(l+1)}]e^{i2k_{(l+1)z}d_l} +}\,\frac{A_{l+1}}{B_{l+1}}\end{aligned} \tag{3.4.68}$$

根据上式的第二个等式,可以用连分式表示。方程(3.4.68)给出了用 $\frac{A_{l+1}}{B_{l+1}}$ 表示 $\frac{A_l}{B_l}$ 的递推表达式,可以一直到透射区域 t,其中有 $\frac{A_t}{B_t}=0$。

分层介质的反射系数为 $R=A_0/B_0$。根据上述连分式表示,可以得到

$$\begin{aligned}R = {} & \frac{e^{i2k_{0z}d_0}}{R_{01}} + \frac{[1-(1/R_{01}^2)]e^{i2(k_{1z}+k_{0z})d_0}}{(1/R_{01})e^{i2k_{1z}d_0} +}\,\frac{e^{i2k_{1z}d_1}}{R_{12}} + \\ & \frac{[1-(1/R_{12}^2)]e^{i2(k_{2z}+k_{1z})d_1}}{(1/R_{12})e^{i2k_{2z}d_1} +} \cdots + \frac{e^{i2k_{(n-1)z}d_{(n-1)}}}{R_{(n-1)n}} + \\ & \frac{[1-(1/R_{(n-1)n}^2)]e^{i2(k_{nz}+k_{(n-1)z})d_{(n-1)}}}{[1/R_{(n-1)n}]e^{i2k_{nz}d_{(n-1)}} +}\, R_{nt}e^{i2k_{nz}d_n}\end{aligned} \tag{3.4.69}$$

上式是反射系数连续分式形式的解析解，这一形式可非常方便地进行编程和数值计算。

对于 TM 波，分层介质的反射满足对偶原理，所得到的反射系数 R 的结果与式(3.4.69)相同，只是相应于式(3.4.64)的表示变成

$$p_{l(l+1)} = \frac{\epsilon_l k_{(l+1)z}}{\epsilon_{l+1} k_{lz}} \tag{3.4.70}$$

所以对于式(3.4.65)所定义的反射系数，我们将用式(3.4.70)替换式(3.4.64)。

对于给定任意层数的分层介质(层数定义为 t，即边界的数目)，反射系数可以通过式(3.4.69)所给出的递推关系，从最后一层一直递推到 l 层，其中 $R_{l(l+1)} = 0$。例如，对于双层介质的情况，$t = 2, n = 1$，由式(3.4.69)并令 $k_{0z} = k_z$，可以得到

$$\begin{aligned} R &= \frac{e^{i2k_z d_0}}{R_{01}} + \frac{[1 - (1/R_{01}^2)]e^{i2(k_{1z}+k_z)d_0}}{(1/R_{01})e^{i2k_{1z}d_0} + R_{12}e^{i2k_{1z}d_1}} \\ &= \frac{R_{01} + R_{12}e^{i2k_{1z}(d_1 - d_0)}}{1 + R_{01}R_{12}e^{i2k_{1z}(d_1 - d_0)}}e^{i2k_z d_0} \end{aligned} \tag{3.4.71}$$

注意，当 $R_{01} = \pm 1$ 时，式(3.4.69)中的反射系数将具有单位幅度，并且与 $z = -d_0$ 之下的分层介质的参数无关。在这种情况下，$|R_{01}| = 1$，可以表示理想导电涂层的介质。

从式(3.4.52)～(3.4.54)，可以看到 A_l/B_l 是沿 $+\hat{z}$ 方向传播的波的幅度与沿 $-\hat{z}$ 方向传播的波的幅度之比。

定义一个与空间位置有关的复反射系数 $\Gamma_l(z)$ 满足

$$\Gamma_l(z) = \frac{A_l}{B_l}e^{i2k_{lz}z}$$

如图(3.4-13)所示，在复 $\Gamma_l(z)$ 平面上，当相位 $\phi = 2k_{lz}z$ 随 z 增加时，$\Gamma_l(z)$ 逆时针方向转动。当 k_{lz} 是复数时，$\Gamma_l(z)$ 随着 z 的增加而减小。

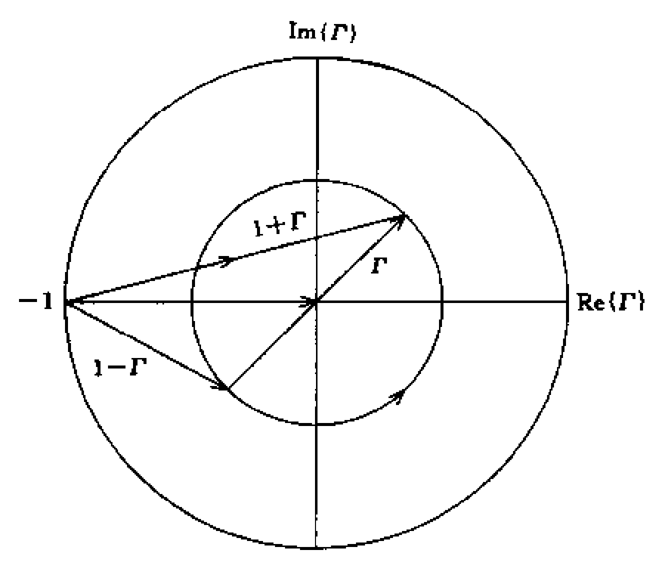


图 3.4-13　复 Γ 平面

在 $-\hat{z}$ 方向上，可以定义波阻抗 $Z_l(z)$

$$Z_{lz}(z) = \frac{E_{ly}}{H_{lx}} = \frac{\omega\mu_l}{k_{lz}}\frac{1 + \Gamma_l(z)}{1 - \Gamma_l(z)}$$

是复数。对于没有任何介质的自由空间中平面波的传播，沿着波的传播方向，波阻抗为

$$\eta = \omega\mu_o/k = (\mu_o/\epsilon_o)^{1/2} \approx 377\Omega$$

根据复数波阻抗定义，取式(3.4.60)与(3.4.61)之比，可得到 $Z_{lz}(z=-d_l)=Z_{(l+1)z}(z=-d_l)$。所以在每个界面上，边界两边的波阻抗是连续的。

在复 Γ 平面上，$Z_{lz}(z)$可以解释为如图 3.4-13 所示的两个长度的比值。当 Γ_l 为正实数时，$Z_{lz}(z)$取得最大值。定义无量纲的相对波阻抗为

$$z_l=\frac{Z_{lz}}{\omega\mu_l/k_{lz}}=\frac{1+\Gamma_l}{1-\Gamma_l}$$

对于所有可能的 $\Gamma_l(z)$的复数取值，可以给出相应的 $z_l(z)$到复 $\Gamma_l(z)$平面的映射，其结果就是在传输线研究中常常要用的 Smith 圆图。

为了说明波阻抗概念的用途，考虑一个由 $2N+2$ 层各向同性介质构成的分层介质(对应 $2N+2$ 个边界)，具有高低交替变化的介电常数 ε_h 和 ε_l，介质的第 $1,3,5,\cdots,2N+1$ 层为高介电常数层，介质的第 $2,4,6,\cdots,2N+2$ 层为低介电常数层。区域 0 的介电常数和磁导率为 ε 和 μ。每一介质层的厚度都等于该层介质中波长的 1/4。透射区域为第 $2N+2=t$ 层，其中的介电常数为 ε_t。所有介质层的磁导率都是 μ(见图 3.4-14)。

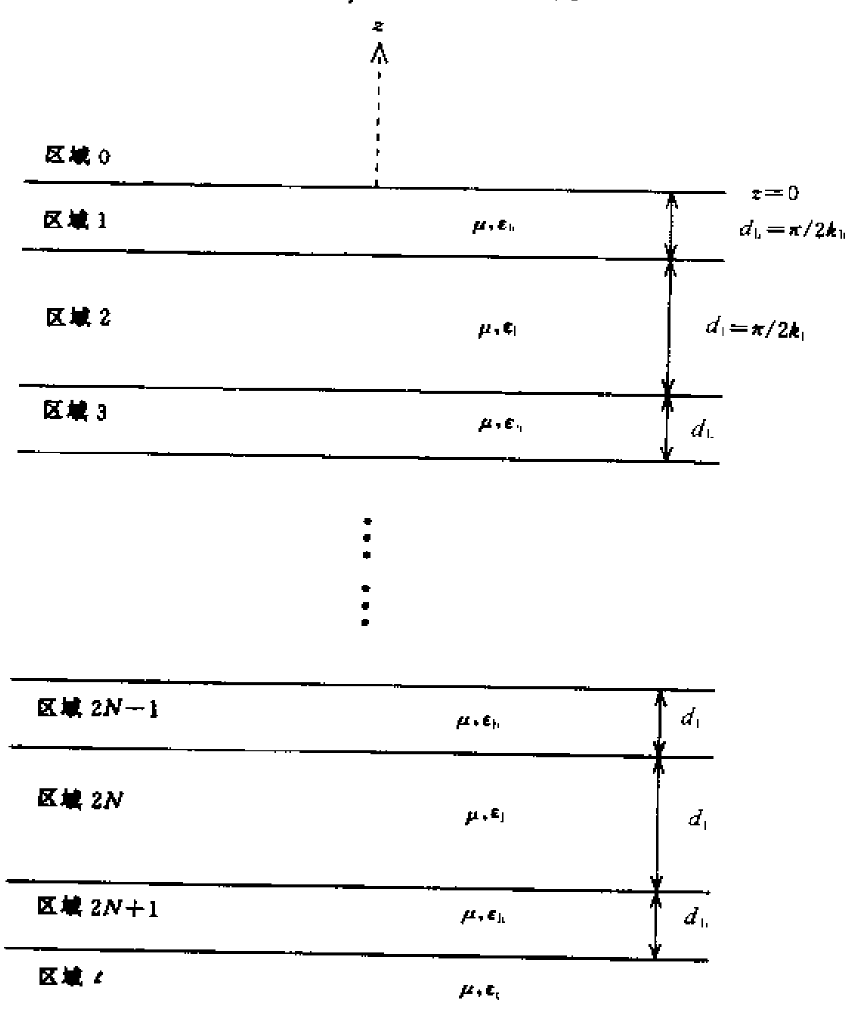


图 3.4-14 介电常数高低交替变化的分层介质

考虑波正投射到分层介质上，对于所有的介质层有 $k_x=0, k_{lz}=\omega\sqrt{\mu\varepsilon_l}$。由于透射区域没有反射，所以其中的波阻抗为 $Z_t=(\mu/\varepsilon_t)^{1/2}$。由于边界两侧波阻抗连续，在第 $2N+1$ 层介质与透射层 t 之间的边界上的波阻抗为 $Z_{2N+1}=(\mu/\varepsilon_t)^{1/2}$。相应的相对波阻抗为 $z_{2N+1}=(\mu/\varepsilon_t)^{1/2}/(\mu/\varepsilon_h)^{1/2}=(\varepsilon_h/\varepsilon_t)^{1/2}$。利用史密斯圆图的概念并注意到结构的周期性，可以确定 z

$=0$ 处的波阻抗为

$$Z_0 = \left(\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_h}\right)^{1/2}\left(\frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_h}\right)^N\left(\frac{\mu}{\varepsilon_h}\right)^{1/2}$$

$z=0$ 处的反射系数 R 为

$$R_0 = \frac{Z_0/(\mu/\varepsilon)^{1/2} - 1}{Z_0/(\mu/\varepsilon)^{1/2} + 1} = \frac{\left(\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_h}\right)^{1/2}\left(\frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_h}\right)^N\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_h}\right)^{1/2} - 1}{\left(\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_h}\right)^{1/2}\left(\frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_h}\right)^N\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_h}\right)^{1/2} + 1}$$

可以看到,当 $\varepsilon_h/\varepsilon_l$ 的比值很大并且介质的层数很多时,反射系数 R_0 趋近于 -1,具有上述结构的分层介质具有强反射。这样的结构在光学中有很好的应用,它可以克服金属反射面容易锈蚀和氧化的缺点。

传输矩阵和透射系数

对于平面波人射到分层介质的情况,已经得到每个界面 $z=-d_l$ 处切向电场和磁场连续的边界条件,这一边界条件通过两个方程(3.4.60)和(3.4.61)联系区域 l 和区域 $l+1$ 中的波幅度

$$A_{l+1}e^{-ik_{(l+1)z}d_l} + B_{l+1}e^{ik_{(l+1)z}d_l} = A_l e^{-ik_{lz}d_l} + B_l e^{ik_{lz}d_l} \tag{3.4.72}$$

$$A_{l+1}e^{-ik_{(l+1)z}d_l} - B_{l+1}e^{ik_{(l+1)z}d_l} = p_{(l+1)l}(A_l e^{-ik_{lz}d_l} - B_l e^{ik_{lz}d_l}) \tag{3.4.73}$$

对于 TE 波,式中

$$p_{(l+1)l} = \frac{\mu_{l+1}k_{lz}}{\mu_l k_{(l+1)z}} \tag{3.4.74}$$

对于 TM 波,式中

$$p_{(l+1)l} = \frac{\varepsilon_{l+1}k_{lz}}{\varepsilon_l k_{(l+1)z}} \tag{3.4.75}$$

注意到

$$p_{(l+1)l} = \frac{1}{p_{l(l+1)}} \tag{3.4.76}$$

式(3.4.74)与(3.4.75)满足对偶关系,但必须记住,对于 TE 波,A_l 和 B_l 表示切向电场的幅度;对于 TM 波,A_l 和 B_l 则表示切向磁场的幅度。在上一节中,根据$(2n+2)$个边界条件确定反射系数 $R=A_0/B_0$,这里将要证明透射系数 $T=A_t/B_0$ 可以利用传输矩阵求得。

求解方程(3.4.72)、(3.4.73)可以得到 A_{l+1}和 B_{l+1}用 A_l 和 B_l 表示的形式

$$A_{l+1}e^{-ik_{(l+1)z}d_l} = \frac{1}{2}[1 + p_{(l+1)l}][A_l e^{-ik_{lz}d_l} + R_{(l+1)l}B_l e^{ik_{lz}d_l}]$$

$$B_{l+1}e^{ik_{(l+1)z}d_l} = \frac{1}{2}[1 + p_{(l+1)l}][R_{(l+1)l}A_l e^{-ik_{lz}d_l} + B_l e^{ik_{lz}d_l}]$$

将其表示成矩阵相乘的形式可以得到

$$\begin{bmatrix} A_{l+1}e^{-ik_{(l+1)z}d_{l+1}} \\ B_{l+1}e^{ik_{(l+1)z}d_{l+1}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{V}_{(l+1)l}\cdot\begin{bmatrix} A_l e^{-ik_{lz}d_l} \\ B_l e^{ik_{lz}d_l} \end{bmatrix} \tag{3.4.77}$$

其中,

$$\boldsymbol{V}_{(l+1)l} = \frac{1}{2}[1 + p_{(l+1)l}]\begin{bmatrix} e^{-ik_{(l+1)z}(d_{l+1}-d_l)} & R_{(l+1)l}e^{-ik_{(l+1)z}(d_{l+1}-d_l)} \\ R_{(l+1)l}e^{ik_{(l+1)z}(d_{l+1}-d_l)} & e^{ik_{(l+1)z}(d_{l+1}-d_l)} \end{bmatrix} \tag{3.4.78}$$

被称为前向传输矩阵。在式(3.4.78)中

$$R_{(l+1)l}=\frac{1-p_{(l+1)l}}{1+p_{(l+1)l}}=-R_{l(l+1)}$$

为分开区域 $l+1$ 和区域 l 边界上的反射系数,其中的第一个下标表示入射波所在的区域。需要注意的是第 n 层介质与透射区域 $t=n+1$ 之间的边界上的前向传输矩阵满足

$$\begin{pmatrix}0\\T\end{pmatrix}=\boldsymbol{V}_{tn}\cdot\begin{pmatrix}A_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{nz}d_n}\\B_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{nz}d_n}\end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{V}_{tn}=\frac{1}{2}(1+p_{tn})\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{tz}d_n} & R_{tn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{tz}d_n}\\R_{tn}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{tz}d_n} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{tz}d_n}\end{bmatrix}$$

通过相同的推导过程,也可以根据式(3.4.62)和(3.4.63)得到 A_l 和 B_l 用 A_{l+1} 和 B_{l+1} 表示的形式,并定义后向传输矩阵。

利用传输矩阵可以根据其他区域中的波的幅度确定任意一个区域中的波的幅度。对于 $m>l$,利用前向传输矩阵可以得到

$$\begin{bmatrix}A_m\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{mz}d_m}\\B_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{mz}d_m}\end{bmatrix}=\boldsymbol{V}_{m(m-1)}\cdot\boldsymbol{V}_{(m-1)(m-2)}\cdots\boldsymbol{V}_{(l+1)l}\cdot\begin{bmatrix}A_l\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{lz}d_l}\\B_l\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{lz}d_l}\end{bmatrix}$$

类似地,也可以利用后向传输矩阵得到用 $l>j$ 的区域 l 中的波的幅度表示任意区域 j 中波的幅度的表达式。

特别重要的是,一个 $t=h+1$ 层的分层介质的透射系数 $T=B_t/B_0$ 可以通过 $n+1$ 个传输矩阵的相乘计算。利用前向传输矩阵可以得到

$$\begin{bmatrix}0\\B_0\end{bmatrix}=\boldsymbol{V}_{t0}\cdot\begin{bmatrix}R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_zd_0}\\\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_zd_0}\end{bmatrix}$$

式中

$$\boldsymbol{V}_{t0}=\boldsymbol{V}_{tn}\cdot\boldsymbol{V}_{n(n-1)}\cdots\boldsymbol{V}_{10}$$

包括了分层介质的全部信息。如果求得 $\boldsymbol{V}_{t0}$,则反射系数和透射系数都可以通过矩阵元素求得。

举一个例子,计算单层(半空间)介质的透射系数。根据式(3.4.78)并令 $d_0=0$,则有

$$\begin{bmatrix}0\\T\end{bmatrix}=\frac{1}{2}(1+p_{t0})\begin{bmatrix}1 & R_{t0}\\R_{t0} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R_{0t}\\1\end{bmatrix}$$

可以得到

$$T=\frac{1}{2}(1+p_{t0})(1-R_{0t}^2)=\frac{2}{1+p_{0t}}\tag{3.4.79}$$

这里用到了 $p_{t0}=1/p_{0t}, R_{t0}=-R_{0t}$ 的结果。对于 TE 波和 TM 波,上述反射系数和透射系数的含义已经在上一节中进行了讨论。

对于双层介质,如果 $d_0=0$,可以根据下式得到透射系数

$$\begin{bmatrix}0\\T\end{bmatrix}=\frac{1}{4}(1+p_{t1})(1+p_{10})\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{tz}d_1} & R_{t1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{tz}d_1}\\R_{t1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{tz}d_1} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{tz}d_1}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{1z}d_1} & R_{10}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{1z}d_1}\\R_{10}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1z}d_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1z}d_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R\\1\end{bmatrix}$$

进一步可以得到

$$T = \frac{1}{4}(1+p_{10})(1+p_{1t})\frac{(1-R_{01}^2)(1-R_{1t}^2)}{1+R_{01}R_{1t}e^{i2k_{1z}d_1}}e^{i(k_{1z}-k_{tz})d_1}$$
$$= \frac{4e^{i(k_{1z}-k_{tz})d_1}}{(1+p_{01})(1+p_{1t})(1+R_{01}R_{1t}e^{i2k_{1z}d_1})} \tag{3.4.80}$$

根据式(3.4.31)和(3.4.32)给出的定义,可以得到双层介质的反射率和透射率,其分别为

$$r = |R|^2$$
$$t = p_{0t}|T|^2$$

根据式(3.4.71)和(3.4.80)所给的反射系数 R 和透射系数 T 的表达式,容易证明 $r+t=1$。

作为另外一个例子,要利用前向传输矩阵公式,确定图 3.4-14 所示的有 $2N+2$ 层各向同性介质构成的分层介质的反射系数和透射系数,这 $2N+2$ 层介质的介电常数是高低交替变化的周期结构,高介电常数和低介电常数分别为 ϵ_h 和 ϵ_l。每层介质的厚度都等于该层介质中波长的 1/4。透射区域是第 $t=2N+2$ 层,该层介质的介电常数为 ϵ_t。考虑正投射的情况,$k_x=0$。我们已经用阻抗逼近模型计算了该分层介质的反射系数 R。利用前向传输矩阵公式可以得到

$$\begin{bmatrix}0\\T\end{bmatrix} = \boldsymbol{V}_{th}\cdot(\boldsymbol{V}_{hl}\cdot\boldsymbol{V}_{lh})^N\cdot\boldsymbol{V}_{h0}\cdot\begin{bmatrix}R\\1\end{bmatrix}$$

由于在区域 $m+1$ 中,$k_{(m+1)z}=k_{m+1}$,$(d_{m+1}-d_m)=\lambda/4$,有 $k_{(m+1)z}(d_{m+1}-d_m)=\pi/2$。可以注意到另外一个事实 $\mu_{m+1}k_{mz}/\mu_m k_{(m+1)z}=(\epsilon_m/\epsilon_{m+1})^{1/2}$。在这种情况下,前向传输矩阵变为

$$\boldsymbol{V}_{h0} = -\frac{i}{2}\begin{bmatrix}1+\sqrt{\epsilon/\epsilon_h} & 1-\sqrt{\epsilon/\epsilon_h}\\ -1+\sqrt{\epsilon/\epsilon_h} & -1-\sqrt{\epsilon/\epsilon_h}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V}_{hl}\cdot\boldsymbol{V}_{lh} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{\epsilon_l/\epsilon_h}+\sqrt{\epsilon_h/\epsilon_l} & \sqrt{\epsilon_l/\epsilon_h}-\sqrt{\epsilon_h/\epsilon_l}\\ \sqrt{\epsilon_l/\epsilon_h}-\sqrt{\epsilon_h/\epsilon_l} & \sqrt{\epsilon_l/\epsilon_h}+\sqrt{\epsilon_h/\epsilon_l}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V}_{th} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}(1+\sqrt{\epsilon_h/\epsilon_t})e^{ik_td} & (1-\sqrt{\epsilon_h/\epsilon_t})e^{ik_td}\\ (1-\sqrt{\epsilon_h/\epsilon_t})e^{-ik_td} & (1+\sqrt{\epsilon_h/\epsilon_t})e^{-ik_td}\end{bmatrix}$$

式中 d 是周期结构分层介质的总厚度。$(\boldsymbol{V}_{hl}\cdot\boldsymbol{V}_{lh})^N$ 可以用下面的矩阵恒等式进行计算

$$\begin{bmatrix}a+b & a-b\\ a-b & a+b\end{bmatrix}^N = 2^{N-1}\begin{bmatrix}a^N+b^N & a^N-b^N\\ a^N-b^N & a^N+b^N\end{bmatrix}$$

进一步推导可以得到

$$R = \frac{(\epsilon_l/\epsilon_h)^N-\sqrt{\epsilon_h^2/\epsilon\epsilon_t}}{(\epsilon_l/\epsilon_h)^N+\sqrt{\epsilon_h^2/\epsilon\epsilon_t}}$$

及

$$T = \frac{2i(-1)^N(\epsilon/\epsilon_t)^{1/2}e^{-ik_td}}{\sqrt{\epsilon/\epsilon_h}(\epsilon_l/\epsilon_h)^{N/2}+\sqrt{\epsilon_h/\epsilon_t}(\epsilon_h/\epsilon_l)^{N/2}}$$

根据式(3.4.31)和(3.4.32)可以得到反射率为 $r=|R|^2$,透射率为 $t=(\epsilon_t/\epsilon)^{1/2}|T|^2$。同样可以证明 $r+t=1$。值得注意的是,虽然对于正投射的情况 TE 波和 TM 波都变成 TEM 波,由于 R 和 T 是电场矢量的反射系数和透射系数,所以必须利用 $p_{0t}=k_{tz}/k_z=(\epsilon_t/\epsilon)^{1/2}$。

习题

3.4.1　对于高导电率的泥土,假定 $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$,其中 σ 是泥土的导电率。考虑 TM 波入射到泥土表面的边

界上。

(1) 对于 $R^{TM}\neq 0$ 写出电场和磁场分量，然后令 $R^{TM}=0$。证明

$$k_z = k_{zR} + \mathrm{i}k_{zI} = \frac{\omega\epsilon}{\sigma}\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}(1-\mathrm{i})$$

该波矢量向着表面传播并随着离开表面而衰减，这种波被称为 Zenneck 波，Zenneck 波是否为快波？快波是指 $\mathrm{Re}\{k_x\} < k$ 的情况。

(2) 定义表面阻抗

$$R_s - \mathrm{i}X_s = k_z - \omega\epsilon$$

求 R_s 和 X_s。

(3) $R_s = 0$ 时的表面被称为感性表面，写出 $R^{TM}=0$ 时的磁场矢量 $\boldsymbol{H}$ 的表达式。

3.4.2 电离层的扩展范围从地球表面50km 到几个地球半径(平均地球半径大约为 6371km)，电离层电离度最大的高度约为 300km。为了简化起见，假定电离层是由厚度为 40km 的 E 层和厚度为 200km 的 F 层构成的分层介质，其中 E 层在 F 层的下方，E 层的电子密度为 $N=10^{11}\mathrm{m}^{-3}$，F 层的电子密度为 $N=6\times10^{11}\mathrm{m}^{-3}$。

(1) E 层和 F 层的等离子体频率分别是多少？

(2) 考虑一频率为 10MHz 的平面波以角度 θ 从 E 层下方向电离层投射，求波在等离子体 E 层中的传播角度 θ_1。

(3)令 $\theta=30°$，当频率低于多少时入射波将完全被 E 层反射？当频率低于多少时将完全被 F 层反射？

3.4.3 自由空间的平面波以角度 θ 入射到一个导电半空间。当 $\sigma/\omega\epsilon_0$ 很大时，通过计算 $\theta_t = \arctan(k_x/k_{zR})$，证明透射波几乎垂直于边界表面。

3.4.4 令一平面波从一负单轴介质的内部入射到平面边界上。考虑光轴垂直于入射平面的特殊情况。求入射角 θ 的范围，在该范围内只有寻常波分量在介质内被全反射，而投射波全部为非常波。

3.4.5 当入射波矢量 $\boldsymbol{k}$ 垂直于一个平面边界时，TE 波和 TM 波都将变成 TEM 波。比较垂直入射时 TE 波和 TM 波的反射系数和透射系数。TE 波和 TM 波的反射系数与透射系数是否都简化为相同的结果。如果不是，为什么？垂直入射时 TE 波与 TM 波的反射率和透射率是否可以简化为相同的结果。

3.4.6 证明 TM 波和 TE 波从折射系数为 n 的介质材料上全反射时相对相位变化的差值为

$$\Delta = \phi_{TE} - \phi_{TM} = 2\arctan\left[\frac{\cos\theta(\sqrt{\sin^2\theta - n^{-2}})}{\sin^2\theta}\right]$$

利用内部反射引起的相位差可以将线极化波转化为圆极化波。图 3.4-15 是菲涅耳所给出的一种方案。在该方案中的关键元件是一个顶角为 α 的菱形玻璃棱镜，棱镜的折射率为 n。线极化波垂直入射到棱镜的一个面上，入射波相对该平面的边的极化方向为 45°。证明当 $\Delta=45°$ 时透射波为圆极化波。如果 $n=1.6$，计算棱镜的顶角 α。

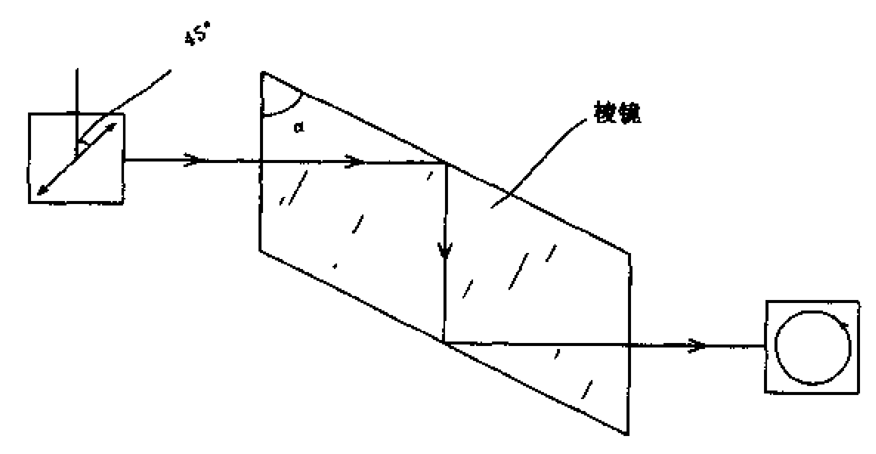


图 3.4-15 圆极化棱镜

3.4.7 一平面波入射到 $\epsilon=10\epsilon_0$，$\mu=\mu_0$，$\sigma=10^{-4}\mathrm{S/m}$ 的半空间介质上，一个接收机在距离界面 $d=100\mathrm{m}$

的位置上接收透射波。求在什么频率上接收机接收到的透射功率最大。

3.4.8 对下面两种情况的比较非常有趣,①全反射,即入射功率被全部反射。②当透射介质为理想导体时,入射功率也是全部被反射。对于 TE 波,如果这两种边界对反射波的附加相位相同,则波在这两种边界上的反射并没有任何不同。

(1) 考虑理想导体的边界位于 $x=-d$ 位置上。证明理想导体边界上反射波的相移为 $-\pi$。

(2)当波程从 $x=0$ 变化为 $x=-d$ 时,引入另一个相移 $2k_x d$。对于 TE 波,求当 d 是多少时,$x>0$ 处反射波的相移对上述两种情况是相同的?

Goos 和 Hanchen 的实验表明,当一束光线在一个介质边界被全反射时会发生侧向相移。必须注意,虽然这一结论可以用来表现反射波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的侧向相移,但其分析只对平面波成立,而且无法在实验中观测到平面波的侧向相移。

3.4.9 比较各向同性介质界面上 $\theta>\theta_c$ 的全反射现象和 $\theta=\theta_B$ 的全透射现象。

(1)全反射现象发生的条件是入射角在 $\theta>\theta_c$ 的一个范围内,而全透射现象只有当 $\theta=\theta_B$ 这样一个特定的入射角时才会发生。

(2)只有当入射介质相对透射介质为光密介质时全反射现象才有可能发生,而全透射现象则对任意两种介质的界面都有可能发生。

(3)当非极化波被全反射时,反射波仍然是非极化波;当非极化波的 TM 分量被全透射时,反射波只有 TE 波分量。

假定 TM 波的入射角 θ 满足 $\theta=\theta_B<\theta_c$。波将同时被全反射和全透射,试解释将会发生什么现象。

3.4.10 Nicol 棱镜的制作过程是首先将方解石沿对角切开,然后用一薄层折射指数为 $n=1.53$ 的加拿大胶粘合起来。方解石是一种 $\sqrt{\varepsilon_z/\varepsilon}=1.49/1.66$ 的单轴介质。利用图 3.4-16 说明从左边入射的光通过棱镜的折射从右边射出时将变成线极化光。

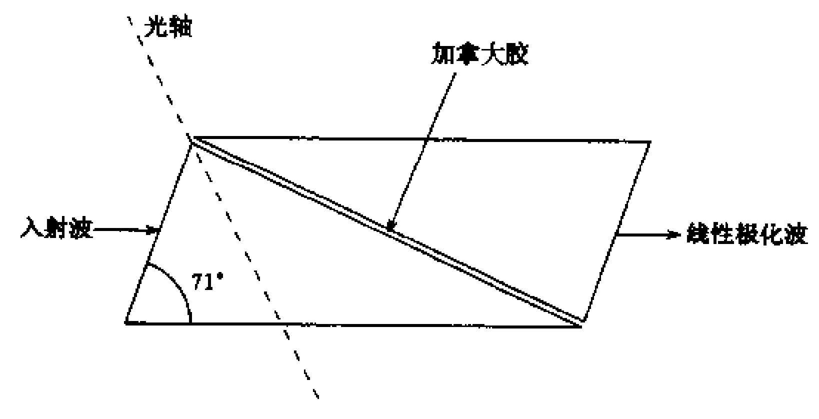


图 3.4-16 Nicol 棱镜

3.4.11 太阳光从平面表面上反射引起的闪烁是部分极化的。

(1) 绘出 TE 波和 TM 波的反射率随入射角变化的函数曲线。

$$r^{\mathrm{TE}}=|R^{\mathrm{TE}}|^2=\left|\frac{1-k_t\cos\theta_t/k\cos\theta}{1+k_t\cos\theta_t/k\cos\theta}\right|^2$$

$$r^{\mathrm{TM}}=|R^{\mathrm{TM}}|^2=\left|\frac{1-\varepsilon_0 k_t\cos\theta_t/\varepsilon_t k\cos\theta}{1+\varepsilon_0 k_t\cos\theta_t/\varepsilon_t k\cos\theta}\right|^2$$

根据相位匹配条件,式中 $k_t\sin\theta=k\sin\theta$。证明对于所有的入射角 TE 波分量的反射都比 TM 波分量的反射强,即 $|R^{\mathrm{TE}}|^2\geqslant|R^{\mathrm{TM}}|^2$。

(2)如果 $\varepsilon_t=9$,求布儒斯特角。由于当 $\theta=\theta_B$ 时,反射波全部为 TE 极化,所以布儒斯特角也被称为极化角。

(3)偏光玻璃吸收入射光的一个极化分量。为了使阳光的闪烁最小,当通过偏光玻璃后哪种光分量能够进入你的眼睛,是 TE 波还是 TM 波,并解释理由。

3.4.12 气体激光器通常是一个充满气体的管子，在管子上装有一个布儒斯特角的窗口和外部的反射镜。激光的输出将是线极化的。解释原因并说明输出的是哪种极化分量。固态激光器则是由顶端以布儒斯特角 θ_B 倾斜安装的玻璃棒构成的(图 3.4-17)。绘出外部反射镜安装的位置和角度。计算并在图上指出所有有关的角度，包括玻璃棒的倾角。玻璃棒的介电常数为 $\epsilon = 2.5$。

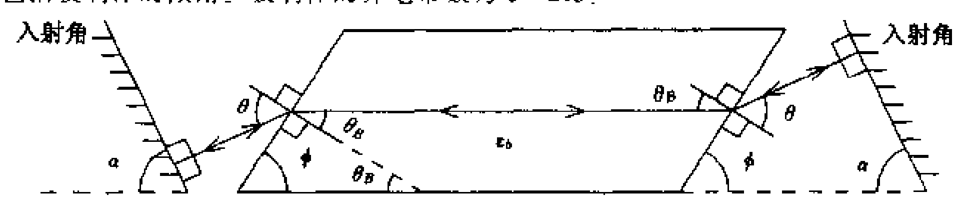


图 3.4-17 布儒斯特角玻璃棒

3.4.13 角频率为 ω 的平面波入射到等离子体介质上，等离子体介质的磁导率为 μ_o，介电系数为

$$\epsilon = \epsilon_o\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

其中，ω_p 为等离子体频率，并且 $\omega = 2\omega_p$。

(1) 计算入射波发生全反射的临界角 θ_c。

(2) 计算 TM 波发生全透射的布儒斯特角 θ_B。

(3)通常情况下，对任意两种各向同性介质，是否存在一个角度满足 $\theta = \theta_B > \theta_c$? 如果存在这种情况，给出一个例子。如果不存在这种情况，解释为什么。

3.4.14 铁氧体介质占据 $x > 0$ 的半空间，并且被沿 z 轴方向的静磁场所磁化。令一 TE 波从 $x < 0$ 的区域以入射角 θ_i 入射到铁氧体上，求反射系数和透射系数。证明从 $-\theta_i$ 方向入射的 TE 波的反射系数是 θ_i 入射的 TE 波反射系数的复共轭，这种现象就是非互易特性的一个例子。这里的磁导率张量具有下面的形式

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu & -i\mu_g & 0 \\ i\mu_g & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{bmatrix}$$

3.4.15 考虑一个由8层的分层介质构成的固态 Fabry-Perot 基准滤波器。其中的第 1,3,5 和 7 层介质为氟化镁(折射指数为 $n = 1.35$)，厚度为 1/4 波长。第 2,4,6 和 8 层介质为硫化锌(折射指数为 $n = 2.3$)。第 2,6 层介质的厚度为 1/4 波长，第 4 层介质的厚度为 1/2 波长。当平面波正入射到该分层介质时，反射系数和透射系数是什么。解释为什么这样的分层介质结构具有滤波效果。

3.4.16 入射到玻璃－空气界面上的平面波被全部反射。以同样的入射角，另一片玻璃被放置在离第一片玻璃很近的地方，并在两片玻璃之间形成一个很薄的空气间隙。计算反射系数和透射系数随间隙的厚度变化的函数，并证明在这种情况下有可能产生透射。

3.4.17 从飞机或卫星上对地球进行微波遥感时，微波辐射计被用来测量观测区域的发射率。发射率 e 与反射率或功率反射系数的关系为 $e = 1 - r$。例如，在理论上可以根据发射率确定湖面的冰层厚度。假定湖冰的介电常数为 $\epsilon = 3.2(1 + i0.01)\epsilon_o$，并且湖水为理想导体。讨论采用什么频率的微波辐射计可以"看透"冰层。

3.4.18 一极化方向为 $\hat{x}$ 方向的线极化波沿 $\hat{z}$ 方向传播并正投射到一个各向异性等离子体片上。求当分别存在①$\hat{z}$ 方向，②$\hat{y}$ 方向，③$\hat{x}$ 方向的静磁场时的反射系数和透射系数。

3.4.19 平面波从正单轴介质的内部入射到介质与真空的界面上。单轴介质光轴相对介质界面的倾角为 45°，波的入射方向垂直于光轴。求反射系数和透射系数，反射率和透射率。

3.4.20 求分层介质中 TM 波的传输矩阵。

3.4.21 用与前向传输矩阵平行的推导过程证明后向传输矩阵为

$$U_{l(l+1)} = \frac{1}{2}[1 + p_{l(l+1)}]\begin{bmatrix} e^{ik_{(l+1)z}(d_{l+1}-d_l)} & R_{(l+1)l}e^{-ik_{(l+1)z}(d_{l+1}-d_l)} \\ R_{l(l+1)}e^{ik_{(l+1)z}(d_{l+1}-d_l)} & e^{-ik_{(l+1)z}(d_{l+1}-d_l)} \end{bmatrix}$$

证明 $U_{l(l+1)}\cdot V_{(l+1)l}=V_{(l+1)l}\cdot U_{l(l+1)}=I$。其中 I 是 2×2 阶的单位矩阵。证明反射系数和传输系数可以根据下面的关系计算

$$\begin{bmatrix} Re^{-ik_z d_0} \\ e^{ik_z d_0} \end{bmatrix} = U_{0t}\cdot\begin{bmatrix}0\\T\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\T\end{bmatrix}$$

式中

$$U_{0t} = U_{01}\cdot U_{12}\cdots U_{nt}$$

U_{nt}是什么？

3.4.22 对于三层介质，令式(3.4.69)中 $t=3, n=2$，反射系数为

$$R=\frac{\{[R_{01}+R_{12}e^{i2k_{1z}(d_1-d_0)}]+[R_{01}R_{12}+e^{i2k_{1z}(d_1-d_0)}]R_{23}e^{i2k_{2z}(d_2-d_1)}\}e^{i2k_z d_0}}{\{[1+R_{01}R_{12}e^{i2k_{1z}(d_1-d_0)}]+[R_{12}+R_{01}e^{i2k_{1z}(d_1-d_0)}]R_{23}e^{i2k_{2z}(d_2-d_1)}\}}$$

证明当取下列极限情况时：① $d_1=d_0, R_{01}=0$；② $d_1=d_0$ 或 $d_1=d_2$ 并且 $R_{12}=0$，即 $k_{1z}=k_{2z}$；③ $R_{23}=0$，上面的表达式将简化为式(3.3.26)。

3.4.23 如果非均匀介质的空间变化足够小，则可以用 WKB(Wentzel-Kramers-Brillouin)逼近近似求解。对于介电常数剖面为 $\epsilon_1(z)$ 的半空间介质，可以写出 TE 波的解为

$$E_{1y}(x,z) = E_1(z)e^{ik_x x}$$

(1) 证明 $E_1(z)$满足方程

$$\left[\frac{d^2}{dz^2}+k_{1z}^2(z)\right]E_1(z)=0$$

式中 $k_{1z}^2=k_1^2(z)-k_x^2, k_1^2(z)=\omega^2\mu\epsilon_1(z)$。

(2) 二阶常微分方程的 WKB 近似或几何光学近似的解具有下面的形式

$$E_{1z}=\frac{A_1}{\sqrt{k_{1z}(z)}}e^{i\int_0^z dz' k_{1z}(z')}+\frac{A_2}{\sqrt{k_{1z}(z)}}e^{-i\int_0^z dz' k_{1z}(z')}$$

上面的近似解成立的意义是什么。

3.4.24 对于光活性介质，右手和左手圆极化的特征波 k_r 和 k_l 满足 $D_2/D_1=\pm i$。在 xyz 坐标系中，当波向 $+\hat{z}$ 方向传播时，$D=\hat{x}+\hat{y}i$ 为右旋圆极化，当波向 $-\hat{z}$ 方向传播时，$D=\hat{x}+\hat{y}i$ 为左旋圆极化。考虑平面波

$$E=\hat{y}E_0e^{-ikz}$$

入射到边界面分别在 $z=0$ 和 $z=-h$ 处的各向异性等离子体层上。

假定在所有的区域中，电场的解的形式为，在区域 $0\leqslant z$ 中

$$E=\hat{y}E_0(e^{-ikz}+R_y e^{ikz})+\hat{x}E_0R_x e^{ikz}$$

在区域 $-h\leqslant z\leqslant\leqslant 0$ 中

$$E=(\hat{x}+\hat{y}i)E_0(Ae^{ik_r z}+Ce^{-ik_l z})+(\hat{x}-\hat{y}i)E_0(Be^{-ik_r z}+De^{ik_l z})$$

在区域 $z\leqslant -h$ 中

$$E=\hat{y}T_yE_0e^{-ik_t z}+\hat{x}T_xE_0e^{-ik_t z}$$

(1) 求所有区域内的磁场分量。

(2) 证明可以根据下面的结果得到波的幅度。

$$R_x-iR_y=\frac{i}{D_r}[(k_t+k_r)(k_l-k)e^{-ik_r h}+(k_t-k_l)(k_r+k)e^{ik_l h}]$$

$$R_x+iR_y=\frac{i}{D_r}[(k_t+k_l)(k_r-k)e^{-ik_l h}+(k_t-k_r)(k_l+k)e^{ik_r h}]$$

$$D_r=(k_t+k_r)(k_l+k)e^{-ik_r h}+(k_t-k_l)(k_r-k)e^{ik_l h}$$

$$D_l=(k_t+k_l)(k_r+k)e^{-ik_l h}+(k_t-k_r)(k_l-k)e^{ik_r h}$$

$$A=\frac{i}{D_r}k(k_t-k_l)e^{ik_l h}$$

$$B = \frac{\mathrm{i}}{D_1} k(k_t + k_1) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1 h}$$

$$C = -\frac{\mathrm{i}}{D_r} k(k_t + k_r) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_r h}$$

$$D = -\frac{-\mathrm{i}}{D_1} k(k_t - k_r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_r h}$$

$$T_x + \mathrm{i}T_y = \mathrm{i}k(k_r + k_1)\left[\frac{1}{D_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_r - k_1)h} - \frac{1}{D_r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_r - k_1)h}\right]$$

$$T_x - \mathrm{i}T_y = k(k_r + k_1)\left[\frac{1}{D_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_r - k_1)h} + \frac{1}{D_r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_r - k_1)h}\right]$$

(3) 检验 $k_1 = k_r = k_1 = k$ 时的极限情况。这时所有波的幅度的值是什么?

(4) 令 $k_t = k, D_r \approx 4k^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_r h}, D_1 \approx 4k^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1 h}$,证明 $R_x \pm \mathrm{i}R_y = 0$ 并且

$$\frac{T_x}{T_y} = -\tan\left[\frac{(k_r - k_1)h}{2}\right]$$

(5) 令 $k_t \to \infty$。证明 $T_x = T_y = 0, R_x \pm \mathrm{i}R_y = 0$ 并且场矢量的旋度为 0。

3.4.25 在 kDB 坐标系中各向异性介质的色散关系为

$$\begin{bmatrix} u^2 - \nu\kappa & -\mathrm{i}\nu\kappa_g\cos\theta \\ \mathrm{i}\nu\kappa_g\cos\theta & u^2 - \nu(\kappa\cos^2\theta + \kappa_g\sin^2\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = 0$$

(1) 当波沿 $\hat{z}$ 方向传播,并且波的传播方向与外加直流磁场 $\boldsymbol{B} = \hat{z}B$ 的方向一致时,求介质中两个特征波的极化和波数 k_l, k_r。写出 kDB 坐标系和 xyz 坐标系中场矢量 $\boldsymbol{D}$ 的表达式。

(2) 对于沿 $-\hat{z}$ 方向传播的波重复(1)的过程。证明在 kDB 中,场矢量 $\boldsymbol{D}$ 具有下面的形式

$$\boldsymbol{D}_l = D_l(\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \hat{\boldsymbol{e}}_2\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l z}$$
$$\boldsymbol{D}_r = D_l(\hat{\boldsymbol{e}}_1 - \hat{\boldsymbol{e}}_2\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_r z}$$

式中 $k_l = \omega/\sqrt{\nu(\kappa + \kappa_g)}$ 和 $k_r = \omega/\sqrt{\nu(\kappa - \kappa_g)}$ 实际上分别为沿 $-\hat{z}$ 方向传播的右旋圆极化特征波和左旋圆极化特征波的波数。在 xyz 坐标系中,证明场矢量 $\boldsymbol{D}$ 的形式与(1)的结果相同,只是指数的正负号相反。需要注意 $\boldsymbol{k} = \hat{\boldsymbol{e}}_3 k = -\hat{z}k, \hat{\boldsymbol{e}}_1 = \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{e}}_2 = -\hat{\boldsymbol{y}}$。

(3) 考虑平面波

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{y}}E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}$$

入射到边界面分别在 $z = 0$ 和 $z = -h$ 处的各向异性等离子体层上。

假定在所有的区域中,电场的解的形式为

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{y}}E_0(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz} + R_y\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}) + \hat{\boldsymbol{x}}E_0R_x\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} \qquad 0 \leqslant z$$

$$\boldsymbol{E} = (\hat{\boldsymbol{x}} + \mathrm{i}\hat{\boldsymbol{y}})E_0[A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_r z} + C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_r z}] + (\hat{\boldsymbol{x}} - \mathrm{i}\hat{\boldsymbol{y}})E_0(B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1 z} + D\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 z}) \qquad -h \leqslant z \leqslant 0$$

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{y}}T_yE_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_t z} + \hat{\boldsymbol{x}}T_xE_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_t z} \qquad z \leqslant -h$$

求所有区域内的磁场分量。并证明可以根据下面的结果得到波的幅度

$$R_x - \mathrm{i}R_y = \frac{\mathrm{i}}{D_r}[(k_t - k_r)(k_r + k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_r h} + (k_t + k_r)(k_r - k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_r h}]$$

$$R_x + \mathrm{i}R_y = \frac{-\mathrm{i}}{D_1}[(k_t - k_1)(k_1 + k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1 h} + (k_t + k_1)(k_1 - k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1 h}]$$

$$D_r = (k_t - k_r)(k_r - k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_r h} + (k_t + k_r)(k_r - k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_r h}$$

$$D_1 = (k_t - k_1)(k_1 - k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 h} + (k_t + k_1)(k_1 - k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1 h}$$

$$A = \frac{\mathrm{i}}{D_r} k(k_t - k_r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_r h}$$

$$C = -\frac{\mathrm{i}}{D_r} k(k_t + k_r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_r h}$$

$$B = \frac{\mathrm{i}}{D_1} k(k_t + k_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1 h}$$

$$D = -\frac{\mathrm{i}}{D_1}k(k_t - k_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1h}$$

$$T_x + \mathrm{i}T_y = \mathrm{i}\frac{4kk_1}{D_1}$$

$$T_x - \mathrm{i}T_y = -\mathrm{i}\frac{4kk_r}{D_r}$$

(4) 检验 $k_t = k_r = k_1 = k$ 时的极限情况。这时所有波的幅度的值是什么。

(5) 令 $k_t = k$, $D_1 \simeq 4k^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1h}$, $D_r \simeq 4k^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_rh}$，证明

$$\frac{T_x}{T_y} = \tan\left[\frac{(k_r - k_1)h}{2}\right]$$

及 $R_x \pm \mathrm{i}R_y \approx 0$。

(6) 令 $k_t \to \infty$, $D_1 \simeq D_r \to \infty$，并且 $T_x = T_y = 0$。证明 $R_x - \mathrm{i}R_y = -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k_rh}$, $R_x + \mathrm{i}R_y \approx \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k_1h}$并且

$$\frac{R_x}{R_y} = \tan[(k_r - k_1)h]$$

3.5 导行

3.5.1 导体平行板的导行

考虑一对分别位于 $x = 0$ 和 $x = d$ 的理想导体平板对电磁波的引导作用(见图 3.5-1)。导体板之间填充的介质是均匀各向同性的。该平行板波导沿 y 方向的宽度为 w，假定 $w \gg d$，从而边缘场可以忽略，所以有$\partial/\partial y = 0$。

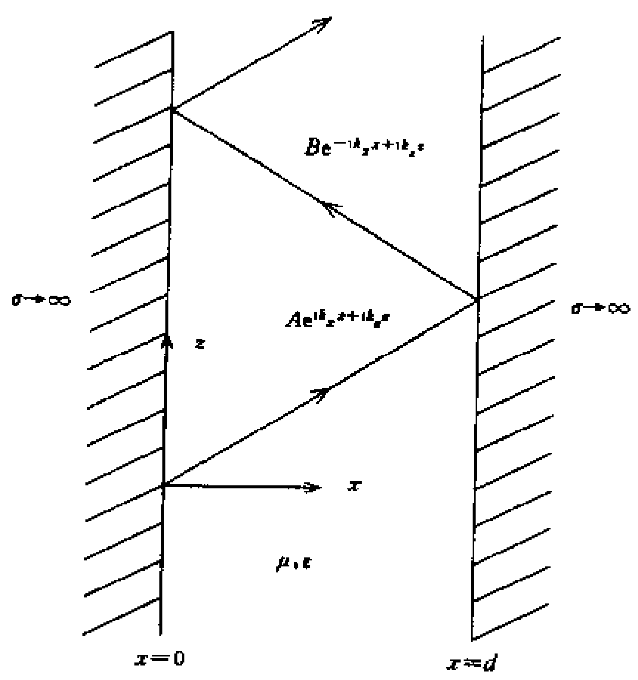


图 3.5-1　平行板波导

麦克斯韦方程可以分解为 TE 分量和 TM 分量。对于 TE 波有

$$H_x = -\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\frac{\partial}{\partial z}E_y \tag{3.5.1a}$$

$$H_z = \frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\frac{\partial}{\partial x}E_y \tag{3.5.1b}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega^2\mu\varepsilon\right)E_y = 0 \tag{3.5.1c}$$

对于 TM 波有

$$E_x = \frac{1}{\mathrm{i}\omega\epsilon}\frac{\partial}{\partial z}H_y \tag{3.5.2a}$$

$$H_z = -\frac{1}{\mathrm{i}\omega\epsilon}\frac{\partial}{\partial x}H_y \tag{3.5.2b}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega^2\mu\varepsilon\right)E_y = 0 \tag{3.5.2c}$$

平行导体板上的边界条件要求 y 和 $x=d$ 处的切向电场为 0。

注意,方程(3.5.1a)~(3.5.1c)是方程(3.5.2a)~(3.5.2c)的对偶。但是根据平行导体板上的边界条件,要求 TE 波的切向电场和 TM 波的切向电场都必须为 0,所以 TE 波和 TM 波的边界条件并不具有对偶关系。

导体板之间的导行波的传播方向为 $\pm\hat{z}$ 方向。对于沿 $+\hat{z}$ 方向传播的波,TE 波的解由两个平面波分量组成

$$E_y = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x + \mathrm{i}k_z z} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_x x + \mathrm{i}k_z z} \tag{3.5.3}$$

将式(3.5.3)代入(3.5.1c),可以得到色散关系

$$k_z^2 + k_x^2 = \omega^2\mu\varepsilon = k^2 \tag{3.5.4}$$

$x=0$ 处的边界条件要求 $E_y=0$,从而可以得到

$$\frac{B}{A} = -1 \tag{3.5.5a}$$

这就是 $x=0$ 处的边界面上的反射系数。$x=d$ 处的边界条件也要求 $E_y=0$,从而可以得到

$$\frac{A}{B} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k_x d} \tag{3.5.5b}$$

这就是 $x=d$ 处的边界面上的反射系数。相位因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k_x d}$是由于坐标原点位于 $x=0$ 而引入的。将式(3.5.5a)与(3.5.5b)相乘可以得到

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k_x d} = 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2m\pi}$$

进一步可以得到

$$2k_x d = 2m\pi$$

这一结果表明平面波沿 $\hat{x}$ 方向来回路径的相位必须加上 2π 的整数倍。所以根据 $x=0$ 和 $x=\mathrm{d}$处的边界条件有下面的结果

$$k_x = \frac{m\pi}{d} = \frac{m}{2d}\mathrm{K}_0 \tag{3.5.6}$$

其中,m 是任意的整数。方程(3.5.6)被称为导行条件,它是由边界条件决定的。所以沿着 $\hat{z}$ 方向,导行波的空间变化必须是距离 $2d$ 的整数倍。

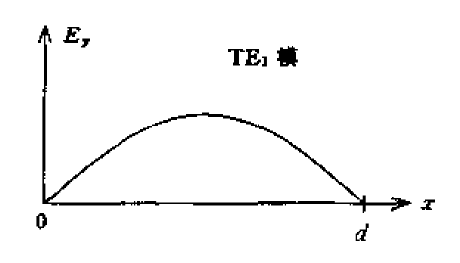
将式(3.5.5a)或(3.5.5b)代入式(3.5.3)可以确定电场为

$$E_y = E_0\sin(k_x x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z} \tag{3.5.7}$$

其中,$E_0 = \mathrm{i}2A$。对应每个整数 m 的 TE 波称为 TE_m 模。

由于对应 $m=0$的 $E_y=0$,所以不存在TE_0模,对应 $m=1$,$m=2$和 $m=3$的 E_y 场的分布

模型如图 3.5-2 所示。



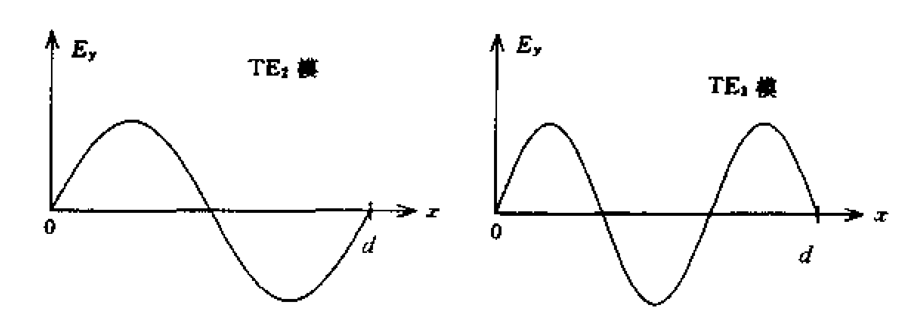


图 3.5-2　TE_1,TE_2 和 TE_3 模的场幅度

将导波条件(3.5.6)代人色散关系(3.5.4)可以得到

$$k_z^2 + \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2 = k^2 \tag{3.5.8}$$

对于不同的 m 值,方程(3.5.8)描述了一族双曲线。在图 3.5-3 中绘出了导波模式的 k_z-k 图像。可以看到,当 $k < m\pi/d$ 时,对应第 m 模式的 k_z 是一个虚数。该模式的波分量是凋落波,它将沿着 $\hat{z}$ 方向指数衰减。对应 $k_z = 0$ 的波数被称为截止波数 k_{cm}

$$k_{cm} = \frac{m\pi}{d} = \frac{m}{2d}\mathrm{K}_0 \tag{3.5.9}$$

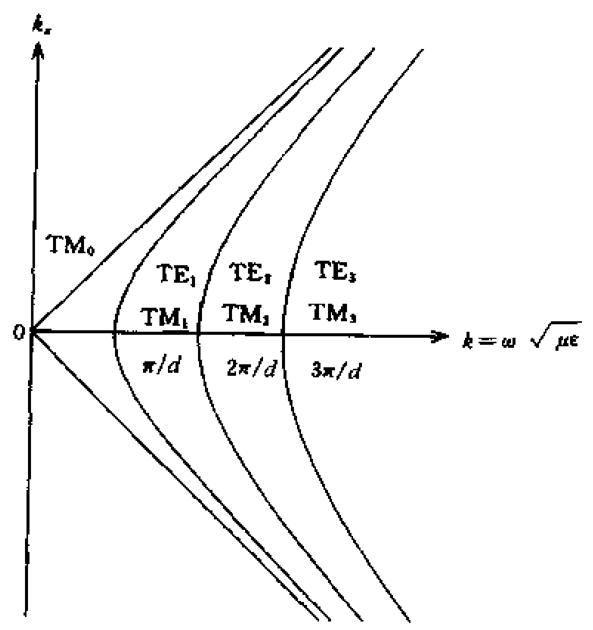


图 3.5-3　导波模式的 k_z-k 图像

为了保证 m 阶 TE 模能够传播,空间频率 k 就必须大于截止频率 k_{cm}。需要注意,如果 TE_m 能够传播,那么 $l < m$,所有 TE_l 模也必然能够传播。所以对于一个给定的空间频率 k 如果满足 $m/2d < k < (m+1)2d\mathrm{K}_0$,则在波导中将有 m 个 TE 模式是允许的。最低的 TE 模式是 TE_1 模,

对该模式有 $k_{c1}=1/2d\mathrm{K}_o$。如果 $k<1/2d\mathrm{K}_o$,则在波导中没有 TE 模被激励。波导中 TE_1 模式单模传播的工作范围是 $1/2d<k<1/d\mathrm{K}_o$。

注意,对应截止波数的截止波长为 $\lambda_{cm}=2d/m$,相应的截止角频率为 $\omega_{cm}=m\pi/d(\mu\varepsilon)^{1/2}$。

例 3.5.1 相速与群速。

对于 m 模式,当波的频率低于截止频率时,$k_z=\mathrm{i}\alpha_z$,根据式(3.5.8)可以得到

$$\alpha_z^2+k^2=\left(\frac{m\pi}{d}\right)^2$$

当波的频率高于截止频率时,沿 $\hat{z}$ 方向的相速 v_p 为

$$v_p=\frac{\omega}{k_z}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left[1-\left(\frac{k_{cm}}{k}\right)^2\right]^{-1/2}$$

随着频率趋于无限大,v_p 逐渐逼近介质中的光速。对于有限的频率 ω,相速总是大于 $(\mu\varepsilon)^{-1/2}$,其原因是由于波导中的 k_z 总是小于 k。由于平行板波导中的相速与频率有关,所以波导是一个色散传输系统。波导中的群速为

$$v_g=\left(\frac{\partial k_z}{\partial\omega}\right)^{-1}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left[1-\left(\frac{k_{cm}}{k}\right)^2\right]^{1/2}$$

所以有 $v_pv_g=1/\mu\varepsilon$。波导中的群速总是小于介质中的光速。实际上

$$v_g=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{k_z}{k}$$

为介质中的波速在 $\hat{z}$ 方向的投影。

导行条件(3.5.4)表明,在 $\hat{x}$ 方向上的弹射波必须是相互加强的干涉,即有 $2k_xd=2m\pi$,这样才能实现波的引导传播。由于在波导中 k_x 只有一组离散的波数(频率)的取值是被允许的,对应的 k_z 的取值是由色散关系式(3.5.6)决定的(如图 3.5-4 所示)。

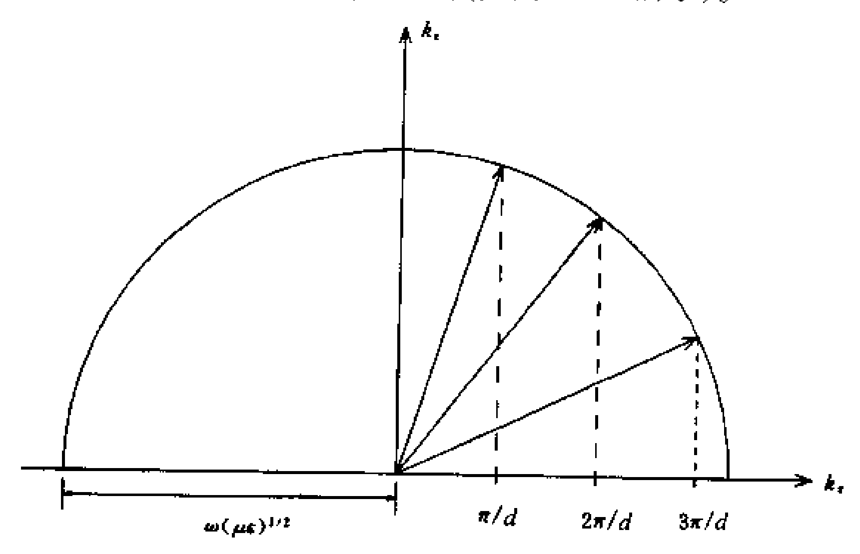


图 3.5-4 导行条件的说明

利用法拉第定律,根据式(3.5.1a)和(3.5.1b)或式(3.5.7)可以得到磁场矢量

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\left(-\hat{x}\frac{\partial}{\partial z}E_g+\hat{z}\frac{\partial}{\partial x}E_g\right)$$

$$= \frac{E_0}{\mathrm{i}\omega\mu}(-\hat{x}\,\mathrm{i}k_z\sin k_x x + \hat{z}k_x\cos k_x x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z} \tag{3.5.10}$$

成平面波的表达形式，可以得到

$$\boldsymbol{H} = \frac{E_0}{\mathrm{i}2\omega\mu}[(-\hat{x}k_z + \hat{z}k_x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x + \mathrm{i}k_z z} + (\hat{x}k_z + \hat{z}k_x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_x x + \mathrm{i}k_z z}] \tag{3.5.11}$$

可以看到，磁场矢量垂直于电场矢量，并垂直于两个弹射平面波的波矢量。

根据式(3.5.7)，可以将式(3.5.10)写成下面的形式

$$\boldsymbol{H} = -E_0\left(\hat{x}\frac{k_z}{\omega\mu}\sin\frac{m\pi x}{d} + \hat{z}\,\mathrm{i}\frac{m\pi}{\omega\mu d}\cos\frac{m\pi x}{d}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z} \tag{3.5.12}$$

可以发现，沿 $\hat{z}$ 方向的复坡印廷功率为

$$S_z = \frac{k_z^*}{\omega\mu}|E_0|^2\sin^2\frac{m\pi x}{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z - k_z^*)z}$$

当 k_z 是虚数时，$k_z = \mathrm{i}\alpha_z$，可以看到这种情况下时间平均坡印廷功率$\langle S_z\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{S_z\} = 0$。由于式(3.5.12)所给出的 $\boldsymbol{H}$ 与 E_y 相乘的 x 分量是一个纯虚数，所以横向坡印廷功率的时间平均$\langle S_x\rangle$总是为 0。

根据 TM 波所满足的边界条件，可以看到解具有下面的形式

$$\boldsymbol{H} = \hat{y}H_0\cos(k_x x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z} \tag{3.5.13a}$$

$$\boldsymbol{E} = H_0\frac{1}{\omega\epsilon}(\hat{x}k_z\cos k_x x - \hat{z}\,\mathrm{i}k_x x\cos k_x x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z} \tag{3.5.13b}$$

边界条件要求在 $x = 0$ 和 $x = d$ 的平面上 $E_z = 0$，由此可以得到导行条件为

$$k_x = \frac{m\pi}{d} \tag{3.5.14}$$

将得到的 H_y 的解代入波动方程(3.5.2)可以得到下面的色散关系

$$k_x^2 + k_z^2 = \omega^2\mu\varepsilon = k^2$$

将导行条件代入该色散关系可以得到与式(3.5.6)相同的结果，如图 3.5-4 所示。TM 模的导行条件(3.5.13)和色散关系(3.5.14)式与相应的 TE 模式的导行条件和色散关系是相同的，但对于 $m = 0$ 的情况是一个重要的例外。当 $m = 0$ 时 TM 模仍然存在，而 $m = 0$ 的 TE 模则是不存在的。因此可以得到 TM_0 模，该模式也被称为 TEM 模。TEM 模的截止频率为 0，所以 TEM 模是平行板波导单模工作的基本模式或主模式，其频率范围为 $k = 0$ 到 $k = \pi/d$。

令式(3.5.13)中的 $k_x = 0, k_z = k$，可以得到 TM_0 模的场的解为

$$\boldsymbol{H} = \hat{y}H_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} \tag{3.5.15a}$$

$$\boldsymbol{E} = \hat{x}\eta H_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} \tag{3.5.15b}$$

式中 $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ 是介质的特性阻抗。平行板波导中的电场垂直于导体板，磁场平行于导体板，如图 3.5-5 所示。

例 3.5.2　传输线理论。

平行板波导中的 TM_0 模式是传输线理论的一个最好的说明。为了能够适用于波导一端截止的情形，将式(3.5.15)所给出的解写成更为一般的形式

$$\boldsymbol{E} = \hat{x}E_x(z) \tag{3.5.16a}$$

$$\boldsymbol{H} = \hat{y}H_y(z) = \hat{y}\frac{1}{\eta}E_x(z) \tag{3.5.16b}$$

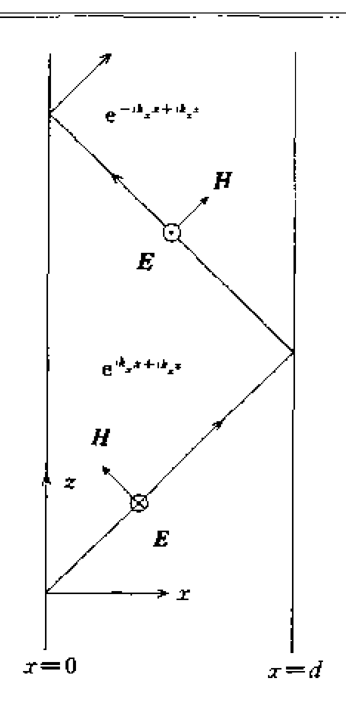




图 3.5-5 导行模式的平面波解释

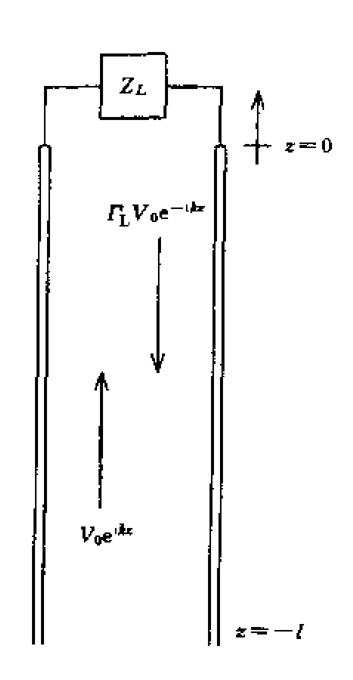


图 3.5-6 加有负载的传输线

假定平行板波导在 $\hat{y}$ 方向上的宽度为 w，并且 $\hat{y}$ 方向上的边缘场可以忽略，从而有 $\partial/\partial y=0$。对于一个固定的 z，可以定义电压 $V(z)$

$$V(z) = V(x=0) - V(x=d) = \int_0^d \mathrm{d}x E_x = E_x d \tag{3.5.17a}$$

定义电流为

$$I(z) = \int_0^w \mathrm{d}y \hat{z} \cdot (\hat{x} \times \boldsymbol{H}) = H_y w \tag{3.5.17b}$$

由麦克斯韦方程

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \mathrm{i}\omega\mu \boldsymbol{H}$$

可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} V(z) = \mathrm{i}\omega L I(z) \tag{3.5.18a}$$

式中 $L=\mu d/w$(H/m)是单位长度的平行板波导的电感。类似地，由麦克斯韦方程

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = -\mathrm{i}\omega\epsilon \boldsymbol{E}$$

可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} I(z) = \mathrm{i}\omega C V(z) \tag{3.5.18b}$$

式中，$C=\epsilon w/d$(F/m)是单位长度的平行板波导的电容。

方程(3.5.18a)和(3.5.18b)就是传输线方程。需要注意的是，对于除 TM_0 以外的其他的导行波模式由于随 x 的变化，并不能得到(3.5.18)那样的结果。从方程(3.5.18a)和(3.5.18b)消去 $I(z)$ 可以得到关于电压 $V(z)$ 的齐次亥姆霍兹波动方程：

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} + \omega^2 LC\right) V(z) = 0$$

对于沿 $-\hat{z}$ 方向传播的电压波，可以写成下面的表达式

$$V(z) = V_0 e^{\mathrm{i}kz}$$

根据式(3.5.18a)可以得到相应的电流为

$$I(z) = \frac{k}{\omega L}V(z) = \frac{1}{Z_0}V(z)$$

式中，$Z_0 = \sqrt{L/C}$是传输线的特征阻抗。

如图 3.5-6 所示，当传输线的终端连接阻抗 Z_L 时，传输线上会同时存在正向的行波和反向的行波。令终端负载阻抗的位置为 $z=0$，则有

$$V(z) = V_0(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} + \Gamma_L \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}) \tag{3.5.19a}$$

式中 Γ_L 是由负载阻抗 Z_L 所决定的反射系数。

根据式(3.5.19a)，可以得到

$$I(z) = \frac{V_0}{Z_0}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} - \Gamma_L \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}) \tag{3.5.19b}$$

由式(3.5.19b)，可以定义广义阻抗 $Z(z)$为

$$Z(z) \equiv \frac{V(z)}{I(z)} = Z_0\frac{1+\Gamma_L \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2kz}}{1-\Gamma_L \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2kz}} \tag{3.5.20}$$

在 $z=0$ 处，有

$$Z_L = Z(z=0) = Z_0\frac{1+\Gamma_L}{1-\Gamma_L}$$

从而可以得到 Γ_L 的表达式

$$\Gamma_L = \frac{Z_{Ln}-1}{Z_{Ln}+1} \tag{3.5.21}$$

式中，$Z_{Ln} \equiv Z_L/Z_0$ 为归一化负载阻抗。由式(3.5.21)容易看到：①当终端短路，即当 $Z_L=0$ 时，$\Gamma_L=-1$；②当终端开路，即当 $Z_L\to\infty$时，$\Gamma_L=1$；③当终端匹配，即当 $Z_L=Z_0$ 时，$\Gamma_L=0$。

广义反射系数 $\Gamma(z)$定义为

$$\Gamma(z) \equiv \Gamma_L \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2kz} \tag{3.5.22}$$

根据式(3.5.20)可以定义归一化阻抗

$$Z_n(z) = \frac{Z(z)}{Z_0} = \frac{1+\Gamma(z)}{1-\Gamma(z)} \tag{3.5.23}$$

令 $\Gamma(z)$取尽所有幅度小于等于 1，即$|\Gamma(z)|\leqslant 1$ 的复数，可以构造史密斯圆图。在复数 Γ 平面上的单位圆内，史密斯圆图上的轨迹表示常数电阻和电抗值。

利用广义反射系数 $\Gamma(z)$的定义，根据式(3.5.19a)有

$$V(z) = V_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}[1+\Gamma(z)] \tag{3.5.24}$$

如图 3.5-7 所示，根据式(3.5.24)可以构造电压驻波波形。$|1+\Gamma(z)|$的幅度分布如图3.5-7(c)所示。在 $z=0$ 处，$\Gamma(z=0)=\Gamma_L$ 是一个复数，其结果可以通过由归一化负载 $Z_{Ln}=Z_L/Z_0$ 根据式(3.5.21)得到。当从负载处沿着 $-\hat{z}$ 移动，从而使 z 向着负值方向变化时，式(3.5.22)中广义反射系数的轨迹将在复 Γ 平面上逆时针旋转。相应的电压幅度$|V(z)|$将正比于$|1+\Gamma(z)|$并如图 3.5-7(b)所示。图 3.5-7(c)中的 A、B、C 各点对应图 3.5-7(b)中相应的点。当 $k_z=\pi$ 时，电压驻波波形将周期重复。当 $\Gamma(z)$取正实数时，电压取得最大幅度 V_{max}；当 $\Gamma(z)$取负实数时，电压取得最小幅度 V_{min}。电压驻波比(VSWR)定义为

$$\mathrm{VSWR} = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{1+|\Gamma(z)|}{1-|\Gamma(z)|}$$

可以看出，当终端阻抗为匹配阻抗时，将不存在反射，即 $\Gamma_L=0$，这时 VSWR = 1。一般情况下，VSWR 的取值在 $1\sim\infty$。

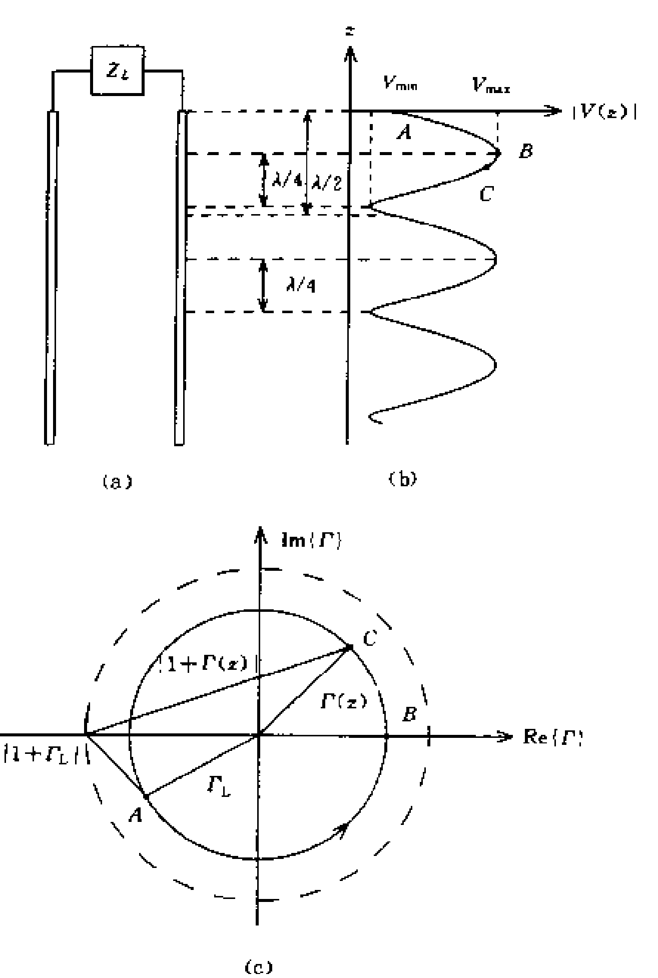


图 3.5-7 电压驻波图的建立

平行板波导中模式的激励

现在讨论平行板波导中 TE 模和 TM 模的激励。导行波模式的幅度决定于外部激励源。假定激励源是位于 $z=0$ 处的片状电流，该片状电流将产生传播模式，同时也产生波导中 $+\hat{z}$ 方向和 $-\hat{z}$ 方向的凋落波模式。这里的片状电流是由于导体板沿 y 方向的无限延伸和电流源、电磁场分布的均匀性。$z=0$ 处的边界条件要求：①E_x 和 E_y 连续；②H_x 的不连续性等于沿 $\hat{y}$ 方向流动的片状电流；③H_y 的不连续性等于沿 $\hat{x}$ 方向流动的片状电流。

举例来说，考虑 $z=0$ 处 $\hat{y}$ 方向的片状电流，该片状电流沿 x 方向的变化为

$$\boldsymbol{J}_s = \hat{y}J_s(x)$$

该片状电流源可以看做是由非常靠近放置的导线构成，这些导线上面都分别有不同的电流源激励。边界条件要求

$$H_x\mid_{z=0_+} - H_x\mid_{z=0_-} = J_s(x)$$

并且在 $z=0$ 处其他的切向场分量连续。

另外一个例子考虑表面电流可以写成下面的形式

$$\boldsymbol{J}_s = \hat{y}I_0\delta(x-a)$$

它表示位于 $x=a$ 处的线源,该电流源沿 $\hat{y}$ 方向流动,其量纲为 A/m。根据边界条件的要求,只有 TE 波能够被激励。实际上,也可以假设一定的 TM 模式的幅度,但根据边界条件会发现这些模式的幅度为 0。可将 TE 波解表示为所有 TE 模式的叠加

$$E_y = \begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} E_m \sin\frac{m\pi x}{d} e^{ik_z z} & z \geqslant 0 \\ \sum_{m=1}^{\infty} E_m \sin\frac{m\pi x}{d} e^{-ik_z z} & z \leqslant 0 \end{cases} \tag{3.5.25}$$

可以看到上式已经满足了 $z=0$ 处 E_y 连续的边界条件。根据对称性要求,$z<0$ 时 E_m 的幅度与 $z>0$ 时 E_m 的幅度相等。磁场的 x 分量为

$$H_x = \begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-k_z}{\omega\mu} E_m \sin\frac{m\pi x}{\mathrm{d}} e^{ik_z z} & z \geqslant 0 \\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_z}{\omega\mu} E_m \sin\frac{m\pi x}{\mathrm{d}} e^{-ik_z z} & z \leqslant 0 \end{cases} \tag{3.5.26}$$

根据 $z=0$ 处的边界条件可以得到

$$I_0\delta(x-a) = \sum_{m=1}^{\infty} -\frac{k_z}{\omega\mu} E_m \sin\frac{m\pi x}{d} \tag{3.5.27}$$

利用正弦函数的正交特性,对上式两边乘以 $\sin((m\pi x/d)$ 并做从 0 到 d 的积分,可以得到模式幅度 E_m 的结果为

$$E_m = -\frac{\omega\mu}{k_z d} I_0 \sin\frac{m\pi a}{d} \tag{3.5.28}$$

对于 TE_1 模式,在 $a=d/2$ 处 E_1 取得最大值。这是由于 E_Y 也是在 $a=d/2$ 处取得最大值,所以电流源的能量耦合到 TE_1 模式的部分最大。

在波导中沿 $\hat{z}$ 方向传播的时间平均坡印廷功率为

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\int_0^d \mathrm{d}x \int_0^w \mathrm{d}_y \left(\sum_{m=1}^{\infty} E_m \sin\frac{m\pi x}{d} e^{ik_z z}\right)\cdot\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_z}{\omega\mu} E_m \sin\frac{m\pi x}{d} e^{ik_z z}\right)^*\right\} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{wd}{2}\sum_{m=1}^{\infty} \mid E_m \mid^2 \left(\frac{k_z^*}{\omega\mu}\right) e^{i(k_z - k_z^*)z}\right\} \end{aligned} \tag{3.5.29}$$

如果波长 λ 满足 $\lambda_{C(N+1)}<\lambda<\lambda_{CN}=2d/N$,那么当 $m\leqslant N$ 时,k_z 为实数;当 $m>M$ 时,k_z 为虚数。根据式(3.5.20)有

$$P = \sum_{m=1}^{N} \frac{wd}{4\eta} \mid E_m \mid^2 \sqrt{1-\left(\frac{k_{cm}}{k}\right)^2} \tag{3.5.30}$$

式中 $\eta=\sqrt{\mu/\varepsilon}$ 是波导中介质的特性阻抗。波导中的总功率等于所有的 k_z 为实数的传播模式的功率的总和。非常重要的是,在不同的模式之间不存在相互的耦合,即每个模式分别携带各自的功率。

波导壁损耗引起的导行波功率衰减

如果平行板为理想导体,并且波导中的介质为理想无损耗介质,那么波导中的功率流将不会发生衰减。现在研究当平行板的电导率很大但却是有限值时波导中波的衰减。这里将采用微扰理论进行分析。

由于损耗作用,导行波携带的总的时间平均功率 P_f 将是 z 的衰减函数。假定场的幅度以

一个小的衰减常数 α 指数衰减。当波导壁是理想导体时，$\alpha=0$。总的传播功率 P_f 将以 2α 指数衰减，即 $P_f \simeq e^{-2\alpha z}$。根据功率守恒定律，$P_f$ 随距离的衰减量应该等于单位长度上的功率耗散 P_d。可以得到

$$P_d = -\frac{d}{dz}P_f = 2\alpha P_f$$

其中，衰减常数 α 为

$$\alpha = \frac{P_d}{2P_f} \tag{3.5.31}$$

目标就是要用微扰法来求得 α。

微扰法从理想导电波导的严格解开始，设加微扰的在 $\hat{z}$ 方向上的时间平均功率流为 P_f，

$$P_f = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y\hat{z}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)\right\} \tag{3.5.32}$$

式中，积分量是对与波传播的方向垂直的平面区域内的面积分。

为估计单位长度上耗散的功率 P_d，我们先来分析由两平板上的非理想导电性带来的损耗。设板上的表面电流为

$$\boldsymbol{J}_s = \hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_W \qquad (\mathrm{A/m}) \tag{3.5.33}$$

其中，$\boldsymbol{H}_W$ 是在 $x=0$ 和 d 两点处的磁场。

当平板为理想导体时，切向电场为零，表面电流无需任何电场的支持。面当平板不是理想导体时，在板表面处有一个小的电场 $\boldsymbol{E}_W$ 来支持表面电流(见图 3.5-8)，根据坡印廷定理，导体上每单位面积上的功率损耗的时间平均值就为 $\langle\boldsymbol{E}_W\cdot\boldsymbol{J}_s^*\rangle \mathrm{W/m^2}$。我们应先由 $\boldsymbol{H}_W$ 计算无扰动情况下的损耗功率。平板表面的电场与磁场由导体的瞬时阻抗相互关联。假定这个阻抗是有很大的电导率 σ 以至于

$$\boldsymbol{E}_W = \sqrt{\mu\varepsilon_W}\,\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_W \approx \sqrt{\omega\mu/\mathrm{i}\sigma}\,\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_W$$

其中，我们假设导电板和板中介质的磁导率均为 μ。注意尽管 $\boldsymbol{E}_W$ 与 $\boldsymbol{J}_s$ 同方向，但 $\sigma\boldsymbol{E}_W$ 并不等于 $\boldsymbol{J}_s$。这是由于 $\boldsymbol{J}_s$ 只是面电流而不是体电流。从量纲上来讲，$\sigma\boldsymbol{E}_W$ 的量纲是 $\mathrm{A/m^2}$ 而 $\boldsymbol{J}_s$ 的量纲是 A/m。

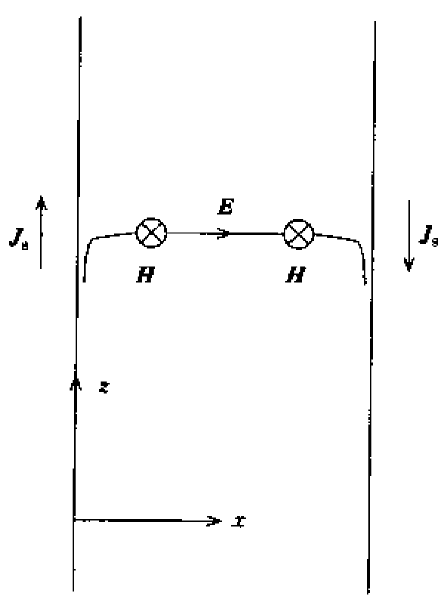


图 3.5-8 有限大的导电壁

单位长度上所耗散的功率 P_d,等于沿着板壁向波传播的方向在与 $\hat{z}$ 垂直的平面内的时间平均功率密度 $\langle \boldsymbol{E}_W \cdot \boldsymbol{J}_s^* \rangle$ 的面积分。

$$P_d = \oint dl \langle \boldsymbol{E}_W \cdot \boldsymbol{J}_s^* \rangle$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{ \oint dl \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} (\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_W) \cdot (\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_W^*) \right\}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \oint dl \mid \boldsymbol{H}_W \mid^2 \tag{3.5.34}$$

式中 $\boldsymbol{H}_W$ 是未作扰动的波导壁表面上的切向磁场分量。在推导中用到了矢量恒等式

$$(\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_W) \cdot (\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_W^*) = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot [\boldsymbol{H}_W \times (\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_W)]$$
$$= \hat{\boldsymbol{n}} \cdot [\hat{\boldsymbol{n}} \mid \boldsymbol{H}_W \mid^2 - (\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{H}_W) \boldsymbol{H}_W^*]$$

并且,由于 $\boldsymbol{H}_W$ 垂直于波导壁表面的法线方向 $\hat{\boldsymbol{n}}$,从而有 $\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{H}_W^* = 0$。

可以从下面的角度推导出上面的结果。由于波导中的导行波可以看做是平面波在波导壁上的来回反射,入射到导电介质表面的平面波会有功率耗散到导体中去。对于高导电率的介质材料,无论入射角如何,介质中透射的平面波都是几乎垂直于介质表面的。进入导体材料的时间平均坡印廷功率密度流是 $-\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \langle \boldsymbol{E}_W \times \boldsymbol{H}_W^* \rangle$。沿着垂直于 $\hat{z}$ 的方向在波导壁的长度上进行积分就可以得到式(3.5.34)。

现在考虑 TM_m 模的精确解

$$\boldsymbol{H} = \hat{y} H_m \cos\frac{m\pi x}{d} e^{ik_z z}$$
$$\boldsymbol{E} = H_m\left(\hat{x}\frac{k_z}{\omega\epsilon}\cos\frac{m\pi x}{d} - \hat{z}\frac{im\pi}{\omega\epsilon d}\sin\frac{m\pi x}{d}\right)e^{ik_z z} \tag{3.5.35}$$

波导中的时间平均功率流 P_f 为

$$P_f = \int_0^d dx \int_0^W dy \, \frac{1}{2}\frac{k_z}{\omega\epsilon} \mid H_m \mid^2 \cos^2\frac{m\pi x}{d}$$
$$= \frac{wd}{4}\frac{k_z}{\omega\epsilon}(1 + \delta_{0m}) \mid H_m \mid^2 \tag{3.5.36}$$

式中,δ_{0m} 是 Kronecker delta 函数

$$\delta_{0m} = \begin{cases} 0 & m \neq 0 \\ 1 & m = 0 \end{cases}$$

单位长度上的时间平均功率耗散 P_d 为

$$P_d = 2\int_0^w dy \, \frac{1}{2} \mid H_m \mid^2 \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = w\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \mid H_m \mid^2 \tag{3.5.37}$$

式中积分号前面的因子2是由于在 $x = 0$ 和 $x = d$ 处的两个波导壁上磁场 H_m 的幅度相等。进一步可以得到衰减常数 α 为

$$\alpha^{\mathrm{TM}} = \frac{P_d}{2P_f} = \frac{1}{d}\sqrt{\frac{\omega\epsilon}{2\sigma}}\frac{2/(1 + \delta_{0m})}{\sqrt{1 - (k_{cm}/k)^2}} \tag{3.5.38}$$

应该注意,对于 TEM 模,或称为 TM_0 模,相应的衰减常数为

$$\alpha^{\mathrm{TEM}} = \frac{1}{d}\sqrt{\frac{\omega\epsilon}{2\sigma}} \tag{3.5.39}$$

通过相似的推导过程,可以得到 TE 模的衰减常数为

$$\alpha^{\mathrm{TE}} = \frac{1}{d}\sqrt{\frac{\omega\epsilon}{2\sigma}}\frac{2(k_{cm}/k)^2}{\sqrt{1-(k_{cm}/k)^2}} \tag{3.5.40}$$

图 3.5-9 绘出了 TEM,TM 和 TE 模式的衰减常数随波数变化的曲线。如果令 $\omega_c = m\pi/\sqrt{\mu\varepsilon}d$,那么对于所有的 TE_m 模和 TM_m 模,曲线的形状都是相同的。可以注意到,TEM 模的 α 与频率 ω 的平方根成正比,而 TE 模的 α 则随着频率的增加而单调减小。

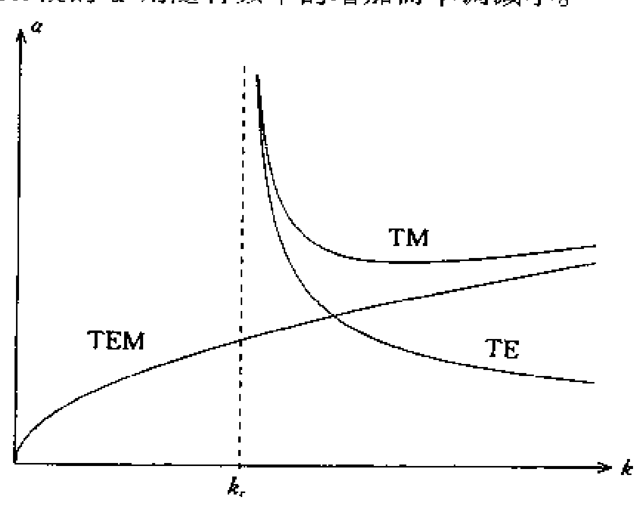


图 3.5-9 衰减常数

3.5.2 介质片波导中的导行波

考虑图 3.5-10 所示的对称结构的介质片波导,其边界位置为 $x=0$ 和 $x=d$。

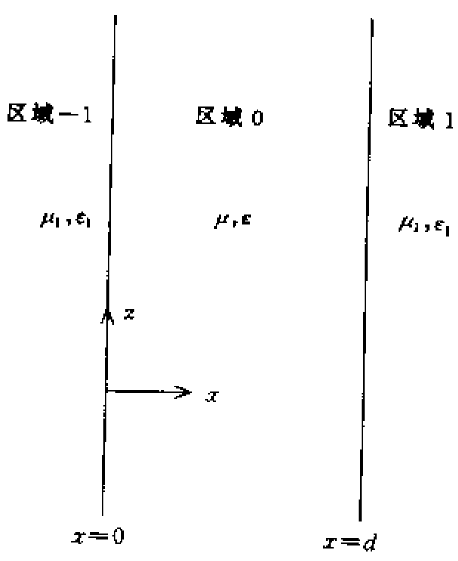


图 3.5-10 介质片波导中的导行

下面首先研究 TE 波解。对于介质片内部的导行波,在介质片外部 E_{-1y} 和 E_{1y} 的解必须是沿 $-\hat{x}$ 和 $+\hat{x}$ 方向的凋落波。由于区域 −1 和区域 1 是相同的,可以写出三个区域中电场矢量的解的形式

$$\boldsymbol{E}_1 = \hat{y}E_1\mathrm{e}^{-k_{1x}x+\mathrm{i}k_z z} \qquad d\leqslant x \tag{3.5.41}$$

$$\boldsymbol{E}_0 = \hat{y}(A_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x} + B_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_x x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z} \qquad 0\leqslant x\leqslant d \tag{3.5.42}$$

$$\boldsymbol{E}_{-1} = \hat{y}E_{-1}\mathrm{e}^{k_{1x}x+\mathrm{i}k_z z} \qquad x\leqslant 0 \tag{3.5.43}$$

区域 −1 和区域 1 中的解都是倏逝衰减波,$\boldsymbol{E}_1$ 沿着 $+\hat{x}$ 方向衰减而 $\boldsymbol{E}_{-1}$ 沿着 $-\hat{x}$ 方向衰减。

在区域 -1,0 和 1 中的色散关系分别为

$$k_z^2 - k_{1xl}^2 = \omega^2\mu_1\varepsilon_1 = k_1^2 \tag{3.5.44}$$

$$k_z^2 + k_x^2 = \omega^2\mu\varepsilon = k^2 \tag{3.5.45}$$

在图 3.5-11 中绘出了半径分别为 k_1 和 k 的两个 k 表面,在图中正的 k_z 为纵轴,k_x 为横轴。对于导行波必须有 $k > k_1$。当 k_z 变得小于 k_1 时,由于 k_{1x1}将变成虚数,相应的波也将开始传播,所以区域 -1 和区域 1 中的波将不再是衰减的凋落波。只有当 $k_z > k_1$ 时,区域 0 中的波才是导行波。

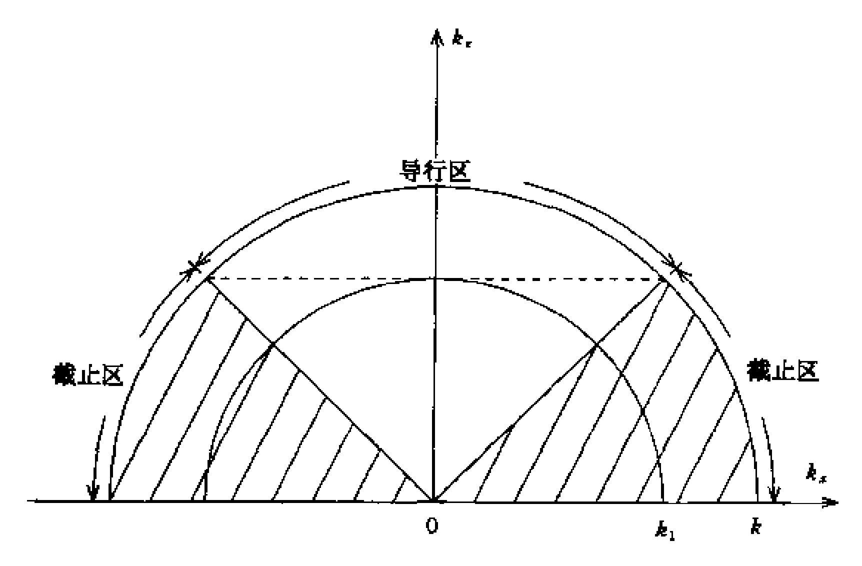


图 3.5-11　导行和截止区域

令 $B_0/A_0 = R_{0+}$, $A_0/B_0 = R_{0-}$,导行条件为

$$R_{0+}R_{0-} = 1 \tag{3.5.46}$$

反射系数为

$$R_{0+} = \frac{1 - p_{01}}{1 + p_{01}} e^{i2k_x d} \tag{3.5.47}$$

$$R_{0-} = \frac{1 - p_{0(-1)}}{1 + p_{0(-1)}} \tag{3.5.48}$$

对于 TE 波式中 $p_{01} = p_{0(-1)} = i\mu k_{1x1}/\mu_1 k_x = ip_{01}$。由(3.5.47)和(3.5.48)式可以得到 $A_0/B_0 = (1 - P_{01})/(1 + P_{01}) = R_{01}$。由于 $R_{01} = e^{i2\phi_{01}}$和 $2\phi_{01} = -2\arctan p_{01I} = \arctan(\mu k_{1x1}/\mu_1 k_x)$是边界上的 Goos-Hanchen 相移,可以看到比值 A_0/B_0 在 $x = 0$ 的边界面上有一个相移 $2\phi_{01}$。在 $x = d$ 处,$B_0/A_0 = R_{01}e^{i2k_x d}$,相应附加相移为 $2k_x d + 2\phi_{01}$。导行条件将变成 $R_{01}^2 e^{i2k_x d} = e^{i2k_x d + i4\phi_{01}} = 1$,从而有

$$2k_x d + 4\phi_{01} = 2m\pi \tag{3.5.49}$$

沿 $\hat{x}$ 方向反射引起的总的横向相移加上平面波来回的波程等于 2π 的整数倍。

对于对称结构的介质片波导,可以用图示方法确定传播常数 k_z。重新写出色散关系为

$$(k_z d)^2 + (k_x d)^2 = (kd)^2 \tag{3.5.50}$$

$$(k_z d)^2 - (k_{1x1} d)^2 = (k_1 d)^2 \tag{3.5.51}$$

导行条件(3.5.49)可以写成下面的形式

$$k_{1x1} d = \frac{\mu_1}{\mu} k_x d \tan\left(\frac{k_x d}{2} - \frac{m\pi}{2}\right) \tag{3.5.52}$$

当 m 为偶数时,可以得到 $k_{1x1}d=\frac{\mu_1 k_x d}{\mu}\tan\left(\frac{k_x d}{2}\right)$;当 m 为奇数时,可以得到 $k_{1x1}d=-\frac{\mu_1 k_x d}{\mu}\times\cot\left(\frac{k_x d}{2}\right)$。导行条件可以在 $k_{1x1}d$ 和 $k_x d$ 确定的二维平面上绘图表示(图 3.5-12)。

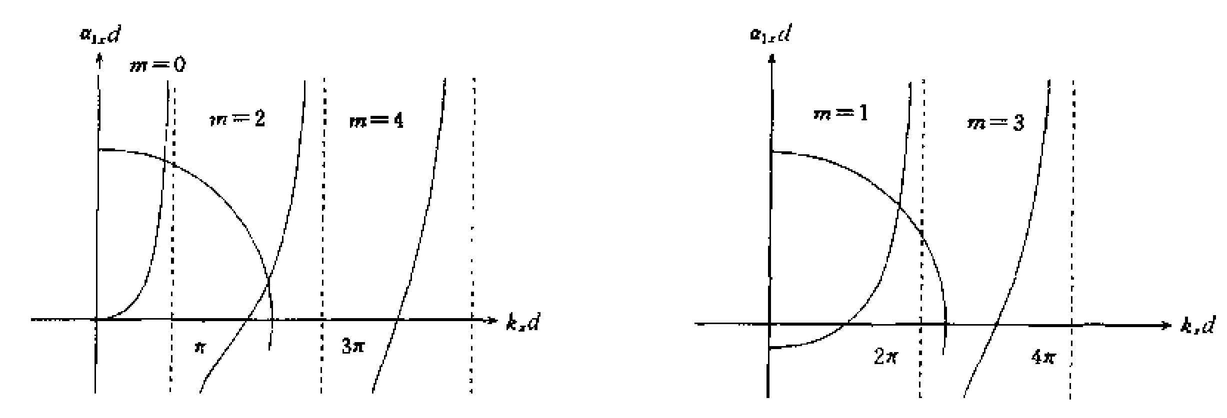


图 3.5-12 导行条件的说明

从色散关系(3.5.50)和(3.5.51)中消去变量 k_z。可以得到 $k_{1x1}d$-$k_x d$ 平面上的一族圆。

$$(k_x d)^2+(k_{1x1}d)^2=(k^2-k_1^2)d^2 \tag{3.5.53}$$

式(3.5.52)和(3.5.53)所表示的两族曲线的交点给出了 k_x 和 k_{1x1}的值,反过来又确定了 k_z。可以看到,波数 k 的幅度越大,圆的半径越大,两族曲线的交点越多,所以导行波的模式也越多。需要注意的是为了保证波是指数衰减而不会指数增长,必须有 $k_{1x1}d>0$。当 $k_{1x1}=0$ 时发生截止,根据式(3.5.51)得 $k_z=k_1$。利用式(3.5.50)和 $\phi_{01}=0$ 时的导行条件(3.5.49),可以得到截止波数

$$k_{cm}=\frac{m\pi}{d\sqrt{1-\mu_1\epsilon_1/\mu\epsilon}} \tag{3.5.54}$$

所以,TE_0 模和 TM_0 模的截止波数为 0。对于每个满足导行条件的 k_x 的取值,对应的 k_z 由式(3.5.50)决定。

可以看到随着 k 的增加,介质片波导中将有更多的导行波模式。我们希望能够绘图表示不同模式的 k_z 随 k 变化的函数曲线。根据 k_z-k 图像,可以确定相速和群速。这样的图像既可以是图形形式的,也可以是数值形式的。这里将特别检验当 $k\to\infty$ 和 $k\to k_c$ 时 k_z-k 图像的反对称特征,其中 k_c 由式(3.5.54)决定。

当 $k\to\infty$ 时,从图 3.5-12 可以得到一个常数 $k_x=(m+1)\pi/d$。忽略式(3.5.50)中的 $k_x d$,可以发现

$$k_z=k \tag{3.5.55}$$

在 k_z-k 图像中,这是一条单位斜率的直线。当 $k\to k_c$ 时,$\alpha_x\to 0$,根据式(3.5.51)可以得到

$$k_z=k\sqrt{\frac{\mu_1\epsilon_1}{\mu\epsilon}} \tag{3.5.56}$$

在 k_z-k 图像中,这是一条斜率为$(\mu_1\epsilon_1/\mu\epsilon)^{1/2}$的直线。当 $k\to\infty$ 时,群速为$(\mu\epsilon)^{1/2}$,这正是介质片中的光速。当 $k\to k_c$ 时,群速为$(\mu_1\epsilon_1)^{-1/2}$,这是介质片外部区域中的光速。通过计算 $\partial k_z/\partial\omega$ 可以看到当 $k_c<k<\infty$ 时,群速小于$(\mu_1\epsilon_1)^{-1/2}$,大于$(\mu\epsilon)^{-1/2}$。图 3.5-13 给出了不同模式的 k_z-k 曲线。

根据式(3.5.41)~(3.5.43)和导行条件,对称结构介质片波导中场的解为

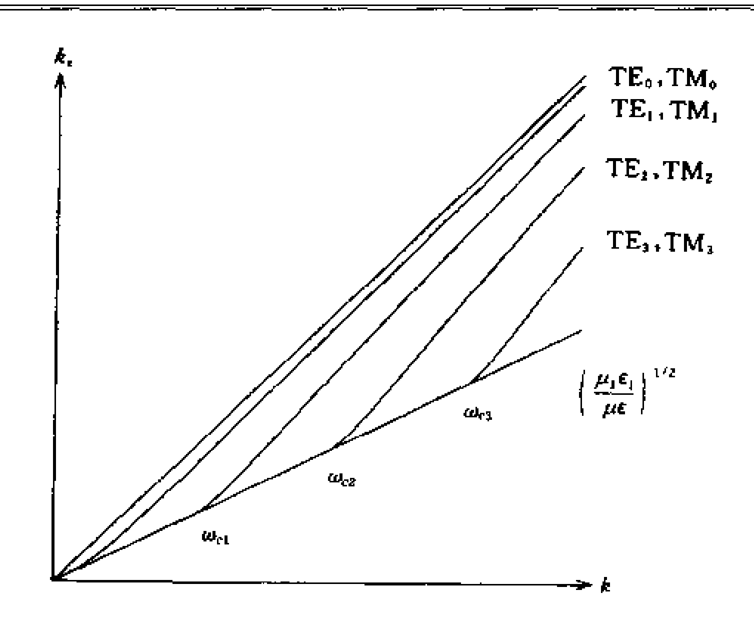


图 3.5-13　传播常数 k_z 随波数 k 变化的函数曲线

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_0 &= \hat{y}A_0(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x} + R_+^{\mathrm{TE}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_x x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z} \\ &= \hat{y}A_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{01}+\mathrm{i}k_x d}\left[2\cos\left(k_x x - \frac{1}{2}k_x d - \frac{m\pi}{2}\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z} \end{aligned} \tag{3.5.57}$$

在图 3.5-14 中，绘出了 $m=0$ 和 $m=1$ 情况下的 E_y 场。必须记住，$k_x d$ 可以根据图 3.5-12 确定，在图 3.5-12 中可以看到对于 m 阶模式有 $m\pi/k_x d<(m+1)\pi$。所以模式的阶数越高，介质片内部区域的变化也越多。

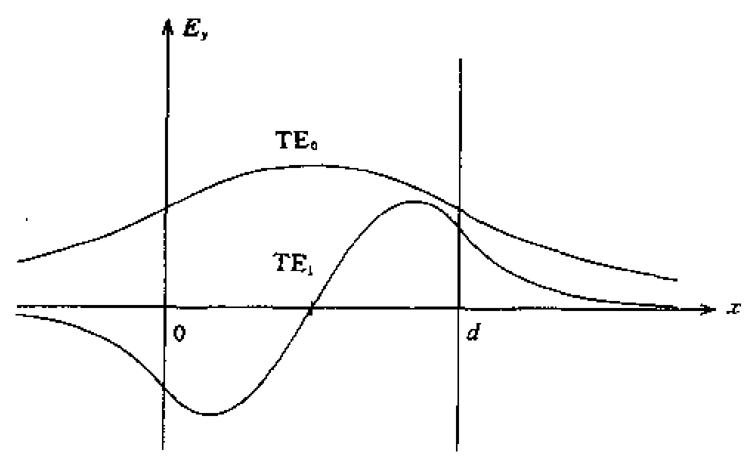


图 3.5-14　TE₀ 模和 TE₁ 模的场的幅度

3.5.3　分层介质中的导行波

考虑图 3.5-15 所示的分层介质，现在根据 3.4 节中给出的反射系数的表达式研究区域 0 中的波的导行，可以写出任意介质层 l 中 TE 波解的形式为

$$E_{ly} = (A_l\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{lx}x} + B_l\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{lx}x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z} \tag{3.5.58}$$

根据边界面 $x=d_l$ 上电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量连续的边界条件可以得到

$$A_{l-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{(l-1)x}d_l} + B_{l-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{(l-1)x}d_l} = A_l\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{lx}d_l} + B_l\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{lx}d_l} \tag{3.5.59}$$

$$A_{l-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{(l-1)x}d_l} - B_{l-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{(l-1)x}d_l} = p_{(l-1)l}(A_l\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{lx}d_l} - B_l\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{lx}d_l}) \tag{3.5.60}$$

式中，

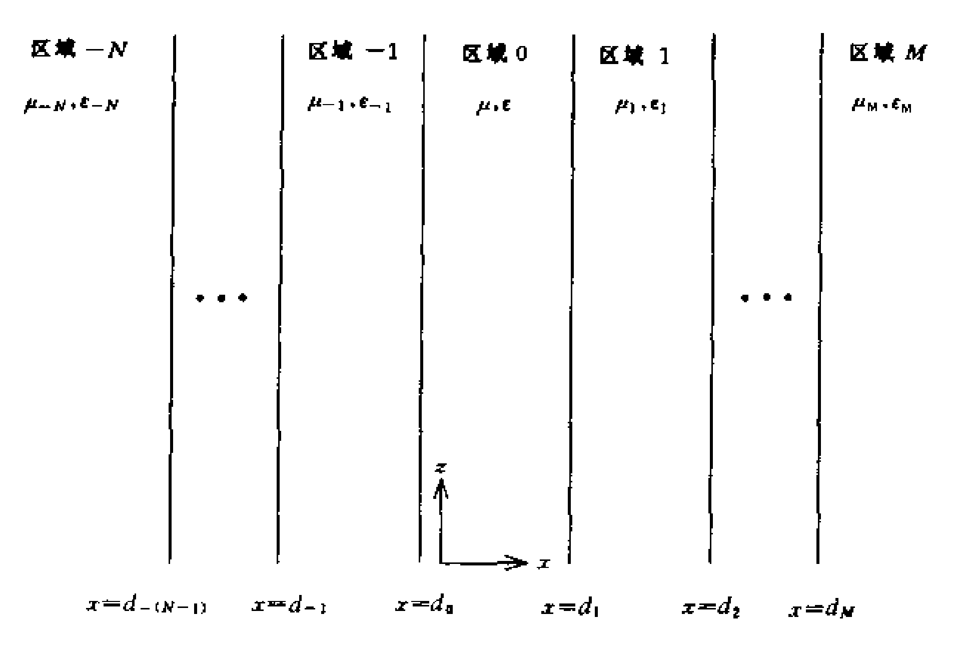


图 3.5-15 分层介质中的导行波

$$p_{(l-1)l} = \frac{\mu_{l-1}k_{lx}}{\mu_l k_{(l-1)x}} \tag{3.5.61}$$

对于 TM 波有

$$p_{(l-1)l} = \frac{\varepsilon_{l-1}k_{lx}}{\varepsilon_l k_{(l-1)x}} \tag{3.5.62}$$

可以注意到 $p_{l(l-1)} = 1/p_{(l-1)l}$。通过求解方程，用 A_l 和 B_l 表示 A_{l-1} 和 B_{l-1}，可以得到

$$A_{l-1}e^{ik_{(l-1)x}d_l} = \frac{1}{2}(1 + p_{(l-1)l})[A_l e^{ik_{lx}d_l} + R_{(l-1)l}B_l e^{-ik_{lx}d_l}] \tag{3.5.63}$$

$$B_{l-1}e^{-ik_{(l-1)x}d_l} = \frac{1}{2}(1 + p_{(l-1)l})[R_{(l-1)l}A_l e^{ik_{lx}d_l} + B_l e^{-ik_{lx}d_l}] \tag{3.5.64}$$

通过求解方程，用 A_{l-1} 和 B_{l-1} 表示 A_l 和 B_l，可以得到

$$A_l e^{ik_{lx}d_l} = \frac{1}{2}(1 + p_{l(l-1)})[A_{l-1}e^{ik_{(l-1)x}d_l} + R_{l(l-1)}B_{l-1}e^{-ik_{(l-1)x}d_l}] \tag{3.5.65}$$

$$B_l e^{ik_{lx}d_l} = \frac{1}{2}(1 + p_{l(l-1)})[R_{l(l-1)}A_{l-1}e^{ik_{(l-1)x}d_l} + B_{l-1}e^{-ik_{(l-1)x}d_l}] \tag{3.5.66}$$

式中，

$$R_{(l-1)l} = \frac{1 - p_{(l-1)l}}{1 + p_{(l-1)l}} \tag{3.5.67}$$

和

$$R_{l(l-1)} = -R_{(l-1)l} \tag{3.5.68}$$

是第 $l-1$ 层介质与第 l 层介质之间边界上的菲涅耳反射系数。在区域 0 中，分别定义由 $x>0$ 的介质层和由 $x<0$ 的介质层引起的反射系数为 R_+ 和 R_- 满足

$$B_0 = R_+ A_0 \tag{3.5.69}$$

$$A_0 = R_- B_0 \tag{3.5.70}$$

根据式(3.5.63)～(3.5.66)，可以用连分式求反射系数 R_+ 和 R_-。由式(3.5.54)和(3.5.55)可以得到

$$R_+ = \frac{B_0}{A_0} = \frac{e^{i2k_xd_1}}{R_{01}} + \frac{[1-(1/R_{01}^2)]e^{i2(k_{1x}+k_x)d_1}}{(1/R_{01})e^{i2k_{1x}d_1}+(B_1/A_1)} \tag{3.5.71}$$

式中 B_1/A_1 可以用 B_2/A_2 表示，并依次类推直到区域 M，在该层介质中 $B_M/A_M=0$。由式(3.5.65)和(3.5.66)可以得到

$$R_- = \frac{A_0}{B_0} = \frac{e^{-i2k_xd_0}}{R_{0(-1)}} + \frac{[1-(1/R_{0(-1)}^2)]e^{-i2(k_{(-1)x}+k_x)d_0}}{(1/R_{0(-1)})e^{-i2k_{(-1)x}d_0}+(A_{-1}/B_{-1})} \tag{3.5.72}$$

式中，A_{-1}/B_{-1} 可以用 A_{-2}/B_{-2} 表示，并依此类推直到区域 $-N$，在该层介质中 $A_{-N}/B_{-N}=0$。

根据式(3.5.69)和(3.5.70)，可以得到

$$R_+ R_- = 1 \tag{3.5.73}$$

这就是区域 0 中导行波的导行条件。

例 3.5.3　平行板波导中的导行波。

现在根据上面给出的分层介质中导行波的一般公式，研究几种特殊情况。这个例子将专门研究两个平行的导体板之间波的导行。令 $d_0=0$，对于 TE 波反射系数为

$$R_+^{TE} = -e^{i2k_xd_1} \tag{3.5.74}$$

$$R_-^{TE} = -1 \tag{3.5.75}$$

根据导行条件(3.5.73)可以得到

$$k_xd_1 = m\pi \tag{3.5.76}$$

对于 TM 波，反射系数为

$$R_+^{TM} = e^{i2k_xd_1} \tag{3.5.77}$$

$$R_-^{TM} = 1 \tag{3.5.78}$$

根据导行条件(3.5.73)可以得到与式(3.5.76)相同的结果。

求 TE 波解 E_{0y} 可以得到

$$\begin{aligned} E_{0y} &= B_0(R_-^{TE}e^{ik_xx}+e^{-ik_xx})e^{ik_zz} \\ &= -i2B_0\sin k_xx\,e^{ik_zz} \end{aligned}$$

求 TM 波解 H_{0y} 可以得到

$$\begin{aligned} H_{0y} &= A_0(e^{ik_xx}+R_-^{TM}e^{-ik_xx})e^{ik_zz} \\ &= 2A_0\cos k_xx\,e^{ik_zz} \end{aligned}$$

在前面的章节中已经对这些解进行了研究。

例 3.5.4　具有各向同性介质涂层的导体中的导行波。

考虑图 3.5-16 所示的有各向同性介质涂层的导体。如果导行波在区域 0 中传播，那么区域 1 中的场必须是沿 $\hat{x}$ 方向衰减的凋落波。可以写出 TE 模场的解为

$$\boldsymbol{E}_1 = \hat{y}E_1e^{-k_{1x1}x}e^{ik_zz} \qquad d \leqslant x \tag{3.5.79a}$$

$$\boldsymbol{E}_0 = \hat{y}(A_0e^{ik_xx}+B_0e^{-ik_xx})e^{ik_zz} \quad 0 \leqslant x \leqslant d \tag{3.5.79b}$$

两个区域中的色散关系分别为

$$k_z^2 - \alpha_{1x}^2 = \omega^2\mu_1\epsilon_1 = k_1^2 \tag{3.5.80a}$$

$$k_z^2 + k_x^2 = \omega^2 \mu\varepsilon = k^2 \tag{3.5.80b}$$

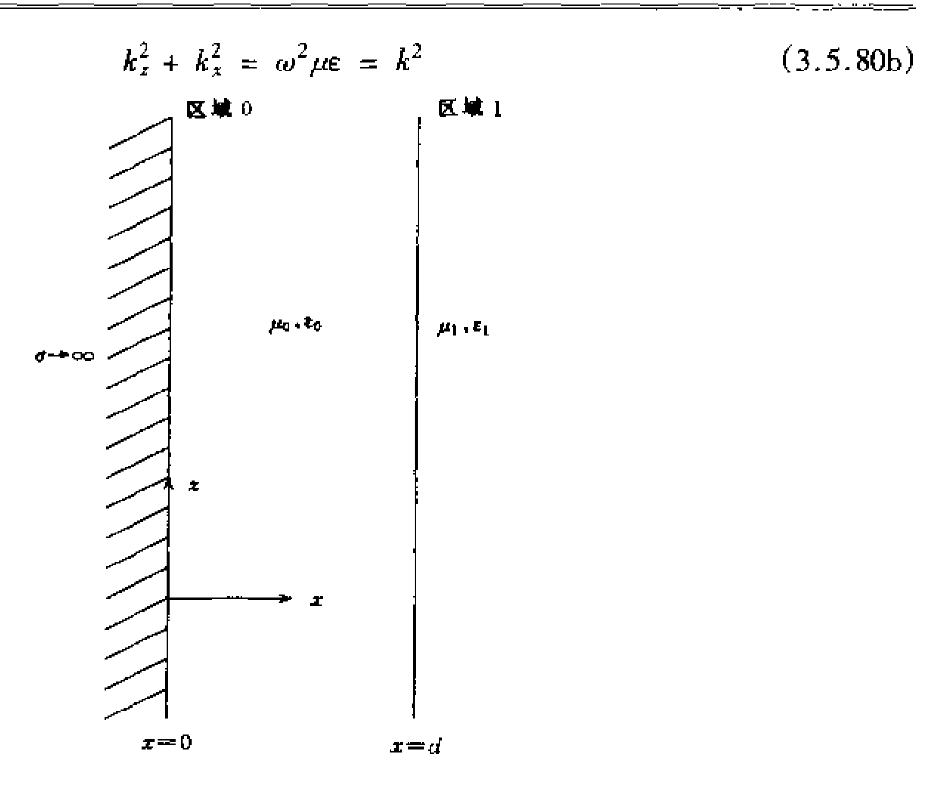


图 3.5-16 具有各向同性介质涂层的导体的导行

在图 3.5-17 中绘出了半径分别为 k_1 和 k 的两个 k 表面，在图中正的 k_z 为纵轴，k_x 为横轴。对于导行波必须有 $k > k_1$。当 k_z 变得小于 k_1 时，由于 α_x 将变成虚数，区域 1 中的波将不再是衰减的凋落波，它将沿 $\hat{x}$ 方向传播。只有当 $k_z > k_1$ 时，区域 0 中的波才是导行波。

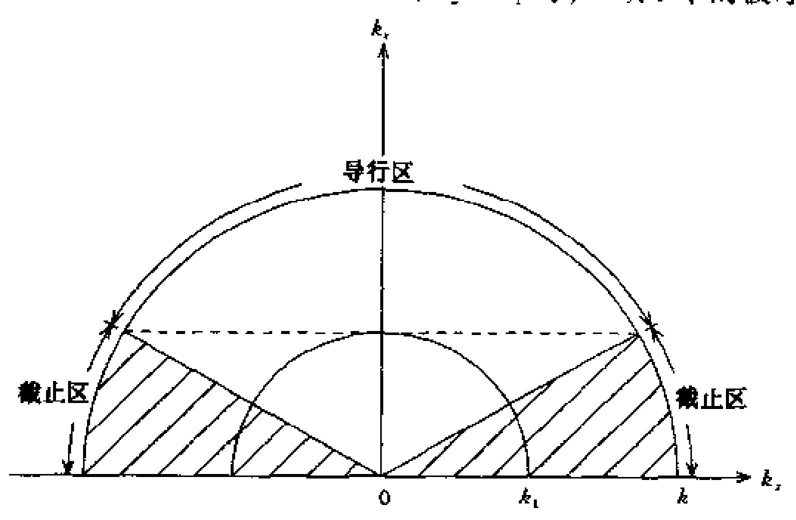


图 3.5-17 导行与截止区域

令 $B_0/A_0 = R_{0+}$，$A_0/B_0 = R_{0-}$，则导行条件为

$$R_{0+} R_{0-} = 1 \tag{3.5.81}$$

对 TE 波反射系数 R_{0+} 和 R_{0-} 为

$$R_{0+} = \frac{1 - p_{01}}{1 + p_{01}} e^{i2k_x d} \tag{3.5.82}$$

$$R_{0-} = -1 \tag{3.5.83}$$

其中，$p_{01} = i\mu k_{1xI}/\mu_1 k_x$ 由式(3.5.83)可以得到 $A_0/B_0 = -1$，如果将人射波看做幅度为 A_0 的平面波，相应的反射波是幅度为 B_0 的平面波，那么在 $x = 0$ 的边界面上由于反射引起的附加相

移为 π。根据式(3.5.82)可以得到 $B_0/A_0 = R_{01}e^{i2k_xd}$,它可以看做是在 $x = d$ 的边界上发生$R_{01} = e^{i2\phi_{01}}$ 的全反射,$2\phi_{01} = -2\arctan(\mu k_{1xI}/\mu_1 k_x)$ 为 Goos-Hanchen 相移。导行条件将变成 $-R_{01}e^{i2k_xd} = 1$,从而有

$$2k_xd + 2\phi_{01} + \pi = 2m\pi \tag{3.5.84}$$

式中 $m = 1,2,\cdots$。式(3.5.84)的结果表明,沿 $\hat{x}$ 方向的总的横向相移必须是 2π 的整数倍才能保证相互加强的干涉效应。

利用 Goos-Hanchen 相移的表达式

$$2\phi_{01} = -2\arctan(\mu k_{1xI}/\mu_1 k_x)$$

可以得到导行条件的表达式为

$$k_{1xI}d = -\frac{\mu_1}{\mu}k_xd\cot\frac{k_xd}{2} \tag{3.5.85}$$

图 3.5-18 绘出了在 $k_{1xI}d$ 为纵轴,k_xd 为横轴的二维平面上导行条件的表示。根据色散关系(3.5.80a)和(3.5.80b)可以得到 $k_x^2 + k_{1xI}^2 = k^2 - k_1^2$,该方程表示 $k_{1xI}d$-k_xd 平面上的一族圆。可以用图形的方法确定 TE 模的横向波数 k_x。从图中可以看到,对于 TE_m 模有 $(2m-1)\pi/2 < k_xd < m\pi$。利用满足 $A_0/B_0 = -1$ 时的导行条件并在 $x = d$ 处匹配边界条件,可以根据式(3.5.79)得到区域 0 中的电场的解

$$\boldsymbol{E}_0 = \hat{y}\left(\frac{i}{2}E_1e^{-k_{1xI}d}\right)\frac{\sin k_xx}{\sin k_xd}e^{ik_zz}$$

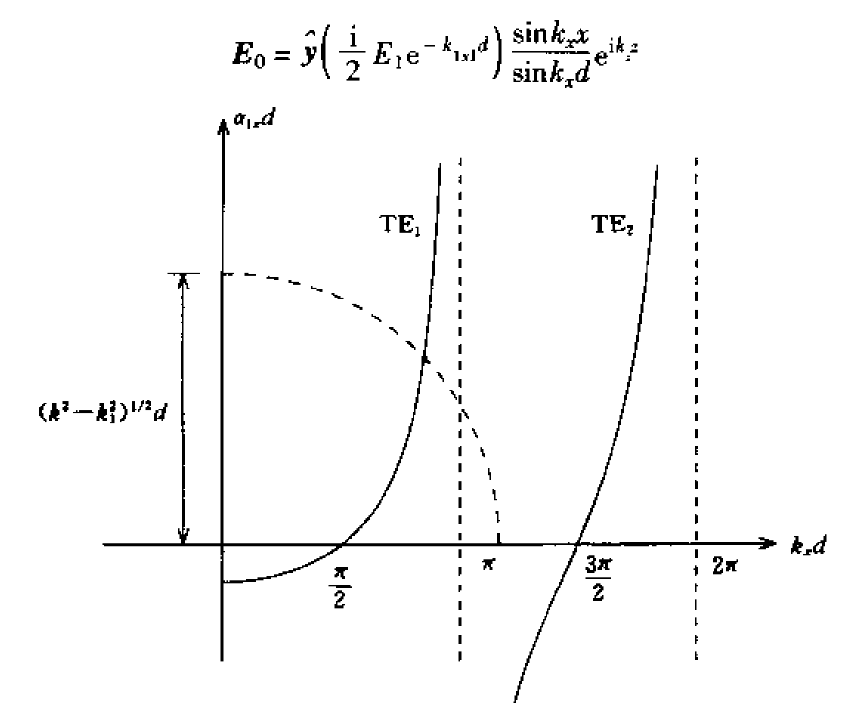


图 3.5-18 TE 模导行条件的说明

在图 3.5-19 中给出了 TE_1 模式和 TE_2 式模的波形。

如图 3.5-18 所示,只有当 $k_z > k$ 时波才能导行。当 k_{1xI}变成虚数时将会发生截止,这种情况下在 $x > d$ 的区域中波将不再是凋落波。截止波数可以根据 $\phi_{01} = k_{1xI} = 0$ 的条件确定,这时 $k_z = k_1$。利用导行条件(3.5.84)和(3.5.80),可以发现 $(2m-1)\pi/2 = k_xd = (k^2 - k_1^2)^{1/2}d$。因此可以得到截止波数

$$k_{cm} = \frac{(2m-1)\pi}{2d\sqrt{1-\mu_1\epsilon_1/\mu\epsilon}} \quad m = 1,2,\cdots \tag{3.5.86}$$

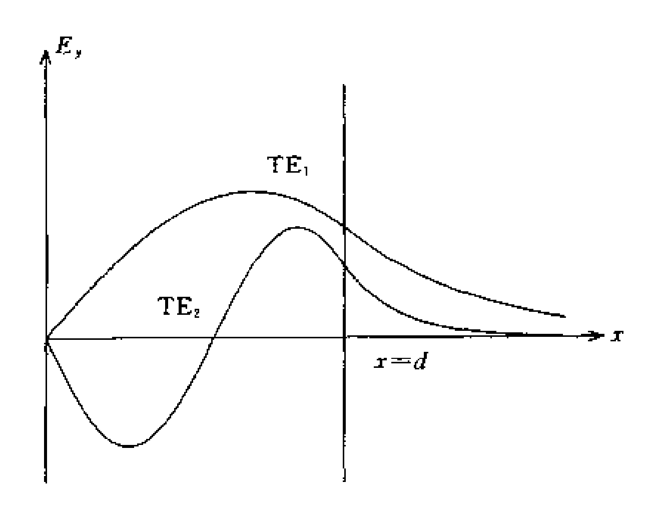


图 3.5-19 TE 模式的电场幅度

可以看到,当 $\mu_1\varepsilon_1$ 非常接近于 $\mu\varepsilon$ 时,TE 模式的截止波数 k_c 很大。

通过相似的推导过程,可以写出 TM 模式场的解为

$$\boldsymbol{H}_1 = \hat{y}H_1 e^{-k_{1x}x+ik_z z} \qquad d \leqslant x \tag{3.5.87a}$$

$$\boldsymbol{H}_0 = \hat{y}(A_0 e^{ik_x x} + B_0 e^{-ik_x x})e^{ik_z z} \qquad 0 \leqslant x \leqslant d \tag{3.5.87b}$$

根据导行条件的要求 $R_{0+}R_{0-}=1$,以及 $R_{0-}=1$,$R_{0+}=(1-p_{01})/(1+p_{01})$ 和 $p_{01}=i\varepsilon k_{1x}/\varepsilon_1 k_x$,可以得到导行条件为

$$2k_x d + 2\phi_{01} = 2m\pi \tag{3.5.88}$$

其中,Goos-Hanchen 相移为 $\phi_{01} = -\arctan(\varepsilon k_{1x}/\varepsilon_1 k_x)$。写成与式(3.5.85)相似的表达式,可以得到

$$\alpha_{1x}d = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}k_x d\tan k_x d \tag{3.5.89}$$

根据图 3.5-20 可以看到,对于 TM_m 模有 $m\pi < k_x d < (2m+1)\pi/2$。利用满足 $A_0/B_0=1$ 时的导行条件并在 $x=d$ 处匹配边界条件,可以得到区域 0 中的磁场的解

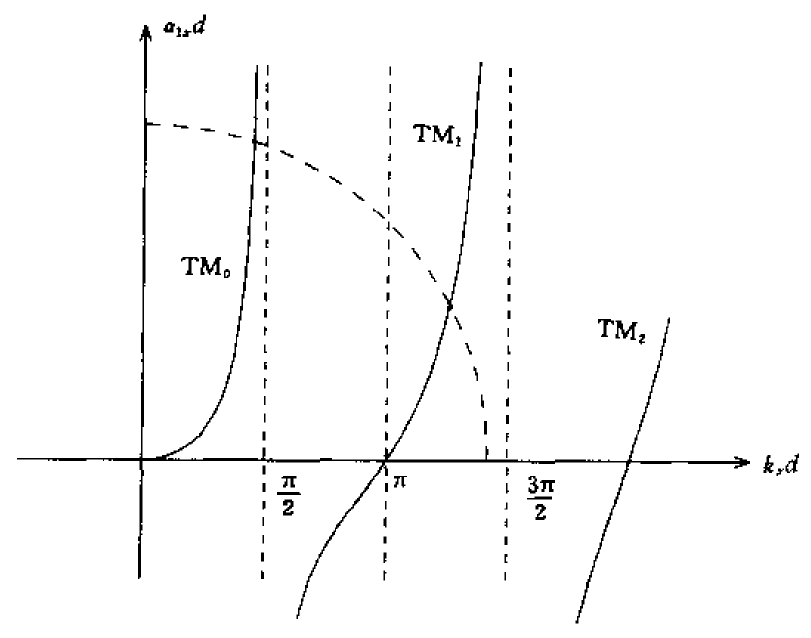


图 3.5-20 TM 模式导行条件的解释

$$H_y = \left(\frac{1}{2}H_0 e^{-k_{1x}d}\right)\frac{\cos k_x x}{\cos k_x d}e^{ik_z z}$$

在图 3.5-21 中给出了 TM_0 模式和 TM_1 模式 H_y 的波形。

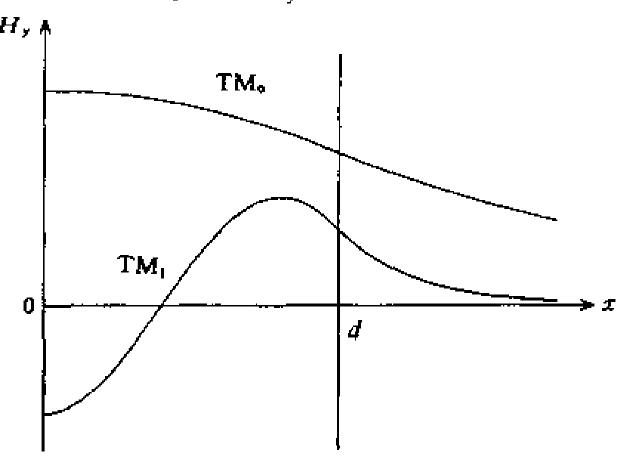


图 3.5-21 TM 模的磁场幅度

截止波数为

$$k_{cm} = \frac{m\pi}{d\sqrt{1-\mu_1\varepsilon_1/\mu\varepsilon}} \quad m = 0,1,2,\cdots \tag{3.5.90}$$

与平行板波导的情况相同,TM_0 模的截止波数为 0,即截止波长为无限大。

例 3.5.5 非对称介质片波导中的导行波。

考虑图3.5-22所示的非对称结构的介质片波导,其边界位置为 $x=0$ 和 $x=d$。现在首先研究 TE 波解。对于介质片内部的导行波,在介质片外部 E_{-1y} 和 E_{1y} 的解必须是沿 $-\hat{x}$ 和 $+\hat{x}$ 方向的凋落波。由于区域 -1 和区域 1 是相同的,可以写出三个区域中电场矢量的解的形式

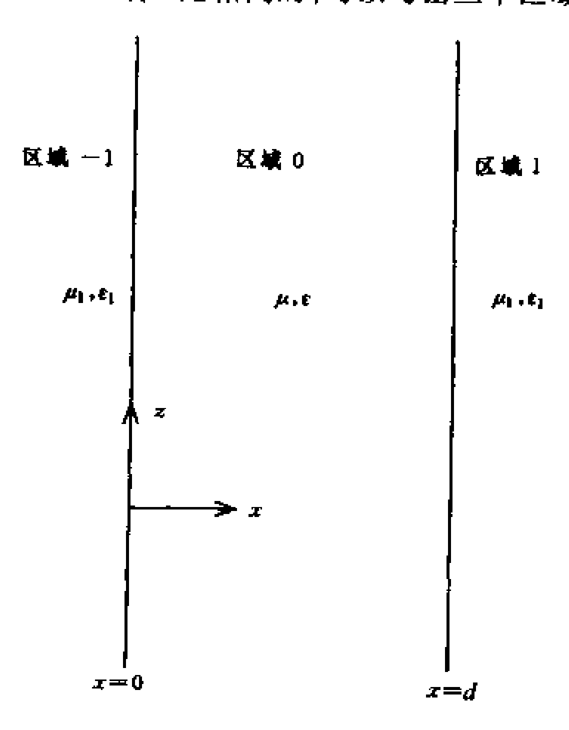


图 3.5-22 非对称介质片波导中的导行

$$\boldsymbol{E}_1=\hat{\boldsymbol{y}}E_1\mathrm{e}^{-k_{1xI}x+\mathrm{i}k_zz}\qquad d\leqslant x \tag{3.5.91}$$

$$\boldsymbol{E}_0=\hat{\boldsymbol{y}}(A_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_xx}+B_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_xx})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_zz}\qquad 0\leqslant x\leqslant d \tag{3.5.92}$$

$$\boldsymbol{E}_{-1}=\hat{\boldsymbol{y}}E_{-1}\mathrm{e}^{k_{1xI}x+\mathrm{i}k_zz}\qquad x\leqslant 0 \tag{3.5.93}$$

区域－1和区域1中的解都是凋落波，$\boldsymbol{E}_1$ 沿着 $+\hat{\boldsymbol{x}}$ 方向衰减而 $\boldsymbol{E}_{-1}$ 沿着 $-\hat{\boldsymbol{x}}$ 方向衰减。在区域－1,0和1中的色散关系分别为

$$k_z^2-k_{1xI}^2=\omega^2\mu_1\varepsilon_1=k_1^2 \tag{3.5.94}$$

$$k_z^2+k_x^2=\omega^2\mu\varepsilon=k^2 \tag{3.5.95}$$

$$k_z^2-k_{-1xI}^2=\omega^2\mu_{-1}\varepsilon_{-1}=k_1^2 \tag{3.5.96}$$

在图3.5-23中，假定 $k_{-1}>k_1$，图中绘出了半径分别为 k_1 和 k 的两个 k 表面，在图中正的 k_z 为纵轴，k_x 为横轴。对于导行波必须有 $k>k_1$。当 k_z 变得小于 k_1 时，由于 k_{1xI}将变成虚数，相应的波将开始沿 $\pm\hat{\boldsymbol{x}}$ 方向传播，区域－1和区域1中的波将不再是衰减的凋落波。只有当 $k_z>k_1$ 时，区域0中的波才是导行波。

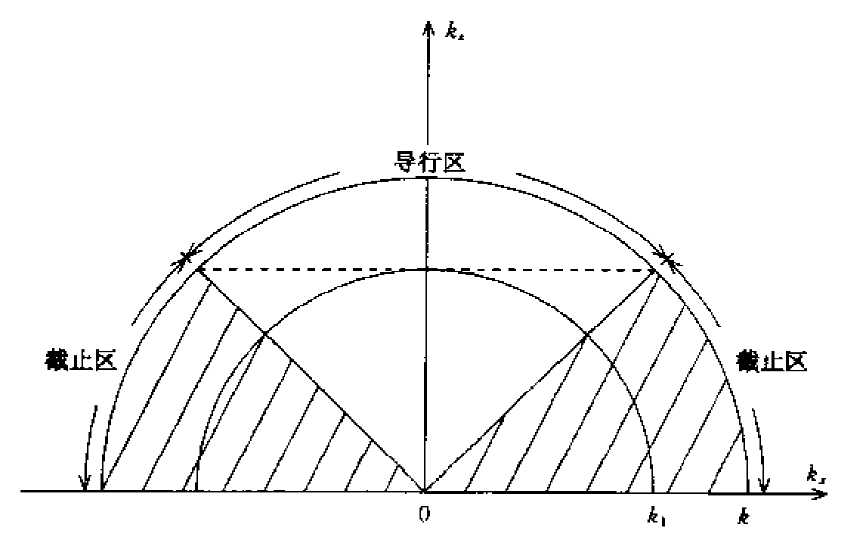


图3.5-23　导行和截止区域

令 $B_0/A_0=R_{0+}$，$A_0/B_0=R_{0-}$，导行条件为

$$R_{0+}R_{0-}=1 \tag{3.5.97}$$

反射系数为

$$R_{0+}=\frac{1-p_{01}}{1+p_{01}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k_xd} \tag{3.5.98}$$

$$R_{0-}=\frac{1-p_{0(-1)}}{1+p_{0(-1)}} \tag{3.5.99}$$

对于TE波，式中 $p_{01}=\mathrm{i}\mu k_{1xI}/\mu_1k_x=\mathrm{i}p_{01}$，$p_{0(-1)}=\mathrm{i}\mu k_{-1xI}/\mu_{-1}k_x=\mathrm{i}p_{0(-1)I}$。在 $x=0$ 的边界上Goos-Hanchen相移 $2\phi_{0(-1)}=-2\arctan p_{0(-1)I}$，在 $x=d$ 的边界上Goos-Hanchen相移 $2\phi_{01}=-2\arctan p_{01I}$。导行条件为

$$2k_xd+2\phi_{0(-1)}+2\phi_{01}=2m\pi \tag{3.5.100}$$

沿 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 方向反射引起的总的横向相移加上平面波来回的波程等于 2π 的整数倍。

与对称结构的介质片波导相同，也可以用图示方法确定传播常数 k_x 和 k_z。非对称结构介质片波导电场的解为

$$\boldsymbol{E}_0=\hat{\boldsymbol{y}}A_0(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_xx}+R_+^{\mathrm{TE}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_xx})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_zz}$$

$$= \hat{y}A_0 e^{i\phi_{01}+ik_x d}[2\cos(k_x x - \phi_{01} - k_x d)]e^{ik_z z} \quad (3.5.101)$$

由于 $n_{-1} > n_1$，所以截止空间频率为

$$k_{cm} = \frac{m\pi}{d\sqrt{1 - \mu_1\epsilon_1/\mu\epsilon}} \quad (3.5.102)$$

TE_0 模式和 TM_0 模式的截止波数都是0。

3.5.4 矩形柱波导

在处理沿 $\hat{z}$ 方向的导行波时，所有场矢量随 z 坐标的变化都采用 $e^{\pm ik_z z}$ 的形式，其中 k_z 为传播常数，± 号表示传播方向为 $+\hat{z}$ 方向或 $-\hat{z}$ 方向。采用这种形式后，就可以用 $-k_z^2$ 代替 $\partial^2/\partial z^2$。由于 $\hat{z}$ 方向在导波理论中的独特位置，可以用它来刻画导波模式。根据麦克斯韦方程，可以表示所有与 $\hat{z}$ 轴平行的场分量。当所有场分量都被分解为横向和纵向分量时，各向同性介质的麦克斯韦方程的两个旋度方程变成

$$\left(\nabla_s + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\boldsymbol{E}_s + \boldsymbol{E}_z) = i\omega\mu(\boldsymbol{H}_s + \boldsymbol{H}_z) \quad (3.5.103)$$

$$\left(\nabla_s + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\boldsymbol{H}_s + \boldsymbol{H}_z) = -i\omega\mu(\boldsymbol{E}_s + \boldsymbol{E}_z) \quad (3.5.104)$$

式中下标 s 表示横向分量。分离横向和纵向分量可以得到

$$i\omega\mu\boldsymbol{H}_s = \nabla_s \times \boldsymbol{E}_z + \hat{z} \times \frac{\partial \boldsymbol{E}_s}{\partial z} \quad (3.5.105)$$

$$-i\omega\epsilon\boldsymbol{E}_s = \nabla_s \times \boldsymbol{H}_z + \hat{z} \times \frac{\partial \boldsymbol{H}_s}{\partial z} \quad (3.5.106)$$

$$i\omega\mu\boldsymbol{H}_z = \nabla_s \times \boldsymbol{E}_s \quad (3.5.107)$$

$$-i\omega\epsilon\boldsymbol{E}_z = \nabla_s \times \boldsymbol{H}_s \quad (3.5.108)$$

根据式(3.5.105)和(3.5.106)并利用矢量恒等式 $\hat{z}\times(\nabla_s\times\boldsymbol{E}_z) = \nabla_s E_z$ 和 $\hat{z}\times(\hat{z}\times\boldsymbol{E}_s) = -\boldsymbol{E}_s$ 可以用 E_z 和 H_z 表示 E_s 和 H_s

$$\boldsymbol{E}_s = \frac{1}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2}\left(\nabla_s\frac{\partial E_z}{\partial z} + i\omega\mu\,\nabla_s \times \boldsymbol{H}_z\right) \quad (3.5.109)$$

$$\boldsymbol{H}_s = \frac{1}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2}\left(\nabla_s\frac{\partial H_z}{\partial z} - i\omega\mu\,\nabla_s \times \boldsymbol{E}_z\right) \quad (3.5.110)$$

在推导中用到了 $\partial^2/\partial z^2 = -k_z^2$, $\boldsymbol{E}_z = \hat{z}E_z$ 和 $\boldsymbol{H}_z = \hat{z}H_z$ 等量关系式。将式(3.5.109)代入(3.5.107)，将式(3.5.110)代入(3.5.108)，可以得到

$$(\nabla_s^2 + \omega^2\mu\epsilon - k_z^2)E_z = 0 \quad (3.5.111)$$

$$(\nabla_s^2 + \omega^2\mu\epsilon - k_z^2)H_z = 0 \quad (3.5.112)$$

方程(3.5.111)和(3.5.112)分别是关于 E_z 和 H_z 的齐次亥姆霍兹方程。可以通过求解方程(3.5.111)和(3.5.112)得到纵向分量并根据式(3.5.109)和(3.5.110)确定横向分量，然后进一步匹配一定的导波结构所要求的边界条件。

矩形金属波导

考虑图3.5-24所示的矩形金属波导，它沿 x 轴方向的尺寸为 a，沿 y 轴方向的尺寸为 b。

首先研究横磁场(TM 场),TM 场的磁场矢量垂直于传播方向。TM 场的 $H_z=0$,它所有的场分量都可以从惟一的纵向场分量 E_z 导出。

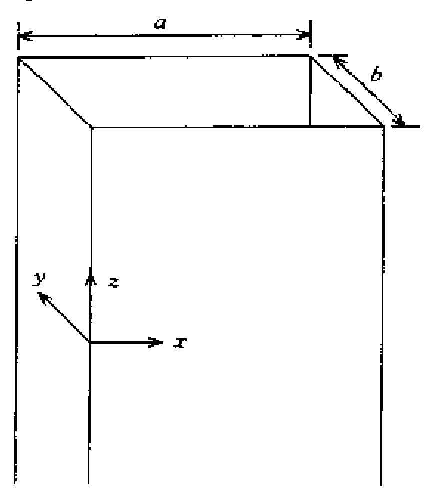


图 3.5-24 矩形金属波导

根据式(3.5.111)并考虑到金属波导壁上切向电场分量消失的边界条件,可以得到

$$E_z = \sin k_x x \sin k_y y \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z} \tag{3.5.113}$$

色散关系为

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2\mu\varepsilon = k^2 \tag{3.5.114}$$

根据式(3.5.109)和(3.5.110)可以得到横向场分量为

$$E_x = \frac{\mathrm{i}k_x k_z}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\cos k_x x \sin k_y y \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z} \tag{3.5.115}$$

$$E_y = \frac{\mathrm{i}k_y k_z}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\sin k_x x \cos k_y y \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z} \tag{3.5.116}$$

$$H_x = \frac{-\mathrm{i}\omega\epsilon k_y}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\sin k_x x \cos k_y y \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z} \tag{3.5.117}$$

$$H_y = \frac{-\mathrm{i}\omega\epsilon k_x}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\cos k_x x \sin k_y y \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z} \tag{3.5.118}$$

可以看到,如果当 $x=0$ 和 $x=a$ 时,E_z 和 E_y 分量消失,当 $y=0$ 和 $y=b$ 时,E_z 和 E_x 分量消失,那么可以得到

$$k_x a = m\pi \tag{3.5.119}$$

$$k_y b = n\pi \tag{3.5.120}$$

式中 m 和 n 是整数。方程(3.5.119)和(3.5.120)就是矩形金属波导的导行条件。对于 TM 波,m 和 n 都不能取 0,否则 E_z 分量也将为 0。将导行条件(3.5.119)和(3.5.120)代入到场分量的表达式中,可以看到 m 越大,则场分量沿 x 的变化越多;n 越大,则场分量沿 y 方向的变化越多。

根据色散关系(3.5.114),导行条件(3.5.119)和(3.5.120),可以得到传播常数

$$k_z = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - (m\pi/a)^2 - (n\pi/b)^2} \tag{3.5.121}$$

根据一定的 m 和 n 的取值,将矩形波导内的 TM 场划分为 TM_{mn} 模。第一个指标 m 表示沿 $\hat{x}$ 方向周期变化的数目,第二个指标 n 表示沿 $\hat{y}$ 方向周期变化的数目。

当传播常数 k_z 变成虚数时发生截止现象,这时波沿着传播方向指数衰减。TM_{mn} 模式的截止波数为

$$k_{cmn} = \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2} \tag{3.5.122}$$

阶数最低的 TM 是 TM_{11}模。在图 3.5-25 中，给出 $a=2b$ 的情况下传播常数 k_z 随 k 变化的函数曲线。例如，如果令 $a=3\text{cm}, b=1.5\text{cm}$，那么可以得到 TM_{11}模的截止波数为 $k_{c11}=234\text{m}^{-1}$。

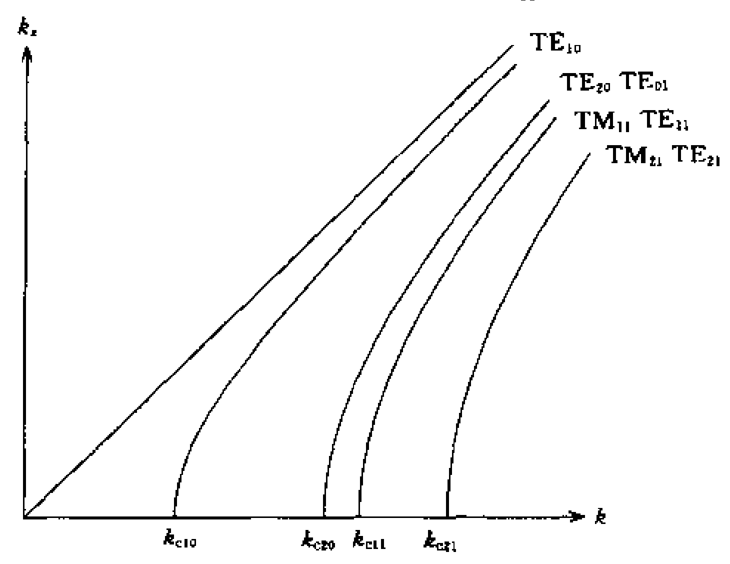


图 3.5-25　导波模式的 k_z-k 图像

下面将给出对于 TE 场($E_z=0$)如何从惟一的纵向场分量 H_z 导出其他场分量的结果。根据式(3.5.112)并考虑到金属波导壁上切向电场分量消失的边界条件，可以得到

$$H_z = \cos k_x x \cos k_y y \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z} \tag{3.5.123}$$

TE 场的色散关系与式(3.5.114)相同。根据式(3.5.109)和(3.5.110)可以得到横向场分量为

$$H_x = \frac{-\mathrm{i}k_x k_z}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2}\sin k_x x \cos k_y y \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z} \tag{3.5.124}$$

$$H_y = \frac{-\mathrm{i}k_y k_z}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2}\cos k_x x \sin k_y y \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z} \tag{3.5.125}$$

$$E_x = \frac{-\mathrm{i}\omega\mu k_y}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2}\cos k_x x \sin k_y y \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z} \tag{3.5.126}$$

$$E_y = \frac{\mathrm{i}\omega\mu k_x}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2}\sin k_x x \cos k_y y \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z} \tag{3.5.127}$$

导行条件可以根据边界条件得到：当 $y=0$ 和 $y=b$ 时，$E_x=0$；当 $x=0$ 和 $x=a$ 时，$E_y=0$。导行条件的结果与式(3.5.119)和(3.5.120)相同。传播常数和截止波数的推导结果也分别与式(3.5.121)和(3.5.122)相同。

但是 TE 模式与 TM 模式也有一个很大的不同。从式(3.5.120)可以注意到，对于 TM_{mn}模无论 m 或者 n 都不能为 0。但对于 TE_{mn}模式，m 和 n 都可以为 0，而且可以同时为 0。当 $m=n=0$ 时，可以得到 $H_z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}$。根据方程$\nabla\cdot \boldsymbol{H}=0$ 可以得到 $k=\omega(\mu\epsilon)^{1/2}=0$，所以 TE_{00}模是波导的静态场解。现在将要证明空心波导中不可能存在 TEM 模式，TEM 模式的纵向电场和纵向磁场都为 0，即 $E_z=H_z=0$。根据麦克斯韦方程的散度方程$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=\nabla\cdot\boldsymbol{H}_s=0$ 以及波导壁上法向磁场为 0 的边界条件，可以看到，磁场 $\boldsymbol{H}$ 必须形成闭合回路，并且$\nabla\times\boldsymbol{H}_t=\hat{z}J_z-\hat{z}\mathrm{i}\omega\epsilon E_z\neq 0$。所以 $J_z\neq 0$，这表示波导不是空心的，或者 $E_z\neq 0$，这表示场不是 TEM 场。作为一个推论，可以看到 TEM 模只有当存在另外一个导体可以支持传导电路 J_z 时才能存在，同轴线就是这样一个例

子。

假定 $a>b$,从式(3.5.122)可以看到阶数最低的 TE 模是 TE_{10}模,该模的截止波数为

$$k_{c10} = \pi/a \tag{3.5.128}$$

TE_{10}模的场分量为

$$H_z = \cos\frac{\pi x}{a}e^{ik_z z} \tag{3.5.129}$$

$$H_x = \frac{-ik_z a}{\pi}\sin\frac{\pi x}{a}e^{ik_z z} \tag{3.5.130}$$

$$E_y = \frac{i\omega\mu a}{\pi}\sin\frac{\pi x}{a}e^{ik_z z} \tag{3.5.131}$$

电场只有 y 分量。TE_{10}模的场分布如图 3.5-26 所示。如果写成两个弹射平面波叠加的形式,则式(3.5.131)变成

$$E_y = \frac{\omega\mu a}{2\pi}\left(e^{i\frac{\pi x}{a}+ik_z z} - e^{-i\frac{\pi x}{a}+ik_z z}\right) \tag{3.5.132}$$

高阶 TE 和 TM 模式也可以解释为平面波在 4 个波导壁之间弹射并且沿 $\hat{z}$ 方向以传播常数 k_z 传播。图 3.5-25 给出了 $a=2b$ 时不同模式的传播常数 k_z。由于 TE_{10}模的截止频率最低,所以它是矩形波导中的基本模式或主模式。

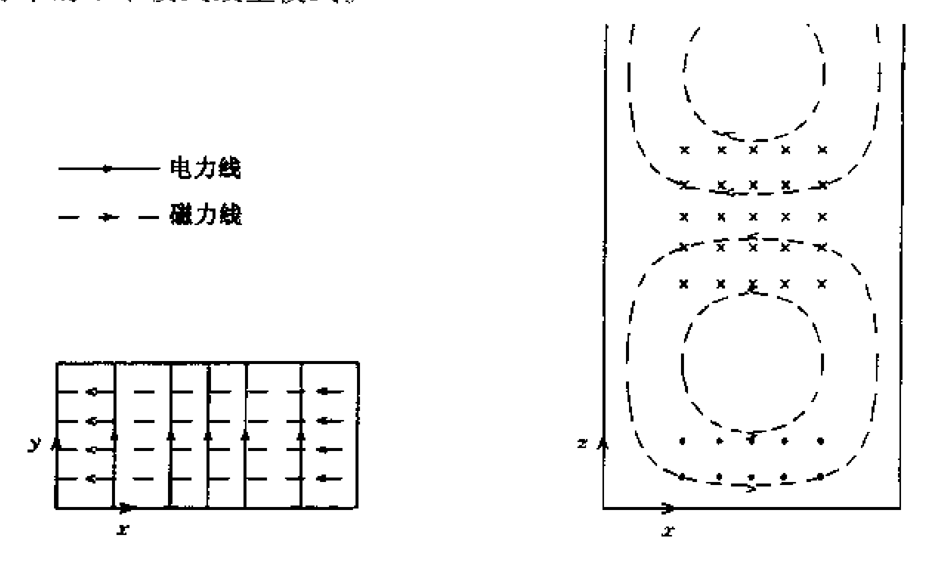


图 3.5-26 矩形波导中的 TE_{10}模

3.5.5 圆柱波导

圆柱金属波导

为了研究圆形截面的柱波导,首先考虑圆柱坐标系中 E_z 和 H_z 的波动方程

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + k_\rho^2\right]\begin{bmatrix}E_z\\H_z\end{bmatrix} = 0 \tag{3.5.133}$$

式中 $k_\rho^2=\omega^2\mu\epsilon-k_z^2$。圆柱坐标系中波动方程的解是贝塞尔函数与正弦函数的乘积。正弦函数可以是 $\sin m\phi$ 与 $\cos m\phi$ 的组合,或者是 $e^{\pm im\phi}$。将其代入式(3.5.133)并进行变量代换 $\xi=k_\rho\rho$,可以得到贝塞尔方程

$$\left[\frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\xi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left(1-\frac{m^2}{\xi^2}\right)\right]B(\xi)=0 \tag{3.5.134}$$

该方程的解为贝塞尔函数 $J_m(\xi)$,诺依曼函数 $N_m(\xi)$,第一类汉开尔函数 $H_m^{(1)}(\xi)$和第二类汉开尔函数 $H_m^{(2)}(\xi)$。两类汉开尔函数与贝塞尔函数和诺依曼函数的关系为

$$H_m^{(1)}(\xi)=J_m(\xi)+\mathrm{i}N_m(\xi) \tag{3.5.135}$$

$$H_m^{(2)}(\xi)=J_m(\xi)-\mathrm{i}N_m(\xi) \tag{3.5.136}$$

这些函数的渐近表达式总结见表 3.5-1。当 $\xi\to\infty$ 时,贝塞尔函数 $J_m(\xi)$呈余弦函数变化,诺依曼函数 $N_m(\xi)$呈正弦函数变化,汉开尔函数 $H_m(\xi)$则呈指数函数变化。当 $\xi\to 0$ 时,除 $J_m(\xi)$之外的其他函数都呈奇异性。

表 3.5-1 $J_m, N_m, H_m^{(1)}$ 和 $H_m^{(2)}$ 的极限性

$B(\xi)$ \ ξ	$\xi\to 0$		$\xi\to\infty$
	$m=0$	$\mathrm{Re}\|m\|>0$	
$J_m(\xi)$	1	$\frac{(\xi/2)^m}{\Gamma(m+1)}$	$\sqrt{2/\pi\xi}\cos(\xi-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4})$
$N_m(\xi)$	$\frac{2}{\pi}\ln\xi$	$-\frac{\Gamma(m)}{\pi}(\frac{2}{\xi})^m$	$\sqrt{2/\pi\xi}\sin(\xi-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4})$
$H_m^{(1)}(\xi)$	$\mathrm{i}\frac{2}{\pi}\ln\xi$	$-\mathrm{i}\frac{\Gamma(m)}{\pi}(\frac{2}{\xi})^m$	$\sqrt{2/\pi\xi}\exp[\mathrm{i}(\xi-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4})]$
$H_m^{(2)}(\xi)$	$-\mathrm{i}\frac{2}{\pi}\ln\xi$	$\mathrm{i}\frac{\Gamma(m)}{\pi}(\frac{2}{\xi})^m$	$\sqrt{2/\pi\xi}\exp[-\mathrm{i}(\xi-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4})]$

用 $B_m(\xi)$表示 $J_m(\xi),N_m(\xi),H_m^{(1)}(\xi)$和 $H_m^{(2)}(\xi)$。贝塞尔函数的递推公式为

$$\begin{aligned}B_m'(\xi)&=B_{m-1}(\xi)-\frac{m}{\xi}B_m(\xi)\\&=-B_{m+1}(\xi)+\frac{m}{\xi}B_m(\xi)\end{aligned} \tag{3.5.137}$$

式中的 $B_m(\xi)$的撇号表示对自变量的求导运算。在图 3.5-27～3.5-29 中给出了 $m=0,1,2$ 时 $J_m(\xi),J_m'(\xi)$和 $N_m(\xi)$的函数曲线。

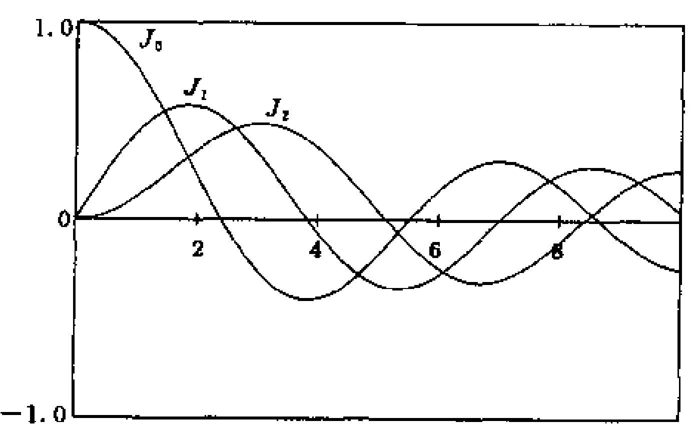


图 3.5-27 贝塞尔函数

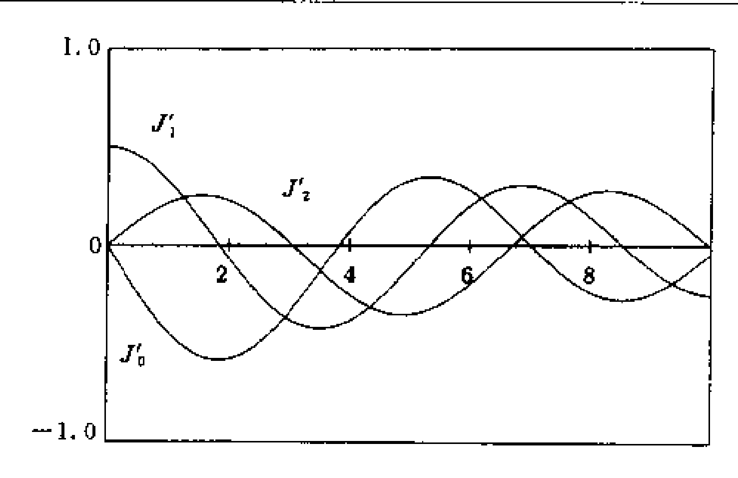


图 3.5-28 贝塞尔函数的导函数

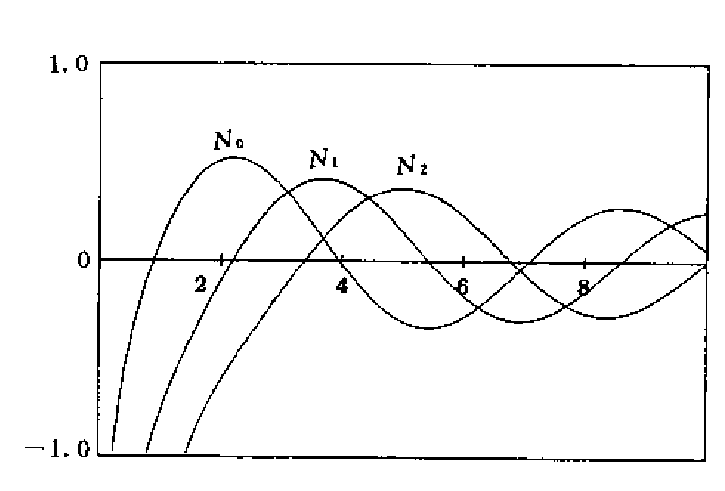


图 3.5-29 诺依曼函数

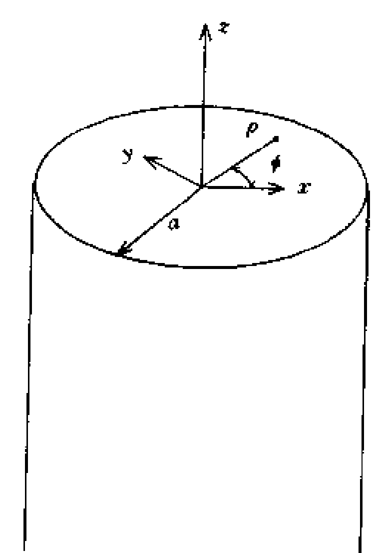


图 3.5-30 圆柱金属波导

考虑如图 3.5-30 所示的半径为 a 的圆柱金属波导。根据边界条件，$\rho = a$ 处的 E_z 和 E_ϕ 分量为 0。由于 $\rho = 0$ 处不能存在场的奇异性，所以贝塞尔函数 J_m 是惟一可能的解。对于 TM 波，可以得到纵向电场为

$$E_z = J_m(k_\rho \rho)\begin{Bmatrix}\sin m\phi \\ \cos m\phi\end{Bmatrix}e^{ik_z z} \tag{3.5.138}$$

色散关系为

$$k_z^2 + k_\rho^2 = \omega^2 \mu\epsilon \tag{3.5.139}$$

根据公式(3.5.109)，(3.5.110)可以得到横向场分量

$$E_\rho = \frac{ik_z k_\rho}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} J_m'(k_\rho \rho)\begin{Bmatrix}\sin m\phi \\ \cos m\phi\end{Bmatrix}e^{ik_z z} \tag{3.5.140}$$

$$E_\phi = \frac{ik_z}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2}\frac{m}{\rho} J_m(k_\rho \rho)\begin{Bmatrix}\cos m\phi \\ -\sin m\phi\end{Bmatrix}e^{ik_z z} \tag{3.5.141}$$

$$H_\rho = \frac{-i\omega\epsilon}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2}\frac{m}{\rho} J_m(k_\rho \rho)\begin{Bmatrix}\cos m\phi \\ -\sin m\phi\end{Bmatrix}e^{ik_z z} \tag{3.5.142}$$

$$H_\phi = \frac{i\omega\epsilon k_\rho}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} J_m'(k_\rho \rho)\begin{Bmatrix}\sin m\phi \\ \cos m\phi\end{Bmatrix}e^{ik_z z} \tag{3.5.143}$$

式中的贝塞尔函数的撇号表示对自变量的求导运算。根据边界条件，在 $\rho=a$ 处切向电场 E_z 和 E_ϕ 为0，由此可以得到导行条件为

$$J_m(k_\rho a)=0 \tag{3.5.144}$$

令 ξ_{mn} 表示 m 阶贝塞尔方程的第 n 个根，即有 $J_m(\xi_{mn})=0$，根据导行条件(3.5.144)和色散关系(3.5.139)可以得到传播常数为

$$k_z=\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon-(\xi_{mn}/a)^2} \tag{3.5.145}$$

对于 ξ_{mn} 的每个取值，称对应的波动解为 TM_{mn} 模式，其中 m 与场分布在 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 上变化的周期数有关，而 n 则与场分布在 $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ 方向上变化的数目有关。TM_{mn} 模的截止波数为

$$k_{cmn}=\xi_{mn}/a \tag{3.5.146}$$

从图3.5-27可以得到：对于 TM_{01} 模 $\xi_{01}=2.4$，对于 TM_{11} 模 $\xi_{11}=3.8$。图3.5-31中给出了 TM_{mn} 模导行波的 k_za-ka 曲线。

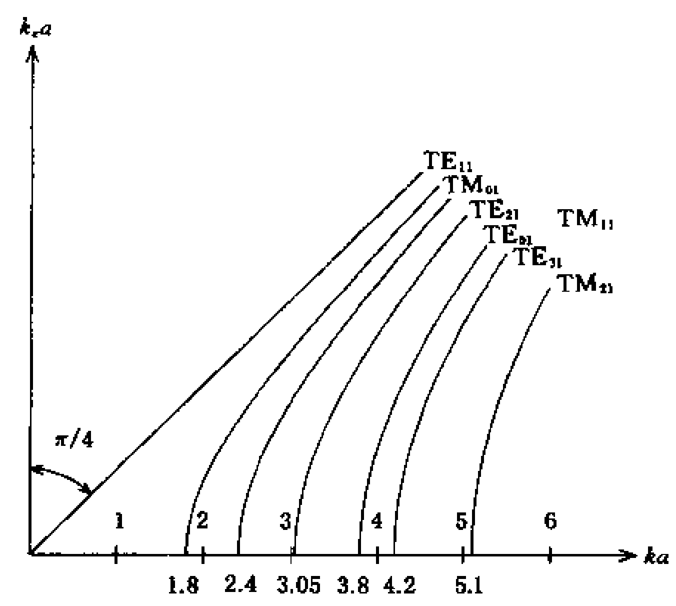


图3.5-31 导行波模式的 k_za-ka 曲线

对于TE波，可以得到纵向磁场为

$$H_z=J_m(k_\rho\rho)\begin{Bmatrix}\sin m\phi\\ \cos m\phi\end{Bmatrix}e^{ik_zz} \tag{3.5.147}$$

色散关系为

$$k_z^2+k_\rho^2=\omega^2\mu\varepsilon \tag{3.5.148}$$

横向场分量为

$$H_\rho=\frac{ik_zk_\rho}{\omega^2\mu\varepsilon-k_z^2}J_m'(k_\rho\rho)\begin{Bmatrix}\sin m\phi\\ \cos m\phi\end{Bmatrix}e^{ik_zz} \tag{3.5.149}$$

$$H_\phi=\frac{ik_z}{\omega^2\mu\varepsilon-k_z^2}\frac{m}{\rho}J_m(k_\rho\rho)\begin{Bmatrix}\cos m\phi\\ -\sin m\phi\end{Bmatrix}e^{ik_zz} \tag{3.5.150}$$

$$E_\rho=\frac{i\omega\mu}{\omega^2\mu\varepsilon-k_z^2}\frac{m}{\rho}J_m(k_\rho\rho)\begin{Bmatrix}\cos m\phi\\ -\sin m\phi\end{Bmatrix}e^{ik_zz} \tag{3.5.151}$$

$$E_\phi=\frac{-i\omega\mu k_\rho}{\omega^2\mu\varepsilon-k_z^2}J_m'(k_\rho\rho)\begin{Bmatrix}\sin m\phi\\ \cos m\phi\end{Bmatrix}e^{ik_zz} \tag{3.5.152}$$

根据边界条件，在 $\rho=a$ 处切向电场 E_z 和 E_ϕ 为 0，由此可以得到导行条件为

$$J_m'(k_\rho a)=0 \tag{3.5.153}$$

令 ξ_{mn}' 表示 J_m' 的根，即有 $J_m'(\xi_{mn})=0$，根据色散关系(3.5.148)和导行条件(3.5.153)可以得到传播常数为

$$k_z=\sqrt{\omega^2\mu\epsilon-(\xi_{mn}'/a)^2} \tag{3.5.154}$$

对于 ξ_{mn}' 的每个取值，称对应的波动解为 TE_{mn} 模，其中 m 与场分布在 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 上变化的周期数有关，而 n 则与场分布在 $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ 方向上变化的数目有关。图 3.5-32 给出了 TE_{01} 和 TM_{11} 模的场分布。TE_{mn} 模的截止波数为

$$k_{cmn}=\xi_{mn}'/a \tag{3.5.155}$$

从图 3.5-28 可以得到，对于 TE_{11} 模 $\xi_{11}'=1.8$，对于 TE_{21} 模 $\xi_{21}'=3.05$，对于 TE_{01} 模 $\xi_{01}'=3.8$。在图 3.5-31 中还给出了 TE_{mn} 模导行波的 k_za-ka 曲线。

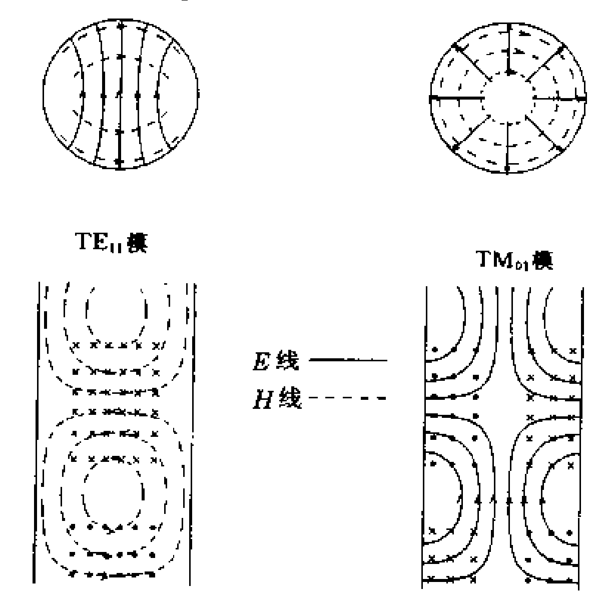


图 3.5-32 TE_{11} 和 TE_{01} 模的场分布

圆柱介质波导

图 3.5-33 所示，考虑一个半径为 a 的圆柱介质波导，波导由本构参数为 μ 和 ϵ 的各向同性介质构成，波导所处环境介质的本构参数为 μ_1 和 ϵ_1。对于介质波导有 $\mu_1=\mu$。但是除非特别说明，通常情况下仍将认为 $\mu_1\neq\mu$。为了保证 $\rho=a$ 处 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量连续的边界条件，电磁场的解一般要求为 TE 波和 TM 波的某种组合。纵向电场分量 E_z 和纵向磁场分量 H_z 都存在的导波模式被称为混合模式。

在波导内部，E_z 和 H_z 的解为贝塞尔函数

$$E_z=AJ_m(k_\rho\rho)\cos m\phi\,e^{ik_zz} \tag{3.5.156}$$

$$H_z=BJ_m(k_\rho\rho)\sin m\phi\,e^{ik_zz} \tag{3.5.157}$$

色散关系为

$$k_z^2+k_\rho^2=\omega^2\mu\epsilon=k^2 \tag{3.5.158}$$

在式(3.5.156)和(3.5.157)中 E_z 和 H_z 分别取 $\cos m\phi$ 和 $\sin m\phi$ 是为了匹配边界条件。当然也可以分别取 $\sin m\phi$ 和 $\cos m\phi$。

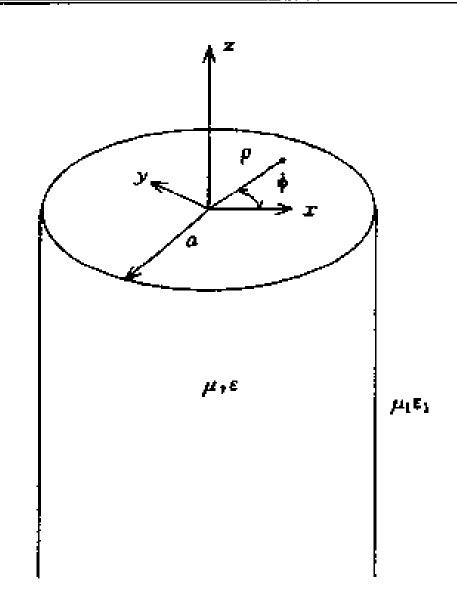


图 3.5-33　圆柱介质波导

在波导外部,与导行波有关的场在 $\hat{\rho}$ 方向必须为凋落波。电场和磁场的解的适当形式应该是虚数宗量的汉开尔函数。令 $k_{1\rho}=\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}$,对 $\rho\geqslant a$ 有

$$E_z = CH_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}\rho)\cos m\phi \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z} \tag{3.5.159}$$

$$H_z = DH_m^{(2)}((\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}\rho)\sin m\phi \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z} \tag{3.5.160}$$

在该区域中的色散关系为

$$k_z^2 - k_{1\rho I}^2 = \omega^2\mu_1\varepsilon_1 = k_1^2 \tag{3.5.161}$$

方程(3.5.159)和(3.5.160)中 E_z 和 H_z 分别取 $\cos m\phi$ 和 $\sin m\phi$,可以保证当 $\rho=a$ 时在所有的方位角 ϕ 上与式(3.5.156)和(3.5.157)相等。

横向场分量可以根据公式(3.5.109)和(3.5.110)得到。在 $\rho=a$ 处匹配 z 和 ϕ 方向的场分量可以得到下列关于 A,B,C 和 D 的方程。

$$AJ_m(k_\rho a) = CH_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a) \tag{3.5.162}$$

$$BJ_m(k_\rho a) = DH_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a) \tag{3.5.163}$$

$$A\frac{mk_z}{k_\rho^2 a}J_m(k_\rho a) + B\frac{\omega\mu}{k_\rho}J_m'(k_\rho a) = -C\frac{mk_z}{k_{1\rho\mathrm{I}}^2 a}H_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a) - \mathrm{i}D\frac{\omega\mu_1}{k_{1\rho\mathrm{I}}}H_m^{(1)\prime}(ik_{i\rho\mathrm{I}}a) \tag{3.5.164}$$

$$A\frac{\omega\epsilon}{k_\rho}J_m'(k_\rho a) + B\frac{mk_z}{k_\rho^2 a}J_m(k_\rho a) = -\mathrm{i}C\frac{\omega\epsilon_1}{k_{1\rho\mathrm{I}}}H_m^{(1)\prime}(\mathrm{i}k_{i\rho\mathrm{I}}a) - D\frac{mk_z}{k_{1\rho\mathrm{I}}^2 a}H_m^{(1)\prime}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a) \tag{3.5.165}$$

方程(3.5.162)和(3.5.163)是根据 E_z 和 H_z 的连续性得来的,而方程(3.5.164)和(3.5.165)是根据 E_ϕ 和 H_ϕ 的连续性得来的。根据这4个方程,可以推出圆柱介质波导的导行条件。

将式(3.5.162)和(3.5.163)分别代入(3.5.164)和(3.5.165),可以得到

$$D\left[\frac{\omega\mu}{k_\rho}\frac{J_m'(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)} + \mathrm{i}\frac{\omega\mu_1}{k_{1\rho\mathrm{I}}}\frac{H_m^{(1)\prime}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}\right] = -Cmk_z a\left(\frac{1}{k_\rho^2 a^2} + \frac{1}{k_{1\rho\mathrm{I}}^2 a^2}\right)$$

$$C\left[\frac{\omega\epsilon}{k_\rho}\frac{J_m'(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)} + \mathrm{i}\frac{\omega\epsilon_1}{k_{1\rho\mathrm{I}}}\frac{H_m^{(1)\prime}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}\right] = -Dmk_z a\left(\frac{1}{k_\rho^2 a^2} + \frac{1}{k_{1\rho\mathrm{I}}^2 a^2}\right)$$

将上面两个方程相乘可以消去其中的 C 和 D,可以得到

$$\frac{k^2}{k^2}\left[\frac{J_m'(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)} - p_{10}^{\mathrm{TE}}\frac{H_m^{(1)\prime}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}\right]\left[\frac{J_m'(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)} + p_{10}^{\mathrm{TM}}\frac{H_m^{(1)\prime}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}\right]$$
$$= (mk_z a)^2\left(\frac{1}{k_\rho^2 a^2} + \frac{1}{k_{1\rho\mathrm{I}}^2 a^2}\right)^2 \tag{3.5.166}$$

式中 $p_{10}^{\mathrm{TE}} = \mu_1 k_\rho / \mathrm{i}\mu k_{1\rho\mathrm{I}}$，$p_{10}^{\mathrm{TM}} = \varepsilon_1 k_\rho / \mathrm{i}\varepsilon k_{1\rho\mathrm{I}}$。根据式(3.5.166)可以有

$$\frac{J'^2_m(k_\rho a)}{J_m^2(k_\rho a)} - (p_{10}^{\mathrm{TE}} + p_{10}^{\mathrm{TM}})\frac{H_m^{(1)\prime}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}\frac{J_m'(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)} + p_{10}^{\mathrm{TE}}p_{10}^{\mathrm{TM}}\frac{H_m^{(1)\prime 2}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)2}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}$$
$$= \frac{m^2k_z^2}{k^2k_\rho^2a^2}\left(1 + \frac{k_\rho^2}{k_{1\rho\mathrm{I}}^2}\right)^2 = m^2\left(\frac{1}{k_\rho^2a^2} + \frac{1 + k_1^2/k^2}{k_{1\rho\mathrm{I}}^2a^2} + \frac{k_1^2k_\rho^2}{k^2k_{1\rho\mathrm{I}}^4a^2}\right) \tag{3.5.167}$$

关于 $J_m'(k_\rho a)/J_m(k_\rho a)$求解方程(3.5.167)可以得到导行条件：

对于 EH 模，导行条件为

$$\frac{J_m'(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)} = \frac{1}{2}(p_{10}^{\mathrm{TE}} + p_{10}^{\mathrm{TM}})\frac{H_m^{(1)\prime}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)} +$$
$$\sqrt{\frac{1}{4}(p_{10}^{\mathrm{TE}} - p_{10}^{\mathrm{TM}})^2\frac{H_m^{(1)2\prime}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)2}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)} + m^2\left(\frac{1}{k_\rho^2a^2} + \frac{1 + k_1^2/k^2}{k_{1\rho\mathrm{I}}^2a^2} + \frac{k_1^2k_\rho^2}{k^2k_{1\rho\mathrm{I}}^4a^2}\right)} \tag{3.5.168}$$

对于 HE 模，导行条件为

$$\frac{J_m'(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)} = \frac{1}{2}(p_{10}^{\mathrm{TE}} + p_{10}^{\mathrm{TM}})\frac{H_m^{(1)\prime}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)} -$$
$$\sqrt{\frac{1}{4}(p_{10}^{\mathrm{TE}} - p_{10}^{\mathrm{TM}})^2\frac{H_m^{(1)\prime 2}(ik_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)2}(ik_{1\rho\mathrm{I}}a)} + m^2\left(\frac{1}{k_\rho^2a^2} + \frac{1 + k_1^2/k^2}{k_{1\rho\mathrm{I}}^2a^2} + \frac{k_1^2k_\rho^2}{k^2k_{1\rho\mathrm{I}}^4a^2}\right)} \tag{3.5.169}$$

当 $m = 0$ 时，式(3.5.168)简化为

$$\frac{J_0'(k_\rho a)}{J_0(k_\rho a)} = p_{10}^{\mathrm{TE}}\frac{H_0^{(1)\prime}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_0^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)} \tag{3.5.170}$$

根据方程(3.5.162)～(3.5.165)，可以得到 $A = C = 0$，进一步有 $E_z = 0$，所以 EH_{0p}模是 TE 波。类似地，式(3.5.169)简化为

$$\frac{J_0'(k_\rho a)}{J_0(k_\rho a)} = p_{10}^{\mathrm{TM}}\frac{H_0^{(1)\prime}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_0^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)} \tag{3.5.171}$$

HE_{0p}模式简化为 TM 波。当 $m \neq 0$，将不可能进行 TE 波和 TM 波的分离，得到的只能是混合模式。

当 $k_{1\rho\mathrm{I}}$变成虚数时将发生截止，这时第一类汉开尔函数的宗量将变成实数，波导外部的场将沿 $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ 方向向外辐射。这里的截止判据与介质片波导的情况相同。根据色散关系 $k_z^2 = k^2 - k_\rho^2 = k_1^2 + k_{1\rho\mathrm{I}}^2$，当接近截止时，$k_{1\rho\mathrm{I}} \to 0$，$k_z \to k_1$，$k_\rho \to k_c(1 - \mu_1\varepsilon_1/\mu\varepsilon)^{1/2}$，其中 k_c 是截止频率。

利用汉开尔函数当 $k_{1\rho\mathrm{I}} \to 0$ 时的渐近值，可以得到，对于 $m = 0$ 的 TE 模有

$$\frac{J_0'(k_\rho a)}{J_0(k_\rho a)} \simeq \frac{\mu_1 k_\rho}{\mathrm{i}\mu k_{1\rho\mathrm{I}}}\frac{1}{\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a\ln(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)} \tag{3.5.172}$$

对于 $m = 0$ 的 TM 模式有

$$\frac{J_0'(k_\rho a)}{J_0(k_\rho a)} \simeq \frac{\varepsilon_1 k_\rho}{\mathrm{i}\varepsilon k_{1\rho\mathrm{I}}}\frac{1}{\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a\ln(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)} \tag{3.5.173}$$

可以看到，式(3.5.172)和(3.5.173)在截止频率上得到的 TE 和 TM 模式的方程是相同的，即

$$J_0\left(k_{c0p}a\sqrt{1-\frac{n_1^2}{n^2}}\right)=0 \tag{3.5.174}$$

式中，$n_1=c(\mu_1\varepsilon_1)^{1/2}$，$n=c(\mu\varepsilon)^{1/2}$。因此可以得到，对于 TM_{0p} 和 TE_{0p} 模，$k_{c0p}a(1-n_1^2/n^2)^{1/2}=\xi_{0p}$，其中，$\xi_{0p}$ 是零阶贝塞尔方程 $J_0(\xi)$ 的第 p 个根。

现在研究 $m\neq0$ 时导行波的截止条件。首先，求式(3.5.168)和(3.5.169)中的平方根项当 $k_{1\rho\mathrm{I}}\to0$ 时的近似。利用色散关系 $k_z^2=k^2-k_\rho^2=k_1^2+k_{1\rho\mathrm{I}}^2$ 和汉开尔函数的递推公式，可以得到

$$\frac{H_m^{(1)\prime}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}=\frac{H_{m-1}^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}-\frac{m}{\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a} \tag{3.5.175}$$

当 $k_{1\rho\mathrm{I}}\to0$ 时

$$\frac{H_m^{(1)\prime}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}\simeq\mathrm{i}A_m-\frac{m}{\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a} \tag{3.5.176}$$

其中，

$$A_1\simeq-k_{1\rho\mathrm{I}}a\ln(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a),\quad A_m\simeq\frac{k_{1\rho\mathrm{I}}a}{2(m-1)}\qquad 对\ m>1$$

式(3.5.168)和(3.5.169)中的平方根项近似为

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{1}{4}(p_{10}^{\mathrm{TE}}-p_{10}^{\mathrm{TM}})^2\frac{H_m^{(1)\prime2}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)2}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}+m^2\left(\frac{1}{k_\rho^2a^2}+\frac{1+k_1^2/k^2}{k_{1\rho\mathrm{I}}^2a^2}+\frac{k_1^2k_\rho^2}{k^2k_{1\rho\mathrm{I}}^4a^2}\right)}\\
&\approx\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\mu_1}{\mu}-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)^2\frac{k_\rho^2}{k_{1\rho\mathrm{I}}^2}\left(A_m+\frac{m}{k_{1\rho\mathrm{I}}a}\right)^2+m^2\left(\frac{1}{k_\rho^2a^2}+\frac{1+k_1^2/k^2}{k_{1\rho\mathrm{I}}^2a^2}+\frac{k_1^2k_\rho^2}{k^2k_{1\rho\mathrm{I}}^4a^2}\right)}\\
&\approx\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\mu_1}{\mu}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)^2\frac{m^2k_\rho^2}{k_{1\rho\mathrm{I}}^4a^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1}{\mu}-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)^2\frac{mk_\rho^2}{k_{1\rho\mathrm{I}}^3a}A_m+m^2\left(\frac{1}{k_\rho^2a^2}+\frac{1+k_1^2/k^2}{k_{1\rho\mathrm{I}}^2a^2}\right)}\\
&\approx\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1}{\mu}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)\frac{mk_\rho}{k_{1\rho\mathrm{I}}^2a}\sqrt{1+\frac{2\left(\frac{\mu_1}{\mu}-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)^2\frac{mk_\rho^2}{k_{1\rho\mathrm{I}}^3a}A_m}{\left(\frac{\mu_1}{\mu}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)^2\frac{m^2k_\rho^2}{k_{1\rho\mathrm{I}}^4a^2}}+\frac{4m^2\left(\frac{1}{k_\rho^2a^2}+\frac{1+k_1^2/k^2}{k_{1\rho\mathrm{I}}^2a^2}\right)}{\left(\frac{\mu_1}{\mu}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)^2\frac{m^2k_\rho^2}{k_{1\rho\mathrm{I}}^4a^2}}}\\
&\approx\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1}{\mu}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)\frac{mk_\rho}{k_{1\rho\mathrm{I}}^2a}\sqrt{1+\frac{2\left(\frac{\mu_1}{\mu}-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)^2A_mk_{1\rho\mathrm{I}}a}{m\left(\frac{\mu_1}{\mu}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)^2}+\frac{4\left(\frac{k_{1\rho\mathrm{I}}^2}{k_\rho^2}+1+\frac{k_1^2}{k^2}\right)}{\left(\frac{\mu_1}{\mu}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)^2}\frac{k_{1\rho\mathrm{I}}^2}{k_\rho^2}}\\
&\approx\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1}{\mu}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)\frac{mk_\rho}{k_{1\rho\mathrm{I}}^2a}+\frac{\left(\frac{\mu_1}{\mu}-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)^2k_\rho}{2\left(\frac{\mu_1}{\mu}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)k_{1\rho\mathrm{I}}}A_m+\frac{m\left(\frac{k_{1\rho\mathrm{I}}^2}{k_\rho^2}+1+\frac{k_1^2}{k^2}\right)}{\left(\frac{\mu_1}{\mu}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)k_\rho a}
\end{aligned} \tag{3.5.177}$$

对于 EH 模将式(3.5.177)代入(3.5.168)，可以得到

$$\begin{aligned}
\frac{J_m'(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)}\approx{}&\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1}{\mu}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)\frac{k_\rho}{k_{1\rho\mathrm{I}}}\left(A_m+\frac{m}{k_{1\rho\mathrm{I}}a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1}{\mu}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)\frac{mk_\rho}{k_{1\rho\mathrm{I}}^2a}+\\
&\frac{\left(\frac{\mu_1}{\mu}-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)^2k_\rho}{2\left(\frac{\mu_1}{\mu}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)k_{1\rho\mathrm{I}}}A_m+\frac{m\left(\frac{k_{1\rho\mathrm{I}}^2}{k_\rho^2}+1+\frac{k_1^2}{k^2}\right)}{\left(\frac{\mu_1}{\mu}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)k_\rho a}
\end{aligned} \tag{3.5.178}$$

进一步可以根据下面的方程求得 EH_{mp} 模的截止频率

$$J_m\left(k_{cmp}a\sqrt{1-\frac{n_1^2}{n^2}}\right)=0 \tag{3.5.179}$$

式中 $k_{cmp}a(1-n_1^2/n^2)^{1/2}=\xi_{mp}$，其中 ξ_{mp} 是 m 阶贝塞尔方程 $J_m(\xi)$ 的第 p 个根。$J_m(\xi)$ 的第一个根为 $\xi=0$，但由于当 $k_{1\rho I}\to 0$ 时，必须有 $k_\rho\to 0$，所以这个根必须排除在外。

实际上，如果利用下面的渐近表达式

$$\frac{J_m'(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)}\approx\frac{m}{k_\rho a}$$

可以看出当 $k_\rho=0$ 时，上面的等式显然不被满足。$\xi=0$ 虽然也是 $J_m(\xi)$ 的根，但是由于它所对应的截止频率为 0，所以这个根并不对应一个允许模式。最小的是 $J_1(\xi)$ 的第一个根 $\xi=3.832$。

对于 HE 模将式(3.5.177)代入(3.5.169)，可以得到

$$\begin{aligned}\frac{J_m'(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)}&\approx\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1}{\mu}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)\frac{k_\rho}{k_{1\rho I}}\left(A_m+\frac{m}{k_{1\rho I}a}\right)-\\&\quad\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1}{\mu}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)\frac{mk_\rho}{k_{1\rho I}^2a}-\frac{\left(\frac{\mu_1}{\mu}-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)^2k_\rho}{2\left(\frac{\mu_1}{\mu}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)k_{1\rho I}}A_m-\frac{m\left(\frac{k_{1\rho I}^2}{k_\rho^2}+1+\frac{k_1^2}{k^2}\right)}{\left(\frac{\mu_1}{\mu}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)k_\rho a}\\&=\frac{2\left(\frac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu\varepsilon}\right)k_\rho}{\left(\frac{\mu_1}{\mu}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)k_{1\rho I}}A_m-\frac{m\left(\frac{k_{1\rho I}^2}{k_\rho^2}+1+\frac{k_1^2}{k^2}\right)}{\left(\frac{\mu_1}{\mu}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)k_\rho a}\end{aligned} \tag{3.5.180}$$

对于 $m>1$，可以根据下式确定 HE_{mp} 模的截止频率

$$\frac{\mu\varepsilon_1+\mu_1\varepsilon}{k_\rho a}\frac{J_m'(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)}+m\frac{\mu_1\varepsilon_1+\mu\varepsilon}{k_\rho^2a^2}-\frac{\mu_1\varepsilon_1}{m-1}=0 \tag{3.5.181}$$

对于 $m=1$，可以看到当 $k_{1\rho I}a\to 0$ 时

$$\frac{\mu\varepsilon_1+\mu_1\varepsilon}{k_\rho a}\frac{J_1'(k_\rho a)}{J_1(k_\rho a)}+\frac{\mu_1\varepsilon_1+\mu\varepsilon}{k_\rho^2a^2}+2\mu_1\varepsilon_1\ln(\mathrm{i}k_{1\rho I}a)=0 \tag{3.5.182}$$

所以截止频率可以由下式得到

$$J_1\left(k_{c1p}a\sqrt{1-\frac{n_1^2}{n^2}}\right)=0$$

对于 HE_{1p} 模，有

$$k_{c1p}a\sqrt{1-\frac{n_1^2}{n^2}}=\xi_{1p} \tag{3.5.183}$$

其中，ξ_{1p} 是 1 阶贝塞尔函数 $J_1(\xi)$ 的第 p 个根。非常重要的是，可以看到 $J_1(\xi)$ 的第一个根是 0，但 HE_{11} 模并非如此，HE_{11} 模的截止频率为 0。这与对称介质片波导截止波数为 0 的 TE_0 和 TM_0 的原理是一样的。可以知道，当 $\mu\to\mu_1,\varepsilon\to\varepsilon_1$ 时，HE_{11} 模将逼近截止频率为 0，即没有截止的 TEM 模。

在图 3.5-34 中，按照逐渐增加的顺序列出了当 $\mu\varepsilon/\mu_1\varepsilon_1=1.1$ 时，不同波导模式的 $k_ca\,(1-n_1^2/n^2)^{1/2}$。应该注意，①由于 TE_{0p} 和 TM_{0p} 模根据式(3.5.174)所确定的截止频率相同，

所以这两个模式是简并模式。②HE_{1p}模和 $EH_{1(p-1)}$的截止频率都决定于一阶贝塞尔函数 $J_1(\xi)$的根，所以这两个模式也共用一个截止频率，所不同的是对 HE 模式第一个根取为 0，而 EH 模式的第一个根取为 3.832。③当介质圆柱的半径 a 很小，并且其折射率只是略大于周围环境介质的折射率时，HE_{11}模式的工作频率将非常宽。举例来说，在单模光纤波导中，如果 $a \approx 1\mu m, n \approx 1.05, 1 - n_1^2/n^2 \approx 0.09$，那么单模工作的频率范围是从零频到 $8 \times 10^6 m^{-1}$或 $1.3 \times 10^6 K_a$。

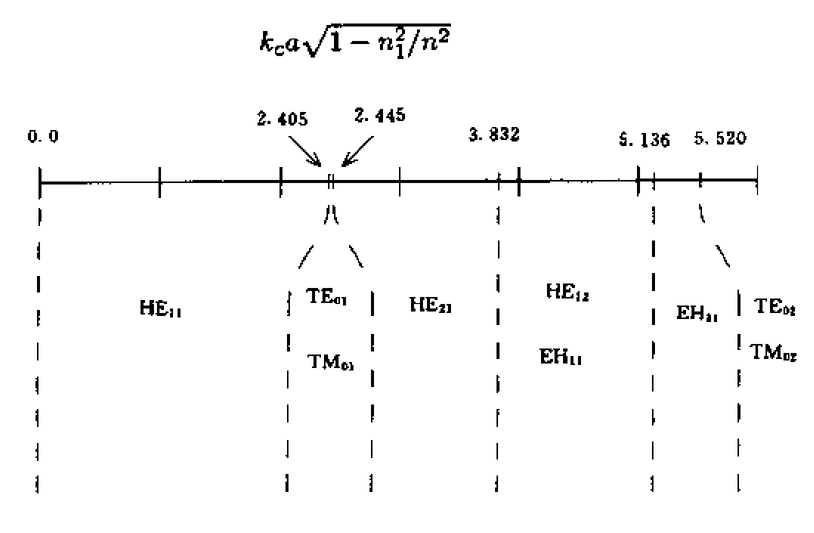


图 3.5-34 圆柱介质波导模式的截止

例 3.5.6 利用贝塞尔函数的递推公式 $B_m'(\xi) = [B_{m-1}(\xi) - B_{m+1}(\xi)]/2$ 可以将式(3.5.167)写成对称的形式。利用色散关系 $k_z^2 = k^2 - k_\rho^2 = k_1^2 + k_{1\rho I}^2$，将式(3.5.167)写成下面的形式：

$$\frac{m^2k_z^2}{k^2k_\rho^2a^2}\left(1+\frac{k_\rho^2}{k_{1\rho I}^2}\right)^2 = \frac{m^2k_\rho^2}{k^2}\left(\frac{k^2}{k_\rho^2}+\frac{k_1^2}{k_{1\rho I}^2}\right)\left(\frac{1}{k_\rho^2a^2}+\frac{1}{k_{1\rho I}^2a^2}\right)$$

$$= \left[\frac{J_m'(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)} - p_{10}^{TE}\frac{H_m^{(1)\prime}(ik_{1\rho I}a)}{H_m^{(1)}(ik_{1\rho I}a)}\right]\left[\frac{J_m'(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)} - p_{10}^{TM}\frac{H_m^{(1)\prime}(ik_{1\rho I}a)}{H_m^{(1)}(ik_{1\rho I}a)}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\left[\frac{J_{m-1}(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)} - \frac{J_{m+1}(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)}\right] - p_{10}^{TE}\left[\frac{H_{m-1}^{(1)}(ik_{1\rho I}a)}{H_m^{(1)}(ik_{1\rho I}a)} - \frac{H_{m+1}^{(1)}(ik_{1\rho I}a)}{H_m^{(1)}(ik_{1\rho I}a)}\right]\right\}$$
$$\left\{\left[\frac{J_{m-1}(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)} - \frac{J_{m+1}(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)}\right] - p_{10}^{TM}\left[\frac{H_{m-1}^{(1)}(ik_{1\rho I}a)}{H_m^{(1)}(ik_{1\rho I}a)} - \frac{H_{m+1}^{(1)}(ik_{1\rho I}a)}{H_m^{(1)}(ik_{1\rho I}a)}\right]\right\}$$

$$= 4\left\{\left[\frac{J_{m-1}(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)} - p_{10}^{TE}\frac{H_{m-1}^{(1)}(ik_{1\rho I}a)}{H_m^{(1)}(ik_{1\rho I}a)}\right]\left[\frac{J_{m-1}(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)} - p_{10}^{TM}\frac{H_{m-1}^{(1)}(ik_{1\rho I}a)}{H_m^{(1)}(ik_{1\rho I}a)}\right] -\right.$$
$$\left[\frac{J_{m-1}(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)} - p_{10}^{TE}\frac{H_{m-1}^{(1)}(ik_{1\rho I}a)}{H_m^{(1)}(ik_{1\rho I}a)}\right]\left[\frac{J_{m+1}(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)} - p_{10}^{TM}\frac{H_{m+1}^{(1)}(ik_{1\rho I}a)}{H_m^{(1)}(ik_{1\rho I}a)}\right] -$$
$$\left[\frac{J_{m+1}(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)} - p_{10}^{TE}\frac{H_{m+1}^{(1)}(ik_{1\rho I}a)}{H_m^{(1)}(ik_{1\rho I}a)}\right]\left[\frac{J_{m-1}(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)} - p_{10}^{TM}\frac{H_{m-1}^{(1)}(ik_{1\rho I}a)}{H_m^{(1)}(ik_{1\rho I}a)}\right] +$$
$$\left.\left[\frac{J_{m+1}(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)} - p_{10}^{TE}\frac{H_{m+1}^{(1)}(ik_{1\rho I}a)}{H_m^{(1)}(ik_{1\rho I}a)}\right]\left[\frac{J_{m+1}(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)} - p_{10}^{TM}\frac{H_{m+1}^{(1)}(ik_{1\rho I}a)}{H_m^{(1)}(ik_{1\rho I}a)}\right]\right\} \tag{3.5.184}$$

利用递推公式 $B_{m-1}(\xi) + B_{m+1}(\xi) = 2mB_m(\xi)/\xi$ 上式可以改写为

$$\frac{m^2k_\rho^2}{k^2}\left(\frac{k^2}{k_\rho^2}+\frac{k_1^2}{k_{1\rho\mathrm{I}}^2}\right)\left(\frac{1}{k_\rho^2a^2}+\frac{1}{k_{1\rho\mathrm{I}}^2a^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\left[\frac{J_{m-1}(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)}-p_{10}^{\mathrm{TE}}\frac{H_{m-1}^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}\right]\left[\frac{2m}{k_\rho a}-p_{10}^{\mathrm{TM}}\frac{2m}{\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a}\right]-\right.$$

$$2\left[\frac{J_{m-1}(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)}-p_{10}^{\mathrm{TE}}\frac{H_{m-1}^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}\right]\left[\frac{J_{m+1}(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)}-p_{10}^{\mathrm{TM}}\frac{H_{m+1}^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}\right]-$$

$$2\left[\frac{J_{m+1}(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)}-p_{10}^{\mathrm{TE}}\frac{H_{m+1}^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}\right]\left[\frac{J_{m-1}(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)}-p_{10}^{\mathrm{TM}}\frac{H_{m-1}^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}\right]+$$

$$\left.\left[\frac{J_{m+1}(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)}-p_{10}^{\mathrm{TE}}\frac{H_{m+1}^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}\right]\left[\frac{2m}{k_\rho a}-p_{10}^{\mathrm{TM}}\frac{2m}{\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{2\left[\frac{2m}{k_\rho a}-p_{10}^{\mathrm{TE}}\frac{2m}{\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a}\right]\left[\frac{2m}{k_\rho a}-p_{10}^{\mathrm{TM}}\frac{2m}{\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a}\right]-\right.$$

$$\left[\frac{J_{m-1}(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)}-p_{10}^{\mathrm{TE}}\frac{H_{m-1}^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}\right]\left[\frac{J_{m+1}(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)}-p_{10}^{\mathrm{TM}}\frac{H_{m+1}^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}\right]-$$

$$\left.\left[\frac{J_{m+1}(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)}-p_{10}^{\mathrm{TE}}\frac{H_{m+1}^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}\right]\left[\frac{J_{m-1}(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)}-p_{10}^{\mathrm{TM}}\frac{H_{m-1}^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}\right]\right\} \tag{3.5.185}$$

由此可以得到

$$\left[\frac{J_{m-1}(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)}-p_{10}^{\mathrm{TE}}\frac{H_{m-1}^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}\right]\left[\frac{J_{m+1}(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)}-p_{10}^{\mathrm{TM}}\frac{H_{m+1}^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}\right]+$$

$$\left[\frac{J_{m+1}(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)}-p_{10}^{\mathrm{TE}}\frac{H_{m+1}^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}\right]\left[\frac{J_{m-1}(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)}-p_{10}^{\mathrm{TM}}\frac{H_{m-1}^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}\right]+$$

$$2\left(1-\frac{\mu_1}{\mu}\right)\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)\frac{m^2}{k_{1\rho\mathrm{I}}^2a^2}=0 \tag{3.5.186}$$

当 $k_\rho \to 0$ 并且 $k_{1\rho\mathrm{I}} \to 0$ 时,对于 $m>0$ 利用下面的渐近公式

$$\frac{J_{m+1}(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)} \simeq \frac{k_\rho a}{2(m+1)}$$

$$\frac{J_{m-1}(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)} \simeq \frac{2m}{k_\rho a}$$

$$\frac{H_{m+1}^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)} \simeq \frac{2m}{\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a}$$

对于 $m>1$

$$\frac{H_{m-1}^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)} \simeq \frac{\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a}{2(m-1)}$$

对于 $m=1$

$$\frac{H_0^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)}{H_m^{(1)}(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)} \simeq -\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a\ln(\mathrm{i}k_{1\rho\mathrm{I}}a)$$

对于 $m>1$,式(3.5.186)变成

$$\frac{m}{k_{1\rho\mathrm{I}}^2a^2}\left[m\left(1+\frac{\mu_1}{\mu}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)-\frac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu\varepsilon}\frac{k_\rho^2a^2}{m-1}\right]=0 \tag{3.5.187}$$

可以看到,$k_\rho=0$ 并不是一个可以接受的解。对于 $m=1$,式(3.5.186)变成

$$\frac{1}{k_{1\rho 1}^2 a^2}\left[\left(1+\frac{\mu_1}{\mu}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)+\frac{2\mu_1\varepsilon_1}{\mu\varepsilon}k_\rho^2 a^2\ln(\mathrm{i}k_{1\rho 1}a)\right]=0 \tag{3.5.188}$$

可以看到,当 $k_{1\rho 1}\to 0$ 时,$k_\rho=0$ 是一个可以接受的解。对于 $m>1$,当 $k_\rho\neq 0$,且 $k_{1\rho 1}\to 0$ 时,式(3.5.186)变成

$$\left(\frac{\mu_1}{\mu}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)k_\rho a\frac{J_{m-1}(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)}-\frac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu\varepsilon}\frac{k_\rho^2 a^2}{m-1}+m\left(1-\frac{\mu_1}{\mu}\right)\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)=0 \tag{3.5.189}$$

利用递推公式 $J_{m-1}(\xi)=J_m'(\xi)+mJ_m(\xi)/\xi$,可以证明式(3.5.189)与(3.5.181)是等价的。对于 $m=1$,下面等式

$$\left(\frac{\mu_1}{\mu}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)k_\rho a\frac{J_0(k_\rho a)}{J_1(k_\rho a)}+2\frac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu\varepsilon}k_\rho^2 a^2\ln(\mathrm{i}k_{1\rho 1}a)+\left(1-\frac{\mu_1}{\mu}\right)\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)=0 \tag{3.5.190}$$

与式(3.5.182)是等价的。

习题

3.5.1　对于外部半径为 a,内部半径为 b 的同轴线,可以用类似的方法推导得到传输线方程(3.5.18)。证明单位长度同轴线的电感和电容分别为 $L=\mu\ln(b/a)2\pi$ 和 $C=2\pi\varepsilon/\ln(b/a)$,同轴线的特征阻抗为 $A_0=\eta\ln(b/a)/2\pi$。求填充介质 $\varepsilon=8\varepsilon_0$ 的 50Ω 同轴线的内外半径比即 b/a 是多少?

3.5.2　证明当传输线在 $z=0$ 处的终端负载阻抗为 Z_L 时,在 $z=-l$ 处的输入阻抗为

$$Z(-l)=Z_0\frac{Z_{Ln}-\mathrm{i}\tan kl}{1-\mathrm{i}Z_{Ln}\tan kl}$$

式中,$Z_{Ln}=Z_L/Z_0$,Z_0 为传输线的特征阻抗。当终端开路时,$Z_{Ln}\to\infty$。对于平行板波导,当 $Z_0=(L/C)^{1/2}$,$L=\mu d/w$,$C=\varepsilon w/d$,证明在准静态极限下,即当 $kl\ll 1$ 时,输入阻抗简化为电容,即 $Z(-l)=1/j\omega C_0$,其中 $C_0=\varepsilon wl/d$。

3.5.3　绘出下列情况的传输线的电压驻波波形。①终端开路 $Z_{Ln}\to\infty$。②终端短路 $Z_{Ln}=0$。③终端匹配 $Z_{Ln}=1$。

3.5.4　图 3.5-35 所示为一个电压驻波波形,其电压驻波比为 $V_{swr}=3$。传输线的特征阻抗为 $Z_0=50\Omega$,求负载阻抗。

3.5.5　考虑激励平行板波导的电流片源为

$$\boldsymbol{J}_s=\hat{x}J_s\cos\frac{3\pi x}{d}$$

求波导中能够激励起的模式幅度。

3.5.6　一平行板波导被一个线源激励,线源位于距离底部平行板 h 的位置上。写出该线源产生的场表示为导波模式的叠加表达式,并求这些导波模式的幅度。

3.5.7　一个聚苯乙烯($\varepsilon=2.56\varepsilon_0$)平板的厚度为 1cm。当频率为 30GHz 时,能够传播的导波模式是什么?它们的截止频率分别是多少?当介质片波导的一边是空气,另一边是 $\varepsilon_t=2\varepsilon_0$ 的介质材料时,求其中的导波模及其截止频率。

3.5.8　考虑填充各向异性介质的平行板波导中的正交模式。令波导中的介质是外加直流磁场 $\boldsymbol{B}_0=\hat{y}B_0$ 的冷等离子体。波导中的 TE 模是否受等离子体各向异性的影响?推导 TM 模函数。

3.5.9　在平行板波导中,$z<0$ 的区域为自由空间,$z>0$ 的区域充满介电常数为 ε 的介质。如何写出两个区域中的模。从 $z<0$ 的区域入射到介质上的 TM 模,求无反射的条件。并将这一条件与波以布儒斯特角入射到半空间介质时的情况进行比较。

3.5.10　由于平行板波导中的模为正弦函数,所以不同模之间是相互正交的。一般情况下,通过证明

$$\int_S \mathrm{d}S(\boldsymbol{E}_m\times\boldsymbol{H}_n^*)\cdot\hat{z}=0 \qquad m\neq n\text{ 时}$$

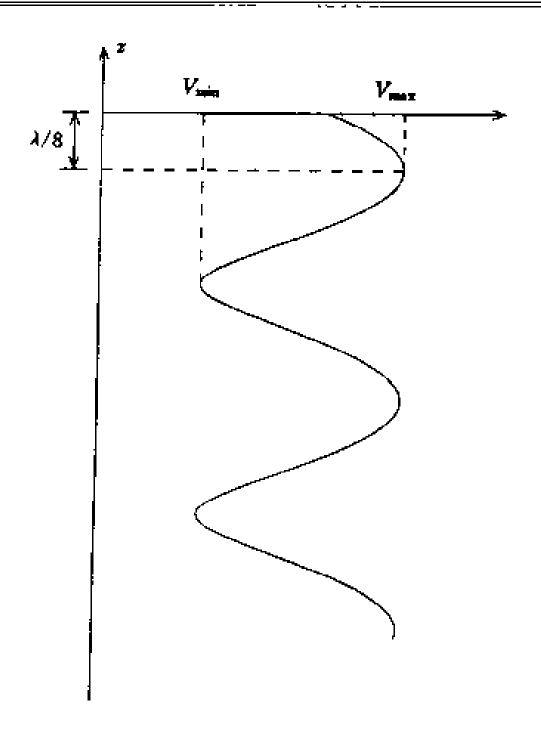


图 3.5-35 电压驻波波形

可以证明波导中模式的正交性。式中 $\boldsymbol{E}_m$ 是 m 阶模式的电场 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}_n$ 是 n 阶模式的磁场 $\boldsymbol{H}$。上面的积分在波导的横截面上进行。通过证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x E_{ym} H_{xn}^{*} = 0$$

证明介质片波导的 TE 模是正交的。注意，积分区间从 $-\infty$ 到 $+\infty$，并且在计算中要用到介质片内部和外部的场的解。

3.5.11 虽然通常导行波是被两个平面界面引导，但也有可能是被两种介质的一个平面界面引导。这种导行波被称为表面波。表面波的场分量在离开界面的方向上指数衰减。考虑界面为 $z=0$ 的平面的情况，界面两侧的介质参数分别为 $\mu_0, \varepsilon_0 (z>0)$ 和 $\mu_0, \varepsilon_p (z<0)$。

(1) 对于

$$\boldsymbol{E} = \hat{y} E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x} \begin{cases} \mathrm{e}^{-\alpha_0 z} & z > 0 \\ \mathrm{e}^{\alpha_p z} & z < 0 \end{cases}$$

的 TE 波，是否可能存在 TE 表面波？如果存在，求色散关系。

(2) 对于

$$\boldsymbol{H} = \hat{y} H_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x} \begin{cases} \mathrm{e}^{-\alpha_0 z} & z > 0 \\ \mathrm{e}^{\alpha_p z} & z < 0 \end{cases}$$

的 TM 波，如果上半空间的介电常数与下半空间的介电常数都是实数并且符号相反，是否可能存在 TM 表面波。

(3) 假定

$$\varepsilon_p = \varepsilon_o \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

求 TM 表面波的色散关系（色散关系给出 k_x 与 ω 之间的联系，并且不包括除 ε_o, μ_o 和 ω_p 之外的其他参数）。

(4)当 ω 很小时，如果 $\omega \to 0, \epsilon_p \to \infty$，等离子体的特性如理想导体。证明这时的色散关系蜕化的理想导体表面传播的 *TM* 波的色散关系，这时 α_0 等于多少？解释为什么这样的波不被称为表面波。

(5) 凋落波的入射角是复数

$$\tan\theta = k_x / k_{0z} = k_x / \mathrm{i}\alpha_0$$

证明等离子体表面波的入射角等于布儒斯特角。

3.5.12　像离散分层介质一样，连续变化的折射指数也可以引导波的传播。

(1) 证明非均匀各向同性介质中电场的波动方程为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + \omega^2 \mu\varepsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E} + \nabla\left[\boldsymbol{E}\cdot\frac{\nabla\varepsilon(\boldsymbol{r})}{\varepsilon(\boldsymbol{r})}\right] = 0$$

(2) 在平面分层介质中，介电常数 $\varepsilon(\boldsymbol{r}) = \varepsilon(x)$ 只随一维坐标变化。对于 TE 极化波

$$\boldsymbol{E} = \hat{y}E_0 f(x)e^{ik_z z}$$

证明(1)所给出的波动方程简化为

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2\mu\varepsilon(x)\right]f(x) = k_z^2 f(x)$$

与之对应的方程是在位势 $V(x)$ 作用下粒子的时间变化的 Schrodinger 方程

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}V(x)\right]\psi(x) = -\frac{2m}{\hbar^2}E\psi(x)$$

其中，$\psi(x)$ 是概率波动方程。

(3) 考虑 $\varepsilon = \varepsilon_o[1-(x/a)^2]$ 的介质，表述与之对应的量子力学问题。为了求解波动方程，可以将方程写成下面的形式：

$$\frac{d^2F(\xi)}{d\xi^2} + (\zeta - \xi^2)F(\xi) = 0$$

并令 $F(\xi) = H(\xi)e^{-\xi^2/2}$，可以得到

$$H''(\xi) - 2\xi H'(\xi) + (\zeta - 1)H(\xi) = 0$$

将 $H(\xi)$ 表示为幂级数展开的形式

$$H(\xi) = \sum_{n=0} h_n \xi^n$$

证明，当 $\zeta = 2N+1$ 时，幂级数的终止项为 $n = N$。进一步可以得到方程有一族分别对应特征值 $\zeta = 1,3,5,\cdots$ 的特征解 $[H_N(\xi); N = 0,1,2,\cdots]$。其中，$H_N(\xi)$ 被称为 Hermite 多项式。对于 $N = 0,1,2$ 求 $H_N(\xi)$ 的形式。函数 $H_N(\xi)e^{-\xi^2}/2$ 被称为 Hermite-Gaussian 函数，Hermite-Gaussian 函数构成 $(-\infty,\infty)$ 的完备基函数。求 $f(x)$ 并确定所有 TE 模的截止频率。

(4) 绘出 TE_0 和 TE_1 模的色散关系曲线。

(5) 对 TE_0 和 TE_1 模绘出 $|\boldsymbol{E}|$ 随 x 变化的函数曲线。注意，模在原点附近是局域化分布的。所以即使介电常数不会变成负值，这些模也是近似正确的，梯度指数光纤就是这样的例子。

3.5.13　考虑尺寸为 1cm × 0.5cm 的矩形波导。该波导前 5 个模的截止频率分别是多少？如果波导的激励频率为 20GHz，前 5 个模的传播常数是多少。如果激励频率为 50GHz，可以传播的模式有哪些。

3.5.14　一矩形波导被位于 $x = d, z = 0$ 处的探针激励，假定探针的伸展范围为 $y = 0$ 到 $y = b$，探针上的电流分布近似为

$$J(x,y,z) = I_0\delta(x-d)\delta(z)\cos qy$$

该探针所激励的模式的幅度分别是多少？为了使 TE_{10} 模的幅度最大，探针应该放置在什么位置？

3.5.15　考虑矩形波导被部分填充，其中从 $y = 0$ 到 $y = d$ 的填充介质的介电常数为 ε_1，从 $y = d$ 到 $y = b$ 的部分填充介质的介电常数为 ε_2。证明波导中的导行波为混合模。令 $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_2$，证明波导中主模的截止频率为

$$\omega_c \approx \frac{\pi}{b}\left[\frac{\varepsilon_1(b-d)+\varepsilon_2 d}{\mu\varepsilon_1\varepsilon_2 b}\right]^{1/2}$$

3.5.16　在玻璃纤维波导中有一个半径为 1μm 量级的芯，芯线外层介质的厚度大约为 100μm 量级。当内外介质的折射指数 $n = c\sqrt{\mu\varepsilon}$ 与 $n_1 = c\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$ 非常接近时，波导中 HE_{11} 模的工作频率区间可以一直延伸到可见光频率。由于外层介质的厚度与芯的直径相比要大很多，光纤中的导行波可以用介质波导模处理。求数值孔径 $(n^2 - n_1^2)^{1/2}$ 的取值，使比 HE_{11} 模更高一阶的模的截止频率为 6×10^{14}Hz。当光纤用于通信时，它不仅能够提供大的带宽和信道容量，而且具有更紧凑的体积和灵活性。试将光纤的结果与介质片波导和金属波导进行比较。

3.5.17 考虑内外半径分别为 a 和 b 的同轴线。假定 $b=(1+\delta)a$ 并且 $\delta\ll 1$。该波导中的基本模式为 TEM 模，TEM 模的截止频率为 0。高阶模式的截止频率是多少？这一问题的严格求解要求在圆柱坐标系中解边值问题。精确解需要用贝塞尔函数和诺依曼函数表示。但是当 $\delta\ll 1$ 时，同轴线中的导波空间可以看做是 $x=\rho\phi$，y 从 a 到 b 的平行板波导，从而可以根据平行板波导的结果近似求解。注意，$x=2\pi a\approx 2\pi b$，并且在 $x=0$处的场必须相同，所以沿着 $\hat{x}$ 方向存在一个周期变化。利用上述模证明比 TEM 更高一阶的模的截止频率为 $k_c\approx 1/a$。可以注意到，这一结果与宽度为 $2\pi a$、高度为 δa 的矩形波导中的 TE_{20}模的截止频率相同。根据导行条件求截止频率，确认近似分析的结果。注意，在平行板波导中，TE_1 和 TM_1 模的截止频率为 $k_c=\pi/\delta a$，这一结果远大于 $1/a$。

3.5.18 考虑平行板波导中 $z>0$ 的区域充满等离子体介质，$z<0$ 的区域充满介质材料。等离子体介质的介电常数为

$$\epsilon_p = \epsilon_0\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

介质材料的介电常数为 $\epsilon_1=3\epsilon_0$。令

$$d = \sqrt{5}/3\,\frac{3\pi}{\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$$

(1) 考虑 $\epsilon_p=\epsilon_1$ 的情况(这时波导全部被同样的介质材料填充)。波导中将有多少 TM 导行波模传播？

(2) 令 $\omega_p=(1/2)\omega$。对于沿 $+z$ 方向传播的波，哪些 TM 模将会在等离子体介质的界面上发生全反射。

(3) 上述 TM 模中有一个将会发生全透射(无反射)，全透射模是哪一个。为什么该模会发生全透射。

(4) 对于给定的激励频率 ω，当等离子体频率 ω_p 是多少时上述的所有 TM 模都会被全反射？

3.5.19 考虑半径为 a，介电常数为 ϵ 的光纤，其外部介质的介电常数为 ϵ_1，半径可以看做无限大。假定 $\delta=1-\epsilon_1/\epsilon\ll 1$。

(1) 对于一般的 $\epsilon_1<\epsilon$ 的情况，写出 $\rho\leqslant a$ 和 $\rho\geqslant a$ 的区域内 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的场分量的表达式。如果假定 $\delta\ll 1$，利用 $E_y=E_\rho\sin\phi+E_\phi\cos\phi$，$H_x=H_\rho\cos\phi-H_\phi\sin\phi$ 证明下面的近似表达，当 $\rho\leqslant a$ 时

$$E_y = -E\frac{k_z k}{\omega\epsilon}\left[J_1'(k_\rho\rho)\sin^2\phi+\frac{1}{k_\rho\rho}J_1(k_\rho\rho)\cos^2\phi\right]e^{ik_z z}$$

$$H_x = -\frac{\omega\epsilon}{k_z}E_y$$

当 $\rho\geqslant a$ 时

$$E_{1y} = -E_1\frac{k_z k_1}{\omega\epsilon_1}\left[H_1^{(1)\prime}(k_\rho\rho)\sin^2\phi+\frac{1}{k_{1\rho}\rho}H_1^{(1)}(k_{1\rho}\rho)\cos^2\phi\right]e^{ik_z z}$$

$$H_{1x} = -\frac{\omega\epsilon_1}{k_z}E_{1y}$$

(2) 利用贝塞尔函数的递推公式证明(1)中乘以 $\cos^2\phi$ 的项可以忽略，即有

$$E_y = -E\frac{k_z k}{\omega\epsilon}J_0'(k_\rho\rho)e^{ik_z z}$$

$$E_{1y} = -E_1\frac{k_z k_1}{\omega\epsilon_1}H_0(k_\rho\rho)e^{ik_z z}$$

(3) 证明下面的近似具有数值精度

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2\right]\approx\begin{cases}J_0(k_\rho\rho) & \rho\leqslant a\\ \dfrac{J_0(k_\rho a)}{H_0^{(1)}(k_{1\rho}a)}H_0^{(1)}(k_{1\rho}\rho) & \rho>a\end{cases}$$

其中，$\rho_0^2=a^2/\ln[(k^2-k_1^2)a^2]$被称为点尺寸。

(4) 证明沿 $\hat{z}$ 方向的坡印廷功率密度为

$$S_z(\rho) = |E|^2\frac{k_z k_{1\rho}^2}{8\omega\epsilon}e^{-\rho^2/\rho_0^2}$$

光纤芯所携带的功率与沿光纤传输的总功率之比为

$$P_{core}/P_{total} = 1 - e^{-a^2/\rho_0^2}$$

(5) 令光束尺寸等于光纤芯的半径,即 $\rho_0 = a$。求$(k^2 - k_1^2)^{1/2}a$ 的值,并证明该值低于高一阶模的截止频率。对$(k^2 - k_1^2)^{1/2}a = 0.8$ 计算点尺寸。

3.6 谐振

3.6.1 矩形腔谐振器

沿 $\hat{z}$ 方向具有均匀横截面的谐振器可以看做是一段两端封闭的波导,只是其中不再是沿 $\hat{z}$ 方向传播的导行波,而是沿 $\hat{z}$ 方向的驻波。沿 $\hat{z}$ 方向的驻波可以看做是沿 $+\hat{z}$ 方向传播的导行波与沿 $-\hat{z}$ 方向传播的导行波的叠加。波导分析中的公式也可以用于谐振腔的分析。有

$$\boldsymbol{E}_s = \frac{1}{k^2 - k_z^2}\left(\nabla_s \frac{\partial E_z}{\partial z} + \mathrm{i}\omega\mu\, \nabla_s \times \boldsymbol{H}_z\right) \tag{3.6.1a}$$

$$\boldsymbol{H}_s = \frac{1}{k^2 - k_z^2}\left(\nabla_s \frac{\partial H_z}{\partial z} - \mathrm{i}\omega\mu\, \nabla_s \times \boldsymbol{E}_z\right) \tag{3.6.1b}$$

以及

$$(\nabla^2 + k^2)E_z = 0 \tag{3.6.2a}$$

$$(\nabla^2 + k^2)H_z = 0 \tag{3.6.2b}$$

式中 $k^2 = \omega^2\mu\epsilon$,式(3.6.2)中的拉普拉斯算子$\nabla^2$ 为三维算子。

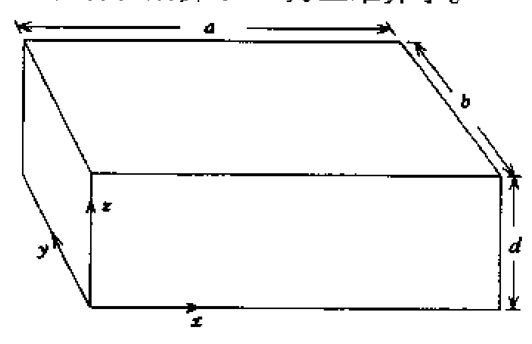


图 3.6-1　矩形腔

考虑图 3.6-1 所示的矩形金属谐振腔。它是一段分别在 $z = 0$ 和 $z = d$ 的位置上用金属壁封闭的波导。为了满足边界条件,可以得到,对于 TM 模有

$$E_z = E_{mnp}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{p\pi z}{d} \tag{3.6.3a}$$

$$E_x = -\frac{E_{mnp}}{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}\frac{m\pi}{a}\frac{p\pi}{d}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{p\pi z}{d} \tag{3.6.3b}$$

$$E_y = -\frac{E_{mnp}}{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}\frac{n\pi}{b}\frac{p\pi}{d}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{p\pi z}{d} \tag{3.6.3c}$$

$$H_x = -\frac{\mathrm{i}\omega\epsilon E_{mnp}}{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}\frac{n\pi}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{p\pi z}{d} \tag{3.6.3d}$$

$$H_y = \frac{\mathrm{i}\omega\epsilon E_{mnp}}{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}\frac{m\pi}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{p\pi z}{d} \tag{3.6.3e}$$

对于 TE 模有

$$H_z = H_{mnp}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{p\pi z}{d} \tag{3.6.4a}$$

$$H_x = -\frac{H_{mnp}}{(m\pi/a)^2+(n\pi/b)^2}\frac{m\pi}{a}\frac{p\pi}{d}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{p\pi z}{d} \tag{3.6.4b}$$

$$H_y = -\frac{H_{mnp}}{(m\pi/a)^2+(n\pi/b)^2}\frac{n\pi}{b}\frac{p\pi}{d}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{p\pi z}{d} \tag{3.6.4c}$$

$$E_x = \frac{\mathrm{i}\omega\mu H_{mnp}}{(m\pi/a)^2+(n\pi/b)^2}\frac{n\pi}{b}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{p\pi z}{d} \tag{3.6.4d}$$

$$E_y = \frac{\mathrm{i}\omega\mu H_{mnp}}{(m\pi/a)^2+(n\pi/b)^2}\frac{m\pi}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{p\pi z}{d} \tag{3.6.4e}$$

将式(3.6.3a)和(3.6.3b)代入式(3.6.2),对 TM 和 TE 模可以得到相同的色散关系

$$k_r^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2 + (p\pi/d)^2$$

由此可以得到谐振波数为 $k_r = \omega_r(\mu\epsilon)^{1/2}$。$\mathrm{TE}_{mnp}$ 和 TM_{mnp} 模的谐振波数是相同的。有趣的是可以看到 TM_{mn0} 对应截止时的波导模式,这时 $k_z = 0$。

当谐振腔的尺寸满足 $a > b > d$ 时,最小的谐振波数为

$$k_r = \sqrt{(\pi/a)^2 + (\pi/b)^2} \tag{3.6.5}$$

这时 $m = n = 1, p = 0$。谐振腔内的模式为 TM_{110}。该模式的场分布如图 3.6-2 所示。

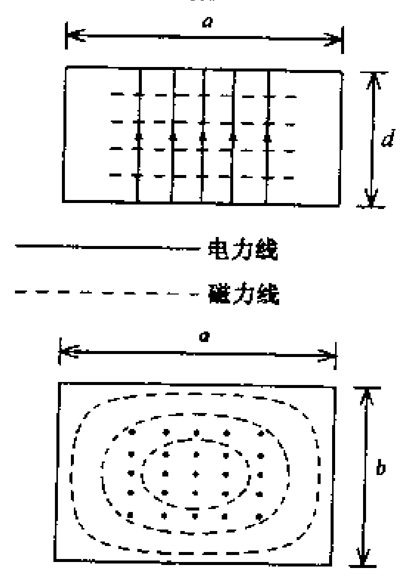


图 3.6-2 TE_{101} 模的电力线和磁力线

可以看到,电场垂直于 $z=0$ 和 $z=d$ 处的腔体边界,电力线在谐振腔的中间集中以保证在 $x=0, x=a, y=0$ 和 $y=b$ 的边界上切向电场为 0。这样的场分布也可以看做是波导中的主模沿 $\hat{y}$ 方向传播,并且在 $y=0$ 和 $y=b$ 的波导壁上被反射而形成驻波。如果坐标轴 y 和 z 的标号互换,该模式也可以被称为 TE_{101} 模。

在腔体谐振器中,品质因数 Q 表示存储能量与耗散能量之比。令 U 为谐振腔内存储的能量,P_d 表示谐振腔内耗散的功率。定义品质因数为

$$Q = \frac{\omega_0 U}{P_d} \tag{3.6.6}$$

式中 ω_0 为谐振角频率。在介质无损耗的假设下,我们对矩形腔内的主模 TM_{110} 计算存储能量

$$U = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\int_0^d \mathrm{d}z\int_0^b \mathrm{d}y\int_0^a \mathrm{d}x\left(\frac{\varepsilon}{2}\mid E\mid^2 + \frac{\mu}{2}\mid H\mid^2\right)\right\} = \varepsilon\frac{abd}{8}E_{110}^2 \tag{3.6.7}$$

在所有腔壁上进行积分,可以得到耗散功率

$$P_\mathrm{d} = \frac{1}{2}\sqrt{\omega_0\mu/2\sigma}\,\mathrm{Re}\left\{2\int_0^d \mathrm{d}z\int_0^a \mathrm{d}x\mid H_x\mid_{y=0}^2 + 2\int_0^d \mathrm{d}z\int_0^b \mathrm{d}y\mid H_y\mid_{x=0}^2 + 2\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^b \mathrm{d}y(\mid H_x\mid^2 + \mid H_y\mid^2)_{z=0}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\omega_0\mu/2\sigma}\left[\frac{ad}{b^2} + \frac{bd}{a^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)\right]\frac{\pi^2\omega_0^2\varepsilon^2}{(\pi^2/a^2 + \pi^2/b^2)^2}E_{110}^2$$

所以,品质因数为

$$Q = \sqrt{\frac{2\sigma}{\omega_0\varepsilon}}\,\frac{\pi d(a^2 + b^2)^{3/2}}{2[ab(a^2 + b^2) + 2d(a^3 + b^3)]} \tag{3.6.8}$$

在上面推导中,已经利用了 $\omega_0\sqrt{\mu\varepsilon} = \sqrt{(\pi^2/a^2) + (\pi^2/b^2)}$ 的结果。当谐振腔为 $a = b = d = 2$ 的立方体时,根据式(3.6.5)可以得到其谐振频率为 10GHz。当谐振腔被空气填充,并且腔壁由铜制成时,该谐振腔的品质因数为 $Q \approx 10^4$。其他的损耗源,比如谐振腔的填充介质,腔壁的不规则性和外部系统的耦合等都对耗散功率 P_d 有贡献,从面都会引起 Q 的减小。

3.6.2 圆形腔谐振器

考虑图 3.6-3 所示的高度为 d 半径为 a 的圆柱腔。在 $d < a$ 的假设条件下,TM_{010}是基本模式,该模式对应在截止频率上波导的 TM_{01}模。腔内的场为

$$E_z = E_0J_0(k\rho) \tag{3.6.9a}$$

$$H_\phi = -\,\mathrm{i}\sqrt{\varepsilon/\mu}E_0J_1(k\rho) \tag{3.6.9b}$$

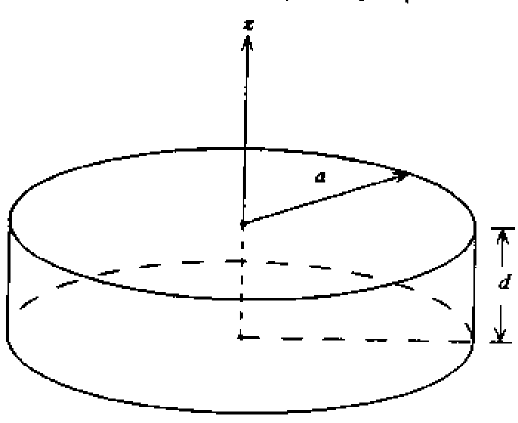


图 3.6-3　圆形腔谐振器

谐振波数满足

$$k_r a = 2.405 \tag{3.6.9c}$$

腔内的时间平均存储能量为

$$U = \frac{1}{2}\int_0^a 2\pi\rho\mathrm{d}\rho\left(\frac{\varepsilon}{2}\mid E_z\mid^2 + \frac{\mu}{2}\mid H_\phi\mid^2\right)d$$

$$= E_0^2\frac{\pi\varepsilon d}{2}a^2J_1^2(ka) \tag{3.6.10}$$

在推导中用到了贝塞尔函数的积分公式

$$\int \rho d\rho B_m^2(k\rho) = \frac{\rho^2}{2}\left[B'^2_m(k\rho) + \left(1 - \frac{m^2}{k^2\rho^2}\right)B_m^2(k\rho)\right] \tag{3.6.11}$$

和 $J_0(ka)=0$ 的边界条件。腔壁上的耗散功率为

$$P_d = \frac{E_0^2}{2}\sqrt{\omega_0\mu/2\sigma}\left[2\pi ad\,\frac{\varepsilon}{\mu}J_1^2(ka) + 2\int_0^a 2\pi\rho J_1^2(k\rho)\,d\rho\right]$$

$$= \sqrt{\omega_0\mu/2\sigma}E_0^2\frac{\varepsilon}{\mu}\pi a(d+a)J_1^2(ka) \tag{3.6.12}$$

上式第一项是由圆柱腔侧壁的损耗引起的,第二项是由位于 $z=0$ 和 $z=d$ 处腔壁的损耗引起的。圆柱谐振腔的品质因数为

$$Q = \frac{\omega_0 U}{P_d} = \sqrt{2\sigma\omega_0\varepsilon}\,\frac{2.405}{2(1+a/d)} \tag{3.6.13}$$

这里用到了式(3.6.9c)。TM_{010}的三个下标分别对应圆柱坐标系的三个坐标变量 ϕ,ρ 和 z。以 TE_{011}为例,它表示波导中 TE_{01}模式在 $\hat{z}$ 方向上形成驻波。

3.6.3 球形腔谐振器

由于球形腔在任何方向上都没有均匀的截面,波导公式不再适用。考虑球坐标系中的麦克斯韦方程(图 3.6-4)研究 ϕ 对称,即$\partial/\partial\phi=0$ 的情形。这里不再将一般的场根据 $\hat{z}$ 分量分解为 TM 和 TE,而据 $\hat{r}$ 分量将场分解为 TM 和 TE。对于 TM 波,由麦克斯韦方程有

$$\frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial\theta} = i\omega\mu rH_\phi \tag{3.6.14a}$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(H_\phi\sin\theta) = -i\omega\varepsilon E_r \tag{3.6.14b}$$

$$-\frac{\partial}{\partial r}(rH_\phi) = -i\omega\varepsilon rE_\theta \tag{3.6.14c}$$

将式(3.6.14b)和(3.6.14c)代入到式(3.6.14a)可以得到关于 H_ϕ 的方程

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rH_\phi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial H_\phi}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}H_\phi + k^2H_\phi = 0 \tag{3.6.15}$$

对于 TE 波,可以得到类似的关于 E_ϕ 的方程,它将是式(3.6.15)的对偶形式。

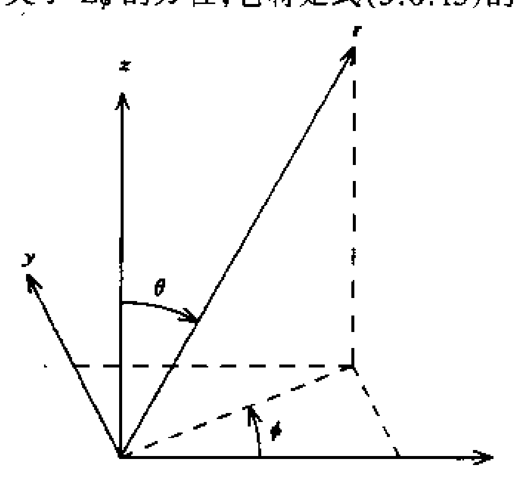


图 3.6-4 球坐标系

在求解式(3.6.14)和(3.6.15)之前,首先研究球坐标系中亥姆霍兹波动方程的通解。根据各向同性介质中的无源麦克斯韦方程,可以推导出关于电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 的波动方程

$$(\nabla^2 + k^2)\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{H} \end{bmatrix} = 0$$

令 $W(r,\theta,\phi)$表示 $\boldsymbol{E}$ 或$\boldsymbol{H}$ 的任意直角坐标分量。亥姆霍兹方程具有下面的形式

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rW) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial W}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 W}{\partial\phi^2} + k^2 W = 0 \tag{3.6.16}$$

注意到 $\boldsymbol{H} = \hat{\boldsymbol{\phi}}H_\phi, \nabla^2\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{(r^2\sin^2\phi)}$,可以直接从式(3.6.16)推导得出式(3.6.15),亥姆霍兹方程(3.6.16)可以用分离变量法求解,令

$$W = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \tag{3.6.17}$$

将式(3.6.17)代入(3.6.16),可以得到下列三个微分方程

$$r\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(rR) + [(kr)^2 - n(n+1)]R = 0 \tag{3.6.18a}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta = 0 \tag{3.6.18b}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} + m^2\Phi = 0 \tag{3.6.18c}$$

这三个微分方程的解分别是球贝塞尔函数 $b_n(kr)$、连带勒让德(Legendre)多项式 $L_n^m(\cos\theta)$和谐波函数 $\mathrm{e}^{\pm im\phi}$。

球贝塞尔函数 $b_n(kr)$由分数阶的圆柱贝塞尔函数 $B_{n+1/2}(\xi)$得到,$B_{n+1/2}(\xi)$满足下列贝塞尔方程

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}B(\xi) + \frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}B(\xi) + \left[1 - \frac{(n+1/2)^2}{\xi^2}\right]B(\xi) = 0$$

通过令 $R(\xi) = (\pi/2\xi)^{1/2}B(\xi), \xi = kr$,可以将式(3.6.18a)写成贝塞尔方程的形式。由此可以得到

$$b_n(kr) = \sqrt{\pi/2kr}B_{n+1/2}(kr) \tag{3.6.19}$$

如果 n 是一个整数,则 $B_{n+1/2}$简化为简单的 r 的正弦及乘方的函数。例如,前面几阶整数阶球贝塞尔函数为

$$j_0(kr) = \frac{\sin kr}{kr} \tag{3.6.20a}$$

$$j_1(kr) = -\frac{\cos kr}{kr} + \frac{\sin kr}{(kr)^2} \tag{3.6.20b}$$

$$j_2(kr) = -\frac{\sin kr}{kr} - \frac{3\cos kr}{(kr)^2} + \frac{3\sin kr}{(kr)^3} \tag{3.6.20c}$$

$$n_0(kr) = -\frac{\cos kr}{kr} \tag{3.6.21a}$$

$$n_1(kr) = -\frac{\sin kr}{kr} - \frac{\cos kr}{(kr)^2} \tag{3.6.21b}$$

$$n_2(kr) = \frac{\sin kr}{kr} - \frac{3\sin kr}{(kr)^2} - \frac{3\cos kr}{(kr)^3} \tag{3.6.21c}$$

第一类球汉开尔函数的形式为

$$h_0^{(1)}(kr) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{\mathrm{i}rk} \tag{3.6.22a}$$

$$h_1^{(1)}(kr) = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{rk}\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{kr}\right) \tag{3.6.22b}$$

$$h_2^{(1)}(kr)=\frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}kr}}{rk}\left[1+\frac{3\mathrm{i}}{kr}+3\left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^2\right] \tag{3.6.22c}$$

第二类球汉克尔函数是第一类球汉克尔函数的复共轭。

前几阶一次连带勒让德多项式为

$$P_0^1(\cos\theta)=0 \tag{3.6.23a}$$

$$P_1^1(\cos\theta)=\sin\theta \tag{3.6.23b}$$

$$P_2^1(\cos\theta)=3\sin\theta\cos\theta \tag{3.6.23c}$$

所有的连带勒让德多项式 $P_n^1(\cos\theta)$的共有性质是当 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 时为 0；当 $\theta=\pi/2$ 时，n 为偶数时 $P_n^1(\cos\theta)=0$，n 为奇数时 $P_n^1(\cos\theta)$取最大值。对于 H_ϕ 分量

$$\boldsymbol{H}=\hat{\boldsymbol{\phi}}H_\phi=(-\hat{\boldsymbol{x}}\sin\phi+\hat{\boldsymbol{y}}\cos\theta)H_\phi$$

代入式(3.6.16)可以得到

$$\left(\nabla^2+k^2-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)H_\phi=0$$

式中最后一项对解的作用是使连带 Legendre 多项式的级数 m 加 1。

根据式(3.6.16)及其解的分离变量形式(3.6.17)，可以看到关于 H_ϕ 的方程(3.6.15)式的解有下面的形式

$$H_\phi=b_n(kr)P_n^1(\cos\theta) \tag{3.6.24}$$

即 H_ϕ 与角度 ϕ 无关。对于半径为 a 的球形腔，由于坐标原点在腔内，所以用球贝塞尔函数。对于最低阶的 TM 模，令 $n=1$，并用三个下标分别表示 r, ϕ 和 θ 的变化。其中 TM_{101} 模电磁场的解为

$$H_\phi=H_0\sin\theta\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}J_{3/2}(kr)=H_0\frac{\sin\theta}{kr}\left(\frac{\sin kr}{kr}-\cos kr\right) \tag{3.6.25a}$$

$$E_r=\mathrm{i}2H_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\cos\theta}{k^2r^2}\left(\frac{\sin kr}{kr}-\cos kr\right) \tag{3.6.25b}$$

$$E_\theta=\mathrm{i}H_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\sin\theta}{k^2r^2}\left(\frac{k^2r^2-1}{kr}\sin kr+\cos kr\right) \tag{3.6.25c}$$

根据 $r=a$ 时 $E_\theta=0$ 的边界条件，可以得到

$$\tan ka=\frac{ka}{1-k^2a^2}$$

求解该超越方程可以得到 $ka\approx2.74$，这就是谐振腔的谐振波数。

专题 3.6.A 腔的扰动

当腔壁或者腔内介质发生扰动时，腔的谐振频率也会发生变化。如图3.6-5所示，考虑腔壁向腔内的扰动。假设未扰动时的场具有谐振频率 ω_0，并且满足麦克斯韦方程

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_0=\mathrm{i}\omega_0\mu\boldsymbol{H}_0 \tag{3.6.26a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_0=-\mathrm{i}\omega_0\varepsilon\boldsymbol{E}_0 \tag{3.6.26b}$$

扰动后的谐振频率变成 ω，扰动后的场分布满足麦克斯韦方程

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H} \tag{3.6.27a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=-\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{3.6.27b}$$

现在的任务是根据 ω_0 导出 ω。用 $\boldsymbol{H}$ 点乘式(3.6.26a)的复共轭减去 $\boldsymbol{E}_0^*$ 点乘式(3.6.26b)，可

经扰动后的腔体 V 和表面 S

向内扰动的体积 ΔV 和表面 ΔS

未经扰动的腔体 V_0 和表面积 S_0

图3.6-5 腔的扰动

以得到

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E}_0^* \times \boldsymbol{H}) = -\mathrm{i}\omega_0 \mu \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}_0^* + \mathrm{i}\omega\varepsilon \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}_0^* \tag{3.6.28a}$$

然后用 $\boldsymbol{H}_0^*$ 点乘式(3.6.27a)减去 $\boldsymbol{E}$ 点乘式(3.6.26b)的复共轭,可以得到

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}_0^*) = \mathrm{i}\omega\mu \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}_0^* - \mathrm{i}\omega_0 \varepsilon \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}_0^* \tag{3.6.28b}$$

对式(3.6.28a)与(3.6.27b)的和在未扰动的谐振腔的体积 $V_0 = V + \Delta V$ 内进行积分,可以得到

$$\oiint_{\Delta S} \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}_0^* = \mathrm{i}(\omega - \omega_0) \iiint_{V_0} \mathrm{d}V(\varepsilon \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}_0^* + \mu \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}_0^*)$$

在上式的推导中,用到了扰动后的边界上 $\boldsymbol{E}$ 的切向分量为0和未扰动的边界上 $\boldsymbol{E}_0$ 的切向分量为0的边界条件。需要注意的是,式中的面积分只是在小的扰动边界 ΔS 上进行,而体积分则是在整个未扰动的体积内进行。可以得到精确的方程

$$\omega - \omega_0 = -\mathrm{i} \frac{\oiint_{\Delta S} \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}_0^*}{\iiint_{V_0} \mathrm{d}V(\varepsilon \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}_0^* + \mu \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}_0^*)} \tag{3.6.29}$$

现在假定腔体的扰动非常小,以至于上式右边积分中的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 可以用未作扰动时的场 $\boldsymbol{E}_0$ 和 $\boldsymbol{H}_0$ 替换,然后可以得到 $\omega - \omega_0$ 的近似值为

$$\begin{aligned}
\omega - \omega_0 &\approx -\mathrm{i} \frac{\oiint_{\Delta S} \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{H}_0^*}{\iiint_{V_0} \mathrm{d}V(\varepsilon |\boldsymbol{E}_0|^2 + \mu |\boldsymbol{H}_0|^2)} \\
&= \omega_0 \frac{\iiint_{\Delta V} \mathrm{d}V(\mu |\boldsymbol{H}_0|^2 - \varepsilon |\boldsymbol{E}_0|^2)}{\iiint_{V_0} \mathrm{d}V(\mu |\boldsymbol{H}_0|^2 + \varepsilon |\boldsymbol{E}_0|^2)} \\
&= \omega_0 \frac{\Delta W_m - \Delta W_e}{W_m + W_e}
\end{aligned} \tag{3.6.30}$$

式中分母表示未作扰动时腔内存储的总能量,分子是由于腔体向内扰动所移走的磁场能量与扰动移走的电场能量之差。所以如果腔体向内扰动的部分是腔内磁场的部分时,谐振频率将增大;如果腔体向内扰动的部分是腔内电场的部分时,谐振频率将降低。如果腔体向外扰动,则对谐振频率的影响相反。

下一步将研究由于腔内介质扰动引起的谐振频率的变化。令未扰动时的介质为各向同性介质。对于更一般的情况,可以在扰动中包括各向异性介质。扰动前后的麦克斯韦方程分别为

$$\nabla\times \boldsymbol{E}_0 = \mathrm{i}\omega_0\mu \boldsymbol{H}_0 \tag{3.6.31a}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{H}_0 = -\mathrm{i}\omega_0\varepsilon \boldsymbol{E}_0 \tag{3.6.31b}$$

和

$$\nabla\times \boldsymbol{E} = \mathrm{i}\omega\mu \boldsymbol{H} + \mathrm{i}\omega\Delta\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{H} \tag{3.6.32a}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{H} = -\mathrm{i}\omega\varepsilon \boldsymbol{E} - \mathrm{i}\omega\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E} \tag{3.6.32b}$$

用 $\boldsymbol{H}$ 点乘式(3.6.31a)的复共轭减去 $\boldsymbol{E}_0^*$ 点乘式(3.6.32b),可以得到

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_0^*\times\boldsymbol{H}) = -\mathrm{i}\omega_0\mu\boldsymbol{H}_0^*\cdot\boldsymbol{H} + \mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_0^* + \mathrm{i}\omega(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{E}_0^*$$

然后用 $\boldsymbol{H}_0^*$ 点乘式(3.6.32a)减去 $\boldsymbol{E}$ 点乘式(3.6.31b)的复共轭,可以得到

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}_0^*) = \mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}_0^* + \mathrm{i}\omega(\Delta\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{H} - \mathrm{i}\omega_0\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_0^*$$

将上面两式的和在腔内体积上积分,并利用腔体表面上 $\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}=0$ 和 $\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_0=0$ 的边界条件,可以得到

$$\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0} = \frac{-\iiint_V \mathrm{d}V[(\Delta\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{H}_0^* + (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{E}_0^*]}{\iiint_{V_0}\mathrm{d}V(\mu\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}_0^* + \varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_0^*)} \tag{3.6.33}$$

式(3.6.33)是一个精确的表达式。当介质的扰动足够小时,在等式的右边可以用未作扰动时的场 $\boldsymbol{E}_0$ 和 $\boldsymbol{H}_0$ 替换扰动后的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$,从而可以得到

$$\frac{\omega-\omega_0}{\omega}\approx-\frac{\Delta W_\mathrm{m}+\Delta W_\mathrm{e}}{W_\mathrm{m}+W_\mathrm{e}} \tag{3.6.34}$$

上式分母表示未作扰动时腔内的总能量,分子表示由于介质扰动引起的腔内电场和磁场能量的增加值。所以腔内介质介电常数或者磁导率的增加都会引起谐振频率的减小。例如,回顾圆柱谐振腔主模式的谐振波数为 $k_\rho a=2.405$,当 $k_\rho=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ 增加时,谐振频率 ω_0 将降低。当然,腔内介质并不需要均匀分布。对于因为 $\Delta\boldsymbol{\mu}$ 和 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ 引起的 ΔW_m 和 ΔW_e 的计算,只需要在介质发生扰动的区域内进行积分就可以了。

习题

3.6.1 考虑具有正方形底面,高度为 a 的矩形腔,在腔的底部放一个厚度为 d 的介质片,利用扰动公式求谐振频率的变化。

3.6.2 推导波中传播常数的扰动公式,证明下列公式是精确的。

$$k_z-k_{0z}=\omega\frac{\iint(\Delta\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_0^*+\Delta\mu\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}_0^*)\mathrm{d}S}{\iint_S(\boldsymbol{E}_0^*\times\boldsymbol{H}+\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}_0^*)\cdot\hat{\boldsymbol{z}}\mathrm{d}S}$$

式中 k_{0z}表示未作扰动时的传播常数,公式中的场矢量与 z 坐标无关。介质外部的场可以用未作扰动时场的值近似,介质内部的场可以用准静态值近似。

考虑半径为 a 的圆柱波导内部中央有一个同心的半径为 b 的介质杆。未扰动时圆柱波导内的主模式 TE_{11}场的解为

$$E_\rho=\frac{1}{\rho}J_1\left(1.841\frac{\rho}{a}\right)\sin\phi$$

$$E_\phi=\frac{1.841}{a}J_1'\left(1.841\frac{\rho}{a}\right)\sin\phi$$

$$H_\rho=-\frac{E_\phi}{Z_0}$$

$$H_{\phi} = \frac{E_{\rho}}{Z_{\circ}}$$

其中，$Z_{\circ}=\frac{\omega\mu}{k_{oz}}$。利用介质杆内的准静态场近似，即 $\boldsymbol{E}=[2/(1+\epsilon_r)]\boldsymbol{E}_0$，以及围绕波导中央的场分布 $E_{\rho}=(1.841/2a)\sin\phi$，$E_{\phi}=(1.841/2a)\cos\phi$，推导 $(k_z-k_{oz})/k$ 的扰动公式。

3.6.3　半径为 a 的球形腔内的场为

$$H_{\phi} = \frac{H_0}{kr}j_1\left(2.744\frac{r}{a}\right)\sin\theta$$

假定该谐振腔被一个介电常数为 ϵ，半径为 b 的较小的同心介质球扰动。在靠近球心 $kr\ll1$ 的区域内未作扰动时的场分布为

$$E_r = 2\mathrm{i}H_0\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}\cos\theta$$

$$E_{\theta} = -\frac{2\mathrm{i}}{3}H_0\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}\sin\theta$$

对半径为 b 的介质球内的场分布取其准静态场

$$\boldsymbol{E} = \frac{3}{2+\epsilon_r}\boldsymbol{E}_0$$

其中，$\boldsymbol{E}_0$ 是未作扰动时介质外部的场。求腔内的时间平均能量。利用介质球内的准静态场求 $(\omega-\omega_0)/\omega_0$ 的表达式。

部分习题答案

3.1.1

当 $\omega_{\text{eff}}/\omega\to\infty$ 时 $\epsilon=\epsilon_0$；当 $\omega_{\text{eff}}=0$ 时，$\epsilon=\epsilon_0(1-\omega_p^2/\omega^2)$。

3.1.5

(1) 不是。$\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{E}_2=0$ 并且 $\boldsymbol{E}_1(t)\times\boldsymbol{E}_2(t)\neq0$。

(2) 是。$\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2=0$ 并且 $\boldsymbol{E}_1(t)\cdot\boldsymbol{E}_2(t)=0$。

3.2.1

(1) 穿透深度为 2cm。

(2) 频率为 60Hz 时，损耗正切为 1.5×10^7，穿透深度为 32m. 当频率为 10MHz 时，损耗正切为 90，穿透深度为 8cm.

(3) 在表面下 0 深度处 $|\boldsymbol{E}|=1\text{V/m}$，在 100m 深处，$|\boldsymbol{E}|=0.019\text{V/m}$；在表面下 0 深度处的功率密度为 25W/m^2，在 100m 深处的功率密度为 8.39mW/m^2。

3.2.2

(1) $k=6\pi\times10^3\text{m}^{-1}\approx3\times10^3\text{K}_\circ$。

(2) $\omega=k\times10^8=6\pi\times10^{11}\text{Hz}$。

(3) $z=100-\frac{1}{3}\times10^{-3}n\text{m}$，其中 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$。

3.2.3

$$k_R=\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2\omega^2}}+1\right)\right]^{1/2},\qquad k_I=\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2\omega^2}}-1\right)\right]^{1/2}。$$

3.2.4；(2) $N=7\times10^{28}\text{m}^{-3}$，　$d_p=\sqrt{\dfrac{9.1\times10^{-31}}{7\times10^{28}\times(1.6\times10^{-19})^2\times4\pi\times10^{-7}}}\approx2\times10^{-8}\text{m}$。

(3) 良导体的趋肤深度为 $\delta\propto1/\sqrt{f}$。当频率很低时，δ 将会很大，所以场将能够穿透它。但对于超导体，穿透深度将与频率无关。这表明，即使是慢变化的场(包括电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$)也不能穿透超导体。注意，没有电场支持，稳恒电流也可以存在于超导体中。

3.2.5

(3) 到达光检测器的功率为 $P_1=\dfrac{1}{2\eta}|E_0|^2\cos^2\left(k_0\dfrac{Ne^2l_1}{4\omega^2m\varepsilon_0}\right)=P_0\cos^2\left(k_0\dfrac{Ne^2l_1}{4\omega^2m\varepsilon_0}\right)$。利用 $\phi_t-\phi_r=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ 的关系式和相同的推导,可以得到 $P_2=P_0\sin^2\left(k_0\dfrac{Ne^2l_1}{4\omega^2m\varepsilon_0}\right)$。所以有 $P_0=P_1+P_2$,满足能量守恒。

3.2.6

(1) $\Delta t=t(f)-t(f+\Delta f)=\dfrac{L\omega_p^2}{8\pi^2c}\left[\dfrac{1}{f^2}-\dfrac{1}{(f+\Delta f)^2}\right]=\dfrac{L\omega_p^2}{8\pi^2c}\Delta\left(\dfrac{1}{f^2}\right)$。

(2) $L=\dfrac{8\pi^2cQ}{3.086\times10^{16}\omega_p^2}=\dfrac{8\pi^2\times3\times10^8\times0.1104\times10^{18}}{3.18\times10^8\times3.086\times10^{16}}\approx266\text{Pa}\cdot\text{s}$。

3.3.1

最大值和最小值发生的时刻满足在 $\tan2\omega t_M=\sqrt{3}$时。在 $\omega t=\pi/6$ 时刻,长轴为 $\hat{y}2\sqrt{3}$;在 $\omega t=4\pi/6$ 时刻,短轴为 $-\hat{x}\sqrt{3}$;在 $\omega t=7\pi/6$ 时刻,长轴为 $-\hat{y}2\sqrt{3}$;在 $\omega t=10\pi/6$ 时刻,短轴为 $\hat{x}\sqrt{3}$。

3.3.2

$\cos\alpha_{\max}=\dfrac{2\sqrt{k/k_z}}{1+k/k_z}$。

3.3.3

沿 $\hat{y}$ 方向极化的寻常波不衰减,非常波则以 $\exp(-\sigma_z/2\sqrt{\mu/\varepsilon_z}x)$衰减。所以任何沿 $\hat{z}$ 方向传播的波穿过偏光板后都将变成线极化寻常波。

3.3.4

菲涅耳椭球为 $\varepsilon_1x_1^2+\varepsilon_2x_2^2+\varepsilon_3x_3^2=1$。张量椭球为 $\dfrac{x_1^2}{\varepsilon_1}+\dfrac{x_2^2}{\varepsilon_2}+\dfrac{x_3^2}{\varepsilon_3}=1$。

3.3.8

两个特征波都是线极化波。

3.3.10

(1)$\omega_p=\sqrt{\dfrac{Nq^2}{m\varepsilon_0}}\approx56.4\sqrt{N}$;$f_p=\dfrac{\omega_p}{2\pi}$。对于 E 层,$N=10^{11}\text{m}^{-3}$,$f_p=2.84$ MHz。对于 F 层,$N=6\times10^{11}\text{m}^{-3}$,$f_p=6.95$ MHz。对于远高于电子回旋频率和等离子体频率的微波频率,等离子体的介电常数约等于自由空间的介电常数,Ⅰ类和Ⅱ类射线的分裂可以忽略。同样,等离子体的碰撞频率通常也远低于微波频率。在这种情况下,碰撞的影响可以忽略,等离子体可以被看做是无损耗介质。

现在对于一个等离子体层,可以将地球磁场 $\boldsymbol{H}_e$ 分解为 $\boldsymbol{H}_\parallel$ 和 $\boldsymbol{H}_\perp$ 两个分量。由于假定 ϕ 很小,所以 $\boldsymbol{H}_e$ 的主要影响来源于 $\boldsymbol{H}_\parallel$。可以取 $\boldsymbol{k}$ 的方向为$\hat{z}$ 并考虑有效的外部磁场为 $\boldsymbol{H}_\parallel=H_e\cos\phi$。在这些近似条件下,一层内的法拉第旋转角为

$$\Delta\phi=\frac{1}{2}(\phi_r-\phi_l)=\frac{\omega dl}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{\nu(k-k_g)}}-\frac{1}{\sqrt{\nu(k+k_g)}}\right]$$
$$=\frac{\omega dl}{2\sqrt{\nu}}\left(\frac{1}{\sqrt{k-k_g}}-\frac{1}{\sqrt{k+k_g}}\right)$$

式中 $dl=dh\sec\theta$,且

$$k=\frac{1}{\varepsilon_0}\left[\frac{1-\omega_p^2/\omega^2-\omega_c^2/\omega^2}{(1-\omega_p^2/\omega^2)^2-\omega_c^2/\omega^2}\right],\quad k_g=\frac{1}{\varepsilon_0}\left[\frac{\omega_c\omega_p^2/\omega^3}{(1-\omega_p^2/\omega^2)^2-\omega_c^2/\omega^2}\right]$$

由于 $k\gg k_g$

$$\Delta\phi=\frac{\omega dl}{2\sqrt{\nu k}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{k_g}{k}}}-\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{k_g}{k}}}\right)$$
$$\approx\frac{\omega dl}{2\sqrt{\nu k}}\left[\left(1+\frac{k_g}{2k}\right)-\left(1-\frac{k_g}{2k}\right)\right]$$

$$= \frac{\omega dl}{2\sqrt{\nu}}\frac{k_g}{k^{3/2}}$$

可以忽略(ω_p/ω)和(ω_c/ω)的二阶及高阶项，进一步简化$(k_g/k^{3/2})$，从而得到

$$\frac{k_g}{k^{3/2}} = \sqrt{\epsilon_0}\left[\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^2 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right]^{1/2}\frac{\omega_c\omega_p^2\omega^3}{(1-\omega_p^2/\omega^2-\omega_c^2/\omega^2)^{3/2}} \approx \sqrt{\epsilon_0}\,\frac{\omega_c\omega_p^2}{\omega^3}$$

最后得到

$$\Delta\phi \simeq \frac{\omega dl\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}{2}\frac{eBNe^2}{m^2\epsilon_0\omega^3}$$

$$= \frac{\eta e^3\mu_0}{8\pi^2 m^2 f^2}NH_e\cos\phi\sec\theta \mathrm{d}h$$

$$= \frac{2.97\times10^{-2}}{f^2}NM\mathrm{d}h$$

上面的公式只适用于一层的情况。通过将电离层划分为无限小的层，可以将求和极限写成积分，即

$$\Omega = \int\Delta\phi\mathrm{d}h \simeq \frac{\eta e^3\mu_0}{8\pi^2 m^2 f^2}\int MN\mathrm{d}h$$

(2) $N=10^{11}\mathrm{m}^{-3}$，$H_e=50\mathrm{A/m}$，$f=1.4\times10^9\ \mathrm{Hz}$，$\theta=60°$，$\phi=0°$，$h=10^6\mathrm{m}$。则总的法拉第旋转角为

$$\Omega \simeq \frac{2.97\times10^{-2}\times10^{11}\times50\times2\times10^6}{(1.4\times10^9)^2} = 0.1515\mathrm{rad} \simeq 8.68°$$

3.3.11

$$\boldsymbol{E} = \kappa\boldsymbol{D} + \chi\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{H} = \gamma\boldsymbol{D} + \nu\boldsymbol{B}$$

在 kDB 坐标系中，本构关系不发生变化，所以可以得到

$$\begin{bmatrix}\nu\kappa-\chi\gamma-u^2 & (\gamma-\chi)u\\ (\chi-\gamma)u & \nu\kappa-\chi\gamma-u^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\end{bmatrix} = 0 \tag{3.7.1}$$

$$u^2 = \left(\nu\kappa-\frac{1}{2}\chi^2-\frac{1}{2}\gamma^2\right) \pm \sqrt{\left(\nu\kappa-\frac{1}{2}\chi^2-\frac{1}{2}\gamma^2\right)^2-(\chi\gamma-\nu\kappa)^2}$$

$$= \left(\nu\kappa-\frac{1}{2}\chi^2-\frac{1}{2}\gamma^2\right) \pm (\chi-\gamma)\sqrt{\frac{1}{4}(\chi+\gamma)^2-\nu\kappa} \tag{3.7.2}$$

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{(\gamma-\chi)u}{u^2+\chi\gamma-\nu\kappa} \tag{3.7.3}$$

特征波的极化可以是下列情况之一。

(1) 如果 $\nu\kappa > \frac{1}{4}(\chi+\gamma)^2$，或者 $\nu\kappa < \frac{1}{4}(\chi+\gamma)^2$ 并且 $u^2<0$，则波为椭圆极化波。

(2) 如果 $\nu\kappa < \frac{1}{4}(\chi+\gamma)^2$ 并且当对(3.7.2)取相反的符号时，u^2 的符号与之相反，则得到一个线极化波和一个椭圆极化波。

(3) 如果 $u^2\geqslant0$ 两个特征波都是线极化波。

3.3.12

(1)

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{pmatrix}\kappa_x & 0 & 0\\ 0 & \kappa_y & 0\\ 0 & 0 & \kappa_z\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{pmatrix}\kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13}\\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{23}\\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33}\end{pmatrix}$$

其中，

$$\kappa_{11} = \kappa_x\sin^2\phi + \kappa_y\cos^2\phi$$

$$\kappa_{12} = \kappa_{21} = (\kappa_x-\kappa_y)\cos\theta\sin\phi\cos\phi$$

$$\kappa_{22} = (\kappa_x\cos^2\phi + \kappa_y\sin^2\phi)\cos^2\theta + \kappa_z\sin^2\theta$$

$$\kappa_{13} = \kappa_{31} = (\kappa_x - \kappa_y)\sin\theta\sin\phi\cos\phi$$

$$\kappa_{23} = \kappa_{32} = (\kappa_x\cos^2\phi + \kappa_y\sin^2\phi - \kappa_z)\cos\theta\sin\theta$$

$$\kappa_{33} = (\kappa_x\cos^2\theta + \kappa_y\sin^2\theta)\sin^2 + \kappa_z\cos^2\theta$$

(2)

$$\begin{bmatrix} u^2 - \nu\kappa_{11} & -\nu\kappa_{12} \\ -\nu\kappa_{21} & u^2 - \nu\kappa_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$u^2 = \frac{\nu}{2}\left[(\kappa_{11} + \kappa_{22}) \pm \sqrt{(\kappa_{11} - \kappa_{22})^2 + 4\kappa_{12}^2}\right]$$

进一步可以得到

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{\nu\kappa_{12}}{u^2\nu\kappa_{22}} = \frac{2\kappa_{12}}{\kappa_{11} - \kappa_{22} \pm \sqrt{(\kappa_{11} - \kappa_{22})^2 + 4\kappa_{12}^2}}$$

即特征波为线极化波。令

$$\tan 2\psi = \frac{2\kappa_{12}}{\kappa_{11} - \kappa_{22}}$$

则

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{\tan 2\psi}{1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 2\psi}} = \frac{\sin 2\psi}{\cos 2\psi \pm 1}$$

如果在式中取 + 号,则

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{\sin 2\psi}{\cos 2\psi - 1} = \frac{2\sin\psi\cos\psi}{2\cos^2\psi} = \tan\psi$$

如果在式中取 − 号,则

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{\sin 2\psi}{\cos 2\psi + 1} = -\frac{2\sin\psi\cos\psi}{2\sin^2\psi} = -\cot\psi$$

3.4.1

(1) Zenneck 波是快波。

(2) $R_s = X_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$。

(3) 对于感性边界, $R_s = 0$,并且 $k_{z1} = \omega\epsilon X_s$,有 $k_x^2 = \omega^2\mu\epsilon + k_{z1}^2 > k^2$。磁场为 $H_y = H_0 e^{-k_{z1}z} e^{ik_x x}$,这是沿 $\hat{x}$ 方向传播的表面波,其相速小于真空中的光速。

3.4.2

(1) 对于 E 层, $f_p = 2.84$ MHz。对于 F 层, $f_p = 6.95$ MHz。

(2) 在 E 层中, $\theta_t = \arcsin(1.04\sin\theta)$。在 F 层中, $\theta_t = \arcsin(1.39\sin\theta)$。

(3) 对于 E 层,当 $f < \frac{2}{\sqrt{3}}f_p = 3.27$ MHz 时发生全反射。对于 F 层,当 $f < \frac{2}{\sqrt{3}}f_p = 8.03$ MHz 时发生全反射。

3.4.3

$\theta_t \approx \arctan\left(\sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}\sin\theta\right)$。

3.4.4

寻常波的临界角为 $\theta_{oc} = \arcsin\sqrt{\epsilon_0/\epsilon}$。

非常波的临界角为 $\theta_{ec} = \arcsin\sqrt{\epsilon_0/\epsilon_z}$。

对于负单轴晶体,由于 $\epsilon_z < \epsilon$,所以有 $\theta_{ec} > \theta_{oc}$。当入射在满足 $\theta_{ec} > \theta > \theta_{oc}$ 的范围内时,只有非常波可以透射。

3.4.5

由于 R^{TE} 和 T^{TE} 是电场矢量幅度反射系数和透射系数,而 R^{TM} 和 T^{TM} 是磁场矢量幅度反射系数和透射系数,所以 $R^{TE} \neq R^{TM}$, $T^{TE} \neq T^{TM}$。对于能量的反射率和透射率,由于两种情况都是 TEM 的,所以两种情况将得到

相同的结果。

3.4.6

对于 $n=1.6$,求得 $\theta=58.8°$或 $42.5°$。所以要求 α 为 $58.8°$或者 $42.5°$。

3.4.7

假定区域0和区域1是被一个边界分开的两个半空间,区域0的介电常数和磁导率分别为 ε_0 和 μ_0,区域1的介电常数和磁导率分别为 $\varepsilon_1\varepsilon_0$ 和 μ_0。波从区域0入射到边界上的透射率 t 为

$$t=\left|\frac{4\sqrt{\varepsilon_1}}{(1+\sqrt{\varepsilon_1})^2}\right|$$

$$\varepsilon_1=10\varepsilon_0+\mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega}=\varepsilon_R+\mathrm{i}\varepsilon_I$$

$$\sqrt{\varepsilon_1}=\left[\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_R^2+\varepsilon_I^2}+\varepsilon_R}{2}\right)^{1/2}+\mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_R^2+\varepsilon_I^2}-\varepsilon_R}{2}\right)^{1/2}\right]$$

$$t^2=\frac{4\sqrt{\varepsilon_R^2+\varepsilon_I^2}}{\left[1+\sqrt{\varepsilon_R^2+\varepsilon_I^2}+2\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_R^2+\varepsilon_I^2}+\varepsilon_R}{2}\right)^{1/2}\right]^2}$$

令 $u=\sqrt{\varepsilon_R^2+\varepsilon_I^2}$, $\varepsilon_R<u<\infty$,则

$$t^2=\frac{4u}{\left[1+u+2\left(\frac{u+\varepsilon_R}{2}\right)^{1/2}\right]^2}$$

当 $u=\varepsilon_R=10$ 时,对于 $\varepsilon_R<u$ 有

$$\frac{4u}{\left[1+u+2\left(\frac{u+\varepsilon_R}{2}\right)^{1/2}\right]^2}\leqslant\frac{4u}{\left[1+u+2\sqrt{\varepsilon_R}\right]^2}$$

当 $u=1+2\sqrt{\varepsilon_R}=1+2\sqrt{10}<10=\varepsilon_R$ 时,$\frac{4u}{[1+u+2(\sqrt{\varepsilon_R})]^2}$取得最大值,即 t^2 取得最大值。对于 $\varepsilon_R<u<\infty$,当 $\varepsilon_I=0$, $\omega\to\infty$时,t^2 在 $u=\varepsilon_R$ 取得最大值。在这种情况下,电磁波从区域0到区域1的透射最大,衰减最小。所以当 $\omega\to\infty$时,接收机接收的功率最大。

3.4.8

(1) TE 波的反射系数为

$$R=\frac{1-P_{0t}}{1+P_{0t}},\qquad P_{0t}=\frac{\mu_0 k_{tz}}{\mu_t k_z}$$

对于理想导体 $|P_{0t}|\to\infty$,所以 $R=-1$,这表示相移为 $-\pi$。

(2) 介质上全反射的相移为

$$\Phi=-2\arctan\frac{\mu_0\alpha_{tz}}{\mu_t k_z}$$

波从位于 $x=-d$ 位置的理想导体上反射的相移为 $-\pi+2k_xd$。

如果要求情况(1)和情况(2)有相同的相移,则必须使

$$-\pi+2k_xd=\Phi+2n\pi$$

$$k_xd=\frac{\Phi}{2}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$$

$$d=\frac{\Phi}{2k_x}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k_x}$$

3.4.9

临界角为 $\theta_c=\arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_0}}$。布儒斯特角为 $\theta_B=\arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_0}}$。$\theta_c$ 永远大于 θ_B,所以不可能存在同时发生全反射和全透射的情况。

3.4.10

当$\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}\sin\psi_0 < N_{balsam} \to \alpha > 30.52°$时发生内部全反射。这时香液中的波为凋落波，所以输出的 TE 波非常小。当 $\alpha < 30.52°$时，输出波主要是 TM 极化波。

3.4.12

如果 θ_B 是激光介质中的布儒斯特角，则有 $\tan\theta_B = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_b}}$。

由于 $\theta + \theta_B = \pi/2$，则 $\tan\theta = \tan(\pi/2 - \theta_B) = \cot\theta_B = \frac{1}{\tan\theta_B} = \sqrt{\frac{\epsilon_b}{\epsilon}}$，即 θ 也是空气区域的布儒斯特角。如果波以布儒斯特角入射，则波透过介质后将以介质中的布儒斯特角入射。

入射波可以分解为一个 TE 波和一个 TM 波。当入射波入射到正面(1)时，TM 波分量将会被无反射地($R^{TM}=0$)全部透射，而 TE 波只能被部分透射($R^{TE}\neq 0$)。当入射波从激光介质中入射到背面(2)时，TM 分量将会全部透射而 TE 分量将只能部分透射。

如果将光活性介质(激光介质)放置在两个高反射的平面镜之间，则沿垂直于镜面方向传播的波将会在两个平面镜之间来回弹射。其中的 TM 分量则在通过光活性介质的每个来回之后被连续放大，而 TE 分量则由于在激光棒边缘的反射而连续衰减。所以经过在激光介质中的几次透射后，TM 波将会被大大增强，而 TE 波将会被大大衰减直至消失。

如果 $\epsilon = 2.5$，那么 $\tan\theta_B = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_b}} = \frac{1}{\sqrt{2.5}} = 0.6325$

$$\theta_B = 32.3°$$
$$\theta = 90° - \theta_B = 57.7°$$
$$\phi = 90° - \theta_B = 57.7°$$
$$\alpha = 360° - 90° - (\theta + 90°) - \phi = 2\theta_B = 64.6°$$

3.4.13

(1) $\theta_c = 60°$。

(2) 布儒斯特角为 $\theta_B = 40.9°$。

(3) 对于 0°到 90°之间的任意角度，$\sin\theta < \tan\theta$，所以不会出现 $\theta = \theta_B > \theta_c$ 的情况。

第4章 辐　射

4.1 Cerenkov 辐射

1934 年 Cerenkov 通过试验发现,所有液体和固体物质在高速电子流的轰击下都能激发出可见光辐射。他发现:①为了激发出辐射,电子速度必须非常大;②电子束的速度与辐射的角度有关;③受激发光的电场矢量的极化方向与由入射电子束和辐射方向决定的平面平行。此后许多想通过不同的微观理论来解释上述发现的努力都失败了。1937 年,Frank 和 Tamm 用宏观理论进行解释并建立了如下理论:如果轰击物质的电子速度大于光在介质中的速度且介质的折射率大于 1,则在介质中均匀移动的电子就会产生光辐射。这一称为 Cerenkov 辐射现象的发现标志着宏观电磁理论的一个重大进展,本节将主要讨论这个内容。

辐射之源是由于带有电荷 q 的粒子以速度 $\boldsymbol{v}$ 在各向同性介质中的运动。粒子运动的速度将由于辐射的原因而下降。为了简化讨论,假设速度 $\boldsymbol{v}$ 恒定并沿 $\hat{z}$ 方向运动。运动带电粒子产生的电流为

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) = \hat{z}vq\delta(x)\delta(y)\delta(z-vt)$$

在圆柱坐标系中,有关于 ϕ 的对称性。注意其中

$$\int \mathrm{d}\rho\,\delta(\rho) = 1 = \iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y\delta(x)\delta(y) = \int 2\pi\rho\mathrm{d}\rho\,\delta(x)\delta(y)$$

可以写出 $\delta(x)\delta(y)=\delta(\rho)/2\pi\rho$,所以

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) = \hat{z}qv\,\delta(z-vt)\,\frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho} \tag{4.1.1}$$

这个源不是时谐的。可将其变换到频率域得到

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},\omega) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}t\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \hat{z}\,\frac{q}{4\pi^2\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z/v}\delta(\rho) \tag{4.1.2}$$

对每一个频谱分量 ω,可以得到一个电场的解

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}t\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

其对应的时间域解可通过傅里叶反变换得到

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \int \mathrm{d}\omega\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{4.1.3}$$

关于电场的主方程就变为

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - k^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \hat{z}\,\frac{\mathrm{i}\omega\mu q}{4\pi^2\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z/v}\delta(\rho) \tag{4.1.4}$$

通过定义一个矢量格林方程 $\boldsymbol{g}(\rho,z)$,就可以容易地求得这个方程的解,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \left[\boldsymbol{I} + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right]\cdot\boldsymbol{g}(\rho,z) = \boldsymbol{g}(\rho,z) + \frac{1}{k^2}\nabla[\nabla\cdot\boldsymbol{g}(\rho,z)] \tag{4.1.5}$$

从式(4.1.4),可得到关于 $\boldsymbol{g}(\rho,z)$的波动方程:

$$(\nabla^2 + k^2)\boldsymbol{g}(\rho, z) = -\hat{z}\frac{\mathrm{i}\omega\mu q}{4\pi^2\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z/v}\delta(\rho) \tag{4.1.6}$$

考虑到方程右边为 z 的函数且问题是轴对称的,可以将方程用圆柱坐标表示。令

$$\boldsymbol{g}(\rho, z) = \hat{z}g(\rho)\frac{\mathrm{i}\omega\mu q}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z/v} \tag{4.1.7}$$

则有

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\right) - \frac{\omega^2}{v^2} + k^2\right]g(\rho) = -\frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho} \tag{4.1.8}$$

对 $\rho \neq 0$,上面方程变为

$$\left[\frac{1}{\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\right) + k_\rho^2\right]g(\rho) = 0$$

其中,

$$k_\rho = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}}$$

这是零阶贝塞尔函数。由于式(4.1.8)在 $\rho = 0$ 处有一个奇点,且贝塞尔函数的解表示一向外传播的波,可选择

$$g(\rho) = CH_0^{(1)}(k_\rho\rho) \tag{4.1.9}$$

其中,常数 C 的选择根据 $\rho \to 0$ 时的边界条件匹配来决定。将式(4.1.8)在一无限小的面积 $2\pi\rho\mathrm{d}\rho$ 上积分,并令 $\rho \to 0$,可得到

$$\lim_{\rho\to 0} 2\pi\rho\frac{\mathrm{d}g(\rho)}{\mathrm{d}\rho} = -1$$

应用渐近公式 $H_0^{(1)}(k_\rho\rho) \approx \mathrm{i}(2/\pi)\ln(k_\rho\rho)$,可得到 $C = \mathrm{i}/4$ 并带入式(4.1.9)得

$$g(\rho) = \frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(k_\rho\rho) \tag{4.1.10}$$

这是圆柱坐标系下的标量格林函数。对与 z 无关的二维问题,标量格林函数就为如式(4.1.10)的简单形式,其中 $k_\rho = k$。

电场的解由式(4.1.7)和(4.1.5)给出。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{-q}{8\pi\omega\epsilon}\left(\hat{z}k^2 + \mathrm{i}\frac{\omega}{v}\nabla\right)H_0^{(1)}(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z/v} \tag{4.1.11}$$

由于我们感兴趣的主要是电荷的辐射,因此可以用 $H_0^{(1)}(k_\rho\rho)$ 的渐近式来求得远区的电场。在辐射场区 $k_\rho\rho \gg 1$,且 $H_0^{(1)}(k_\rho\rho) \approx \sqrt{2/\mathrm{i}\pi k_\rho\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\rho\rho}$。可以得到

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \approx \frac{q}{8\pi\omega\epsilon}\sqrt{\frac{2k_\rho}{\mathrm{i}\pi\rho}}\left(\hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\omega}{v} - \hat{z}k_\rho\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_\rho\rho + \omega z/v)} \tag{4.1.12}$$

这是一个平面波的表达式,其波矢量为 $\boldsymbol{k} = \hat{\boldsymbol{\rho}}k_\rho + \hat{z}\omega/v$,且 k_ρ 为实数。

Cerenkov 观察到的所有现象都可以用式(4.1.12)来解释。

(1)如果 $\omega^2\mu\epsilon > \omega^2/v^2$,则 k_ρ 为实数,这表明,

$$v > \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{n} \tag{4.1.13}$$

因此,如果介质中电荷的速度大于光在介质中的速度,则可获得平面波辐射。当电荷的速度小于光的速度时,k_ρ 为虚数且波在 $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ 方向是凋落的。

(2)相位为常数的平面波前以 $\hat{z}$ 方向为轴形成了一个锥面,其夹角方向 θ 由 $\boldsymbol{k}$ 与 $\hat{z}$ 给出(见图4.1-1)。

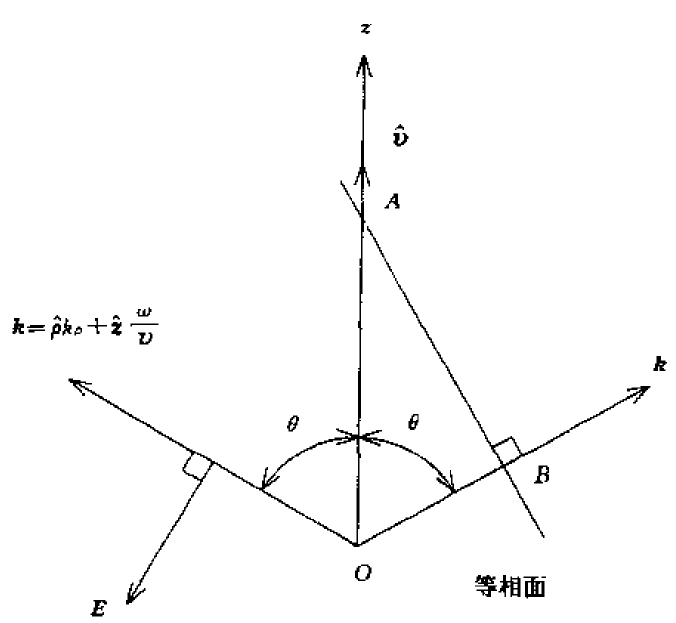


图4.1-1 Cerenkov 辐射

$$\cos\theta = \frac{\omega}{kv} = \frac{1}{n\beta} \tag{4.1.14}$$

其中,$\beta = v/c$。这里需注意,只有当 $n\beta > 1$ 时 θ 才为实数。从图4.1-1可见,AB 为等相位波前,OA 为带电粒子由 O 出发所走的距离,OB 为出射波由 O 出发所走的距离。

(3)关于辐射电磁波的极化,由式(4.1.12)看到 $\boldsymbol{E}$ 矢量在 $\boldsymbol{k}$ 和 z 决定的平面之中(如图4.1-1)。由于 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}=0$, $\boldsymbol{E}$ 同时也与 $\boldsymbol{k}$ 正交。对此我们可以试图给出如下解释,当带电粒子处于静止状态时其电场呈放射状指向径向方向。当它移动时,电力线将会弯曲,其弯曲的角度与移动速度成正比。当其运动速度超过光速时,电力线就会由粒子断裂出来形成辐射波。因此,电场矢量就会存在于由粒子移动方向和辐射方向决定的平面之中。

例 4.1.1 Cerenkov 辐射功率。

为计算辐射功率,可首先计算磁场分量,由法拉第定理得到

$$\boldsymbol{H} = \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{q}{8\pi}\sqrt{\frac{2k_\rho}{\mathrm{i}\pi\rho}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_\rho\rho+\omega z/v)} \tag{4.1.15}$$

其中已经忽略了 $\rho^{-3/2}$阶的各项。

考虑一个长为 l,半径为 ρ 的圆柱体。通过圆柱体表面辐射出的总功率由下式给出

$$S_\rho = 2\pi\rho l\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)]_\rho \tag{4.1.16}$$

为了计算 S_ρ,可首先确定时空电场实函数 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$。由于只需计算坡印廷矢量的 ρ 分量,那么只需要知道 E_z 就可以了。应用傅里叶反变换式(4.1.3)。这里需注意,由于 $k_\rho^2 = \omega^2\mu\epsilon - \omega^2/v^2$, k_ρ 与 ω 成正比。将积分区间由$(-\infty,\infty)$换为$(0,\infty)$,得到

$$E_z = -\frac{q}{4\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega k_\rho\frac{\sqrt{k_\rho}}{\omega\epsilon}\cos\left(\omega t - k_\rho\rho - \frac{\omega z}{v} + \frac{\pi}{4}\right) \tag{4.1.17}$$

用同样方法有

$$H_\phi = \frac{q}{4\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\,\sqrt{k_\rho}\cos\left(\omega t - k_\rho\rho - \frac{\omega z}{v} + \frac{\pi}{4}\right) \tag{4.1.18}$$

现在可以计算 S_ρ,其是一个三重积分

$$S_\rho = \frac{q^2 l}{4\pi^2}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}t\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\int_0^\infty \mathrm{d}\omega' k_\rho \frac{\sqrt{k_\rho}}{\omega\epsilon}\sqrt{k_\rho'}\times$$

$$\cos\left(\omega t - k_\rho\rho - \frac{\omega z}{v} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\omega' t - k_\rho'\rho - \frac{\omega' z}{v} + \frac{\pi}{4}\right)$$

其中,$k_\rho' = \omega'(\mu\epsilon - 1/v^2)^{1/2}$,可先对 t 积分。令 $\alpha = k_\rho\rho/\omega + z/v$,注意到

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}t\,\cos\left[\omega'(t+\alpha) + \frac{\pi}{4}\right]\cos\left[\omega(t+\alpha) + \frac{\pi}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}t\,\cos[(\omega-\omega')(t+\alpha)] = \pi\delta(\omega-\omega') \tag{4.1.19}$$

其中应用了 delta 函数

$$\delta(\omega-\omega') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega')t}$$

因此得到

$$S_\rho = \frac{q^2 l}{4\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\,\frac{k_\rho^2}{\omega\epsilon} = \frac{\mu q^2 l}{4\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\,\omega\left(1 - \frac{1}{n^2\beta^2}\right) \tag{4.1.20}$$

尽管积分区间为$(0\to\infty)$,但是必须记住对于 Cerenkov 辐射,上述结果只在 $n^2 > 1/\beta^2$ 的条件下才成立。因为所有介质都是色散的,所以上述积分实际上是限制在满足 Cerenkov 辐射条件下且折射率 n 为一定频带宽度内的。应用上述公式,可以计算出不同折射率的介质中带电粒子通过一个单位长度后所辐射的功率。此外,应注意到上面的理论推导的前提是假设带电粒子是以恒定速度 v 运动的。随着电荷的辐射,粒子移动的速度将逐渐减小并在 $\beta^2 \leqslant 1/n^2$ 时停止辐射。

4.2 格林函数

4.2.1 并矢格林函数

在天线和辐射问题中,常常关心有源分布 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$和 $\rho(\boldsymbol{r})$存在时的电磁场的解。这些电流和电荷的分布由电流与电荷守恒定律相联系。对时谐场,$\mathrm{i}\omega\rho(\boldsymbol{r}) = \nabla\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$。由麦克斯韦方程组

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \tag{4.2.1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{i}\omega\epsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \tag{4.2.2}$$

可以将 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$消去,得到关于 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$的方程

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - k^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \tag{4.2.3}$$

其中,$k^2 = \omega^2\mu\epsilon$。为了求得由已知的 $\boldsymbol{J}$ 表示的 $\boldsymbol{E}$,可引入并矢格林函数。另一种更为传统的是利用矢量位的方法(在例 4.2.1 中叙述)。

格林函数是一个点源响应的描述,且适于用来表示源分布的场。由于 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$和 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$都是

矢量，可写出

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}\omega\mu \iiint \mathrm{d}V' \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \tag{4.2.4}$$

其中，$\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$为并矢格林函数，使我们可以由已知的源分布求得电场 $\boldsymbol{E}$。

由于电场 $\boldsymbol{E}$ 是一个矢量，$\boldsymbol{J}$ 也是一个矢量，格林函数 $\boldsymbol{GG}$ 必须为一个并矢或张量，它可以成为一个矢量到另一个矢量的算子。这个运算可以被想像成一个代表 $\boldsymbol{GG}$ 的方矩阵与一个代表 $\boldsymbol{J}$ 的列矩阵相乘，并得到另一个代表 $\boldsymbol{E}$ 的列矩阵。从另一个角度来讲，可以通过两个矢量定义一个并矢。设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是两个矢量，其点积 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 为一标量，而其叉积 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 为一个矢量。现引入第三个矢量 $\boldsymbol{C}$，并利用恒等式 $\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{C} - \boldsymbol{CB}\cdot\boldsymbol{A}$，可以发现直接相乘的 $\boldsymbol{AB}$ 就是并矢 $\boldsymbol{DD} = \boldsymbol{AB}$。在角标法中，$\boldsymbol{DD}$ 中的第 ij 项为 $D_{ij} = A_iB_j$。$\boldsymbol{DD}\cdot\boldsymbol{C}$ 的运算结果为矢量 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$，其中矢量 $\boldsymbol{A}$ 被标量 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$ 加权。在角标法中，$\boldsymbol{DD}\cdot\boldsymbol{C}$ 中的第 i 项为 $D_{ij}C_j = A_iB_jC_j$，其中被重复的角标 j 表示从 1 到 3 的累加。另一个例子为$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E} = \nabla\nabla\cdot\boldsymbol{E} - \nabla^2 E$。这时算子$\nabla\nabla$为一个并矢算子。

如果采用三维冲击函数 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$，式(4.2.3)的右边可以写为与式(4.2.4)相似的形式

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = \iiint \mathrm{d}V' \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \boldsymbol{II} \cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \tag{4.2.5}$$

式中 $\boldsymbol{II}$ 是一个单位并矢，其可用一个对角线单位矩阵表示。当把 $\boldsymbol{II}$ 作用于任何一个矢量时，其结果还为原矢量本身。将式(4.2.4)和(4.2.5)代入式(4.2.3)，且注意积分对 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$的分布无约束，就得到一个并矢格林函数 $\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$的微分方程

$$\nabla\times\nabla\times \boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - k^2\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{II}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{4.2.6}$$

将微分算符"$\nabla\times\nabla\times$"与体积分算符对换之后，将对位于源区中的观察点 $\boldsymbol{r}$ 产生重要影响，这将在第 6 章中讨论。在本章中，我们将始终假设观察点 $\boldsymbol{r}$ 位于源区之外。

并矢格林函数也可以用一个标量格林函数 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$表示

$$\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \left(\boldsymbol{II} + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right) g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{4.2.7}$$

在这里使用了并矢微分算符$\nabla\nabla$。如果将式(4.2.7)代入(4.2.6)，则可以发现算子$\nabla\times\nabla\times$作用于式(4.2.7)中的第二项时为零。这是因为梯度的旋度总是为零，$\nabla\times\nabla\times\nabla\nabla = \nabla\times(\nabla\times\nabla)\nabla = 0$。因此$\nabla\times\nabla\times(\boldsymbol{II}g) = \nabla\nabla g - \boldsymbol{II}\nabla^2 g$。可得到下面关于 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$的微分方程。

$$(\nabla^2 + k^2) g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{4.2.8}$$

可见格林函数是点源的响应。可利用式(4.2.8)来求在球坐标系中的标量格林函数 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$。

先平移坐标系使得源点正好位于坐标原点上，$\boldsymbol{r}' = 0$。有

$$\nabla\cdot\nabla g(\boldsymbol{r}) + k^2 g(\boldsymbol{r}) = -\delta(\boldsymbol{r}) \tag{4.2.9}$$

可见式(4.2.9)以及其解 $g(\boldsymbol{r})$是球对称的，与坐标 θ 和 ϕ 无关。

对球对称的 $g(r)$，其拉普拉斯算符为

$$\nabla\cdot\nabla g(r) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) g(r)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(r) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial g(r)}{\partial r}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{r}\frac{\partial g(r)}{\partial r}\right] = \frac{1}{r}\frac{\partial g(r)}{\partial r} + x\frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial g(r)}{\partial r}\right] \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial g(r)}{\partial r} + \frac{x^2}{r}\left[\frac{-1}{r^2}\frac{\partial g(r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 g(r)}{\partial r^2}\right]\end{aligned}$$

因此，有

$$\nabla\cdot\nabla g(r)=\frac{3}{r}\frac{\partial g(r)}{\partial r}+r\left[\frac{-1}{r^2}\frac{\partial g(r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 g(r)}{\partial r^2}\right]=\frac{2}{r}\frac{\partial g(r)}{\partial r}+\frac{\partial^2 g(r)}{\partial r^2}$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial g(r)}{\partial r}\right] \tag{4.2.10}$$

$$=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}[rg(r)] \tag{4.2.11}$$

球对称函数的拉普拉斯算符既可以表示为(4.2.10)式的形式，也可以表示为(4.2.11)式的形式。

球坐标系中的式(4.2.9)写为

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}[rg(\boldsymbol{r})]+k^2g(\boldsymbol{r})=-\delta(\boldsymbol{r})$$

对 $r\neq 0$，等式的右边等于零，因此

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}[rg(\boldsymbol{r})]+k^2rg(\boldsymbol{r})=0 \tag{4.2.12}$$

其解应该为一个向外传播的波。可得到

$$g(r)=C\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} \tag{4.2.13}$$

其中，常数 C 可以通过对式(4.2.9)在一个球心与坐标原点重合的半径 δ 为无限小的球面上积分得到。考虑矢量微积分形式的高斯定理，对式(4.2.9)中的第一项积分得到

$$\iiint \mathrm{d}V\nabla^2 g=\oiint_{r=\delta}\mathrm{d}S\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla g=\left[4\pi r^2\frac{\mathrm{d}g(\boldsymbol{r})}{\mathrm{d}r}\right]_{r=\delta} \tag{4.2.14}$$

由式(4.2.9)得到

$$\left[4\pi r^2\frac{\mathrm{d}g(\boldsymbol{r})}{\mathrm{d}r}\right]_{r=\delta}+k^2\int_0^{\delta}\mathrm{d}r4\pi r^2g(\boldsymbol{r})=-1 \tag{4.2.15}$$

将式(4.2.13)代入，可见当 $\delta\to 0$，第二项正比于 δ^2 因此消逝；第一项变为 $-4\pi C$。因此可得到 $C=1/4\pi$。

这里注意，r 是由观察点到源点之间的距离。如果将坐标系平移到原来的位置，距离 r 就变为 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$。可得到标量格林函数

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{4.2.16}$$

其中 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ 为观察点 $\boldsymbol{r}$ 到源点 $\boldsymbol{r}'$ 的距离(见图 4.2-1)。应假设观察点位于源区之外。将式(4.2.7)代入(4.2.4)，并注意积分是对应带撇的变量，而微分是对应不带撇的变量，这样就可以将微分运算提到积分号之外，并写为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\mathrm{i}\omega\mu\left(\boldsymbol{I\!I}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)\cdot\iiint\mathrm{d}V'g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \tag{4.2.17}$$

如用式(4.2.16)所示的球坐标系下的标量格林函数表示，可得到

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\mathrm{i}\omega\mu\left(\boldsymbol{I\!I}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)\cdot\iiint\mathrm{d}V'\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \tag{4.2.18}$$

所以对一个已知的、分布在无限边界各向同性介质中的源 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$，电场将由对式(4.2.18)的积分决定。而磁场将由法拉第定理(4.2.1)得到。

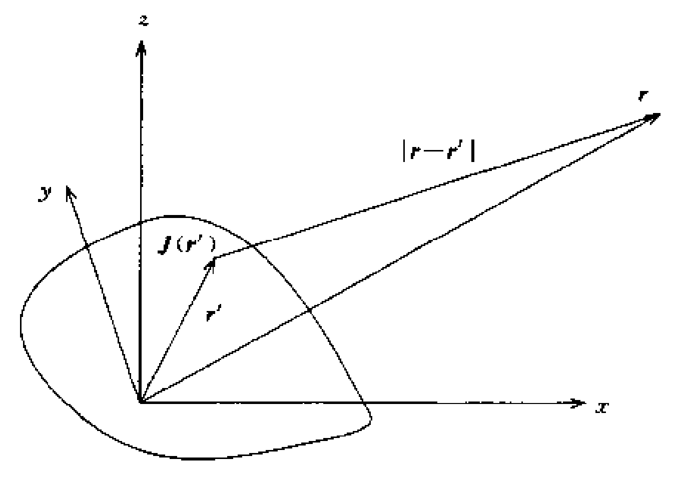


图 4.2-1 观察点 r 位于源区之外

4.2.2 辐射场的近似

如果观察点距离源区很远,可以对辐射场的远区场的积分进行近似。辐射场的近似包括以下两个条件:

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| \approx r-\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}' \tag{4.2.19}$$

$$kr \gg 1 \tag{4.2.20}$$

从图 4.2-2 中可以看出,连接观察点到坐标原点的直线和连接观察点到正在积分的源点的直线几乎平行。在辐射区中, $\boldsymbol{k}$ 矢量与 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 矢量同方向, $\boldsymbol{k}=\hat{\boldsymbol{r}}k$。得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \mathrm{i}\omega\mu\left(\boldsymbol{I}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)\cdot\iiint \mathrm{d}V'\,\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\\ &\approx \mathrm{i}\omega\mu\left(\boldsymbol{I}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\iiint \mathrm{d}V'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}\end{aligned} \tag{4.2.21}$$

在近似的过程中,在分母中忽略了 $\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}'$。但是在(4.2.21)式的指数中保留了 $k\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}'$,因为当它的值在与 π 同级或者大于 π 时,其对相位变化的贡献将是非常大的。

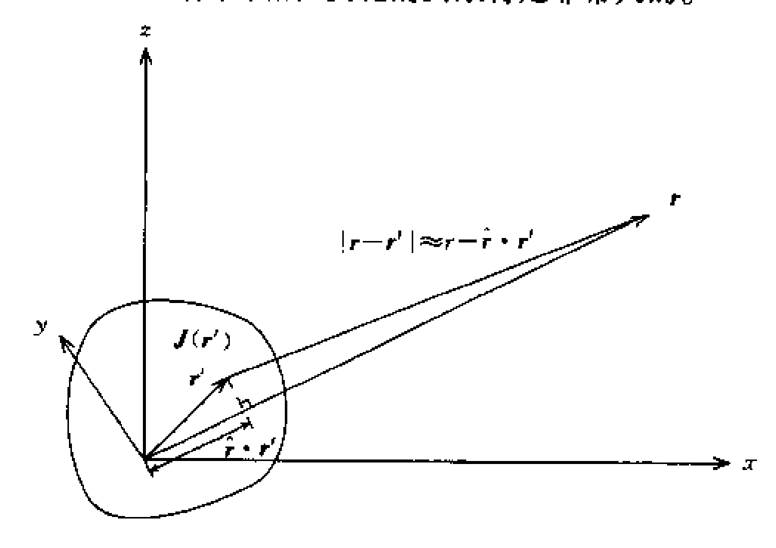


图 4.2-2 远场近似

定义一个矢量电流矩

$$\boldsymbol{f}(\theta,\phi) = \iiint \mathrm{d}V'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'} \tag{4.2.22}$$

式中被相位延迟因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}$ 加权的电流密度分布 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$ 是在整个体积上的积分。由于被积函

数是关于 r' 的函数，因此经过积分后，电流矩应该是独立于观察点到原点距离 r 的、只与 θ 和 ϕ 有关的函数。

式(4.2.21)中的∇算子在远区场可以由 i$\boldsymbol{k}$ 来近似。比如，考虑梯度

$$\nabla = \hat{\boldsymbol{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

其中，算子$\partial/\partial r$ 作用于 e^{ikr}上面时可得 ik，成为 $1/r$ 阶的项。而由∇算子产生的所有其他项都是$(1/r)^2$ 阶或更高阶。当远场条件 $kr \gg 1$ 满足时，可以只保留 $1/r$ 阶的项，并将∇算子用 i$\boldsymbol{k}$ 来代替。电场的辐射表达式就变为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}\omega\mu[\boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}}]\cdot \boldsymbol{f}\frac{e^{ikr}}{4\pi r} = \mathrm{i}\omega\mu\frac{e^{ikr}}{4\pi r}(\hat{\boldsymbol{\theta}}f_\theta + \hat{\boldsymbol{\phi}}f_\phi) \tag{4.2.23}$$

其中，$\boldsymbol{f}e^{ikr}/4\pi r$ 一项也称为辐射矢量。采用同样的远场条件，得到磁场强度 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$，

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{k}}{\omega\mu}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}k\frac{e^{ikr}}{4\pi r}(\hat{\boldsymbol{\phi}}f_\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}f_\phi) \tag{4.2.24}$$

相应的时间平均坡印廷功率密度为

$$\langle \boldsymbol{S}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\} = \hat{\boldsymbol{r}}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2(|f_\theta|^2 + |f_\phi|^2) \tag{4.2.25}$$

因此，计算由源 $\boldsymbol{J}$ 产生的辐射场，首先需要做的工作就是计算矢量电流矩 $\boldsymbol{f}(\theta,\phi)$。

例 4.2.1 矢量位 $\boldsymbol{A}$。

求解辐射问题的另一种方法是通过矢量位。这种方法本质上只对各向同性介质有用，对非各向同性介质将发生困难。

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$$

其中矢量 $\boldsymbol{A}$ 的定义为

$$\mu\boldsymbol{H} = \nabla\times\boldsymbol{A}$$

这个定义并不能惟一地确定 $\boldsymbol{A}$，因为如果对 $\boldsymbol{A}$ 进行一个泛涵的平移变换$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\psi$，其中 ψ 为任意标量函数，其结果将同样是场 $\boldsymbol{H}$。

$$\nabla\times\boldsymbol{A}' = \nabla\times\boldsymbol{A} + \nabla\times\nabla\psi = \nabla\times\boldsymbol{A} = \mu\boldsymbol{H}$$

其中使用了$\nabla\times\nabla\psi = 0$，因此 $\boldsymbol{A}$ 并不是惟一的。

通常熟知的规范条件，定义了 $\boldsymbol{A}$ 的散度，可成为附加的条件。由于

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = \mathrm{i}\omega\boldsymbol{B} = \nabla\times(\mathrm{i}\omega\boldsymbol{A})$$

有

$$\boldsymbol{E} = \mathrm{i}\omega\boldsymbol{A} - \nabla\phi$$

其中，ϕ 为一标量位。洛伦茨规范条件为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} - \mathrm{i}\omega\mu\epsilon\phi = 0$$

将此代入高斯定理，得到

$$(\nabla^2 + \omega^2\mu\epsilon)\phi = -\rho/\epsilon$$

又由安培定理，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J} - \mathrm{i}\omega\epsilon\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{J} + \omega^2\epsilon\boldsymbol{A} + \mathrm{i}\omega\epsilon\nabla\phi = \nabla\times\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})\\ &= \frac{1}{\mu}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \frac{1}{\mu}\nabla^2\boldsymbol{A} = \frac{1}{\mu}\nabla(\mathrm{i}\omega\mu\epsilon\phi) - \frac{1}{\mu}\nabla^2\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

因此

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} + \omega^2 \mu\epsilon \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{J}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} + k^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{J}$$

此式中矢量位 $\boldsymbol{A}$ 的解为

$$\boldsymbol{A} = \iiint \mathrm{d}V' \frac{\mu \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

有了这个解,就可以计算场

$$\boldsymbol{E} = \mathrm{i}\omega \boldsymbol{A} + \frac{\mathrm{i}}{\omega\mu\epsilon}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) = \mathrm{i}\omega\mu\left(\boldsymbol{II} + \frac{\nabla\nabla}{k^2}\right)\cdot\iiint \mathrm{d}^3 r' \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$$

这一结果与用并矢格林函数法得到的解式(4.2.18)是相同的。

例 4.2.2 辐射条件。

对有限分布的源在无边界的自由空间中的辐射问题,为获得惟一性解,必须将边界条件应用到无限远处的空间中。这样的边界条件称为辐射条件,并要求其解是向外无限远处传播的波,且其衰减的速度应比远离源区的距离的倒数衰减得快。用数学语言表示,$\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 的辐射条件如下所示。

$$\lim_{r\to\infty} r(\boldsymbol{H} - \hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{E}/\eta) = 0$$

$$\lim_{r\to\infty} r(\boldsymbol{E} + \hat{\boldsymbol{r}}\times\eta\boldsymbol{H}) = 0$$

(1)证明这些条件满足辐射场

$$\boldsymbol{E} = \mathrm{i}\omega\mu\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}(\hat{\boldsymbol{\theta}}f_\theta + \hat{\boldsymbol{\phi}}f_\phi)$$

$$\boldsymbol{H} = \mathrm{i}\omega\mu\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi\eta r}(\hat{\boldsymbol{\phi}}f_\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}f_\phi)$$

其中,f_θ 和 f_ϕ 为矢量电流矩的 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 分量和 $\boldsymbol{\phi}$ 分量。

(2)对 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$,应用麦克斯韦方程组证明

$$\lim_{r\to\infty} r(\nabla\times\boldsymbol{E} - \mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{E}) = 0$$

$$\lim_{r\to\infty} r(\nabla\times\boldsymbol{H} - \mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{H}) = 0$$

并证明并矢格林函数的辐射条件为

$$\lim_{r\to\infty} r[\nabla\times\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - \mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')] = 0$$

解

(1)当 $r\to\infty$ 时

$$\lim_{r\to\infty} r[\boldsymbol{H} - \hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{E}/\eta] = \lim_{r\to\infty}\mathrm{i}\omega\mu\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi\eta}[\hat{\boldsymbol{\phi}}f_\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}f_\phi - \hat{\boldsymbol{\phi}}f_\theta + \hat{\boldsymbol{\theta}}f_\phi] = 0$$

$$\lim_{r\to\infty} r[\boldsymbol{E} + \hat{\boldsymbol{r}}\times\eta\boldsymbol{H}] = \lim_{r\to\infty}\mathrm{i}\omega\mu\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi}[\hat{\boldsymbol{\theta}}f_\theta + \hat{\boldsymbol{\phi}}f_\phi - \hat{\boldsymbol{\theta}}f_\theta - \hat{\boldsymbol{\phi}}f_\phi] = 0$$

(2)

$$\lim_{r\to\infty} r[\nabla\times\boldsymbol{E} - \mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{E}] = \mathrm{i}\omega\mu\lim_{r\to\infty} r[\boldsymbol{H} - \hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{E}/\eta] = 0$$

$$\lim_{r\to\infty} r[\nabla\times\boldsymbol{H} - \mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{H}] = -\mathrm{i}\omega\epsilon\lim_{r\to\infty} r[\boldsymbol{E} + \hat{\boldsymbol{r}}\times\eta\boldsymbol{H}] = 0$$

$$\boldsymbol{E} = \mathrm{i}\omega\mu\iiint \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$$

$$\nabla\times \boldsymbol{E} = \mathrm{i}\omega\mu \iiint \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\, \nabla\times \boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$$

$$0=\lim_{r\to\infty} r[\nabla\times \boldsymbol{E} - \mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{r}}\times \boldsymbol{E}]$$

$$= \mathrm{i}\omega\mu \iiint \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\left\{\lim_{r\to\infty} r\left[\nabla\times \boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - \mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{r}}\times \boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right]\right\}\cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$$

对有限分布的任意 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$成立。所以

$$\lim_{r\to\infty}[\nabla\times \boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - \mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{r}}\times \boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')] = 0$$

习　题

4.2.1 求确定自由空间中一维标量格林函数的微分方程。证明一维格林函数为

$$g(x,x')=\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-x'|}}{2k}$$

4.2.2 应用辐射条件于标量波函数

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial U}{\partial r}-\mathrm{i}kU\right)=0$$

并研究其惟一性定理。其解可以假设由标量波的所有球谐振函数组成

$$(\nabla^2+k^2)U=0$$

是否利用无穷远处的辐射条件和源表面的边界条件就可以确定所有球谐振函数的幅度？用基模 f_0 以及迭代公式表示所有高阶模 f_n, $n>0$,并证明辐射条件惟一确定了 f_0。f_0 是一个向外传播的波,其他高阶模也是向外传播的波。

4.3 赫兹偶极子

4.3.1 赫兹电偶极子

所有辐射结构最为基本的形式就是赫兹电偶极子。它由一段载有电流的无限短的导线 l 构成。位于原点指向 $\hat{z}$ 方向的赫兹偶极子用电流矩 Il,或电流密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$来表示,如图 4.3-1 所示。

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')=\hat{z}Il\,\delta(\boldsymbol{r}') \tag{4.3.1}$$

赫兹偶极子也可以用电荷模型来表示,即由两个距离无限小 l 并存储有等量的但极性相反的电荷 q 的电荷存储库来表示。可以将其想像成为两个导体球或具有恒定电流供电的电容器。这个电荷偶极子具有表示为 $p=ql$ 偶极矩的且以角频率 ω 的交变振荡。而电流偶极子的偶极矩为 $Il=-\mathrm{i}\omega p$。

为了确定赫兹偶极子的辐射场,将式(4.3.1)代入式(4.2.22),求得矢量电流矩为

$$\boldsymbol{f}(\theta,\phi)=\hat{z}Il=(\hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta-\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta)Il \tag{4.3.2}$$

由于 $f_\theta=-Il\sin\theta$,从式(4.2.23)和(4.2.24)得到电场与磁场的矢量场

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\hat{\boldsymbol{\theta}}\mathrm{i}\omega\mu\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}f_\theta=-\hat{\boldsymbol{\theta}}\mathrm{i}\omega\mu Il\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\sin\theta \tag{4.3.3}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\hat{\boldsymbol{\phi}}\mathrm{i}k\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}f_\theta=-\hat{\boldsymbol{\phi}}\mathrm{i}kIl\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\sin\theta \tag{4.3.4}$$

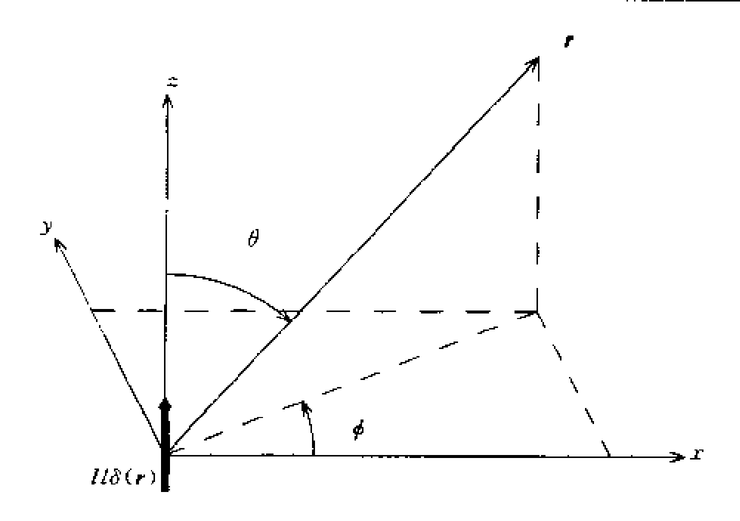


图 4.3-1 赫兹电偶极子

以及从式(4.2.25)可得到时间平均坡印廷功率密度

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \hat{\boldsymbol{r}} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(\frac{kIl}{4\pi r}\right)^2 \sin^2\theta \tag{4.3.5}$$

对 $\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\langle \boldsymbol{S}\rangle$在整个球面上从 r 到无穷大进行积分,可得到总的辐射功率 P_r。有

$$P_r = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\,\theta r^2\sin\theta\langle S_r\rangle = \frac{4\pi}{3}\eta\left(\frac{kIl}{4\pi}\right)^2 \tag{4.3.6}$$

其中,方向性增益的定义为观察方向 $G(\theta,\phi)$上的功率密度 $S_r(\theta,\phi)$与所有方向上的总辐射功率之比

$$G(\theta,\phi) = \frac{\langle S_r(\theta,\phi)\rangle}{P_r/4\pi r^2} \tag{4.3.7}$$

对赫兹偶极子

$$G(\theta,\phi) = \frac{3}{2}\sin^2\theta \tag{4.3.8}$$

一个天线的方向性系数 D 的定义是方向性增益达到最大的方向上的取值。对赫兹偶极子

$$D = G(\theta,\phi)_{\max} = \frac{3}{2} \tag{4.3.9}$$

其方向为 $\theta=\pi/2$,即与偶极轴垂直的方向。

一个辐射场的方向图可由其电场的幅度$|E_\theta|$在同一距离 r 和不同的方向角θ下给出,如图4.3-2所示。图中所示方向由两个圆圈组成且以 z 轴旋转对称,其描述了 $\sin\theta$ 的幅度随θ的变化。功率方向图和增益方向图将与 $\sin^2\theta$ 成正比。如图4.3-3所示,功率方向图的形状在任何包含极轴的平面内都像一个平放的阿拉伯数字8。

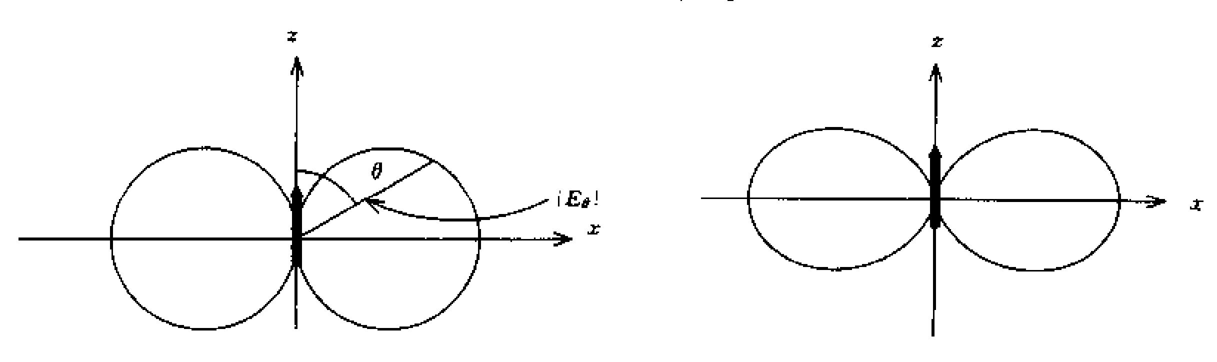


图 4.3-2 辐射场方向图

图 4.3-3 辐射功率方向图

可由式(4.2.18)来推导赫兹偶极子的电场矢量 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 的精确表达式。注意这里我们应用了 $g(r)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}/4\pi r$ 和 $\partial g(r)/\partial z=(\mathrm{i}k-1/r)\cos\theta g(r)$，求得赫兹偶极子的电场为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \mathrm{i}\omega\mu\left(\boldsymbol{I}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)\cdot\iiint \mathrm{d}V'\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\hat{\boldsymbol{z}}Il\delta(\boldsymbol{r}')\\
&= i\omega\mu Il\left(\hat{\boldsymbol{z}}+\frac{1}{k^2}\nabla\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\\
&= \frac{\mathrm{i}\omega\mu Il}{4\pi}\left\{\hat{\boldsymbol{z}}\,\frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}+\frac{1}{k^2}\left(\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left[\left(\frac{ikz}{r^2}+\frac{-z}{r^3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\right]\right\}\\
&= \frac{\mathrm{i}\omega\mu Il}{4\pi}\left[\hat{\boldsymbol{z}}\left(\frac{1}{r}+\frac{\mathrm{i}}{kr^2}-\frac{1}{k^2r^3}\right)+\hat{\boldsymbol{x}}\frac{xz}{k^2}\left(\frac{-k^2}{r^3}+\frac{-3\mathrm{i}k}{r^4}+\frac{3}{r^5}\right)+\right.\\
&\qquad\left.\hat{\boldsymbol{y}}\frac{yz}{k^2}\left(\frac{-k^2}{r^3}+\frac{-3\mathrm{i}k}{r^4}+\frac{3}{r^5}\right)+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{zz}{k^2}\left(\frac{-k^2}{r^3}+\frac{-3\mathrm{i}k}{r^4}+\frac{3}{r^5}\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\\
&= \frac{\mathrm{i}\omega\mu\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}Il\left[\hat{\boldsymbol{z}}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{kr}-\frac{1}{k^2r^2}\right)+\hat{\boldsymbol{r}}\,\frac{z}{r}\left(-1-\frac{3\mathrm{i}}{kr}+\frac{3}{k^2r^2}\right)\right]
\end{aligned}\tag{4.3.10}$$

考虑到 $\hat{\boldsymbol{z}}=\hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta-\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta$ 和 $z=r\cos\theta$，可将其转换到球坐标系，则式(4.3.10)变为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\frac{\mathrm{i}\omega\mu\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}Il\left\{\hat{\boldsymbol{r}}\left[\frac{\mathrm{i}}{kr}+\left(\frac{1}{kr}\right)^2\right]2\cos\theta+\hat{\boldsymbol{\theta}}\left[1+\frac{\mathrm{i}}{kr}+\left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^2\right]\sin\theta\right\}\tag{4.3.11}$$

由法拉第定理得到磁场

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\nabla\times\boldsymbol{E}=-\hat{\boldsymbol{\phi}}\mathrm{i}kIl\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)\sin\theta\tag{4.3.12}$$

下面由式(4.2.18)，再来推导球坐标系中赫兹偶极子电场矢量，并注意到 $g(r)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}/4\pi r$ 和 $\partial g(r)/\partial z=(\mathrm{i}k-1/r)\cos\theta g(r)$，得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \mathrm{i}\omega\mu\left(\boldsymbol{II}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)\cdot\iiint \mathrm{d}V'\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\hat{\boldsymbol{z}}Il\delta(\boldsymbol{r}')\\
&= \mathrm{i}\omega\mu Il\left(\hat{\boldsymbol{z}}+\frac{1}{k^2}\nabla\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\\
&= \mathrm{i}\omega\mu Il\left\{\left[(\hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta-\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta)+\frac{1}{k^2}\left(\hat{\boldsymbol{r}}\frac{\partial}{\partial r}+\hat{\boldsymbol{\theta}}\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\hat{\boldsymbol{\phi}}\,\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(\mathrm{i}k-\frac{1}{r}\right)\cos\theta\right]\right\}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\\
&= -\,\mathrm{i}\omega\mu Il\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\left\{\hat{\boldsymbol{r}}\left[\frac{\mathrm{i}}{kr}+\left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^2\right]2\cos\theta+\hat{\boldsymbol{\theta}}\left[1+\frac{\mathrm{i}}{kr}+\left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^2\right]\sin\theta\right\}
\end{aligned}$$

偶极子的辐射场曾经被赫兹详细地研究过。不同时刻电力线的图形如图 1.4-6 所示，所有的磁场都在环绕偶极子的 ϕ 方向上。

设 $Il=-\mathrm{i}\omega ql=-\mathrm{i}\omega p$，由式(4.3.11)和(4.3.12)可得

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\frac{k^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi\varepsilon r}p\left\{\hat{\boldsymbol{r}}\left[\frac{\mathrm{i}}{kr}+\left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^2\right]2\cos\theta+\hat{\boldsymbol{\theta}}\left[1+\frac{\mathrm{i}}{kr}+\left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^2\right]\sin\theta\right\}\tag{4.3.13}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=-\hat{\boldsymbol{\phi}}\,\frac{\omega k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}p\left(1+\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)\sin\theta\tag{4.3.14}$$

例 4.3.1 由式(4.3.13)和(4.3.14)求瞬时电场与磁场。我们在式(4.3.13)和(4.3.14)的两端同乘以 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 并取其实部，得到

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\omega\mu Il}{4\pi r}\left\{\hat{\boldsymbol{r}}2\cos\theta\left[\frac{1}{kr}\cos(kr-\omega t)-\frac{1}{k^2r^2}\sin(kr-\omega r)\right]+\right.$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta\left[\left(1-\frac{1}{k^2r^2}\right)\sin(kr-\omega t)+\frac{1}{kr}\cos(kr-\omega t)\right]\Bigg\} \tag{4.3.15}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{kIl}{4\pi r}\sin\theta\left[\sin(kr-\omega t)+\frac{1}{kr}\cos(kr-\omega t)\right] \tag{4.3.16}$$

不同时刻的电场图形如图 1.4-6 所示。

练习 4.3.1 设 $Il=-\mathrm{i}\omega ql$,证明瞬时电场与磁场变为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\frac{k^2ql}{4\pi\varepsilon_0 r}\Bigg\{\hat{\boldsymbol{r}}2\cos\theta\left[\frac{1}{kr}\sin(kr-\omega t)+\frac{1}{k^2r^2}\cos(kr-\omega t)\right]+$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta\left[\left(-1+\frac{1}{k^2r^2}\right)\cos(kr-\omega t)+\frac{1}{kr}\sin(kr-\omega t)\right]\Bigg\}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{\omega kql}{4\pi r}\sin\theta\left[-\cos(kr-\omega t)+\frac{1}{kr}\sin(kr-\omega t)\right]$$

这一结果曾在第 1 章中获得。

复坡印廷功率密度可由取 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的复共扼的叉积得到

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*$$

$$=\eta\left(\frac{kIl}{4\pi r}\right)^2\left\{\hat{\boldsymbol{r}}\left[1-\left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^3\right]\sin^2\theta-\hat{\boldsymbol{\theta}}\left[\left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)-\left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^3\right]\sin2\theta\right\} \tag{4.3.17}$$

时间平均坡印廷功率密度为

$$\langle\boldsymbol{S}\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\boldsymbol{S}\}=\hat{\boldsymbol{r}}\frac{\eta}{2}\left(\frac{kIl}{4\pi r}\right)^2\sin^2\theta$$

此式与式(4.3.5)中得到的结果相同。

当观察点位于偶极子很远处时,如 $kr\gg1$,可以忽略,比 $1/kr$ 衰减得快的所有高阶项。由式(4.3.11)和(4.3.12)可以得到辐射场区中的电场与磁场矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$,简化为式(4.3.3)和(4.3.4)。

4.3.2 赫兹磁偶极子和小环路天线

赫兹电偶极子的二元对称为磁偶极子。应用二元性原理,可用 $\boldsymbol{H}$ 代替 $\boldsymbol{E}$,用 $-\boldsymbol{E}$ 代替 $\boldsymbol{H}$,用 ϵ 代替 μ,用 μ 代替 ϵ,用 μM 代替 P,磁偶极子的电磁场就可以由式(4.3.13)和(4.3.14)表示的电偶极子公式得到

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{\omega\mu k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}M\left(1+\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)\sin\theta \tag{4.3.18}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=-\frac{k^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}M\left\{\hat{\boldsymbol{r}}\left[\frac{\mathrm{i}}{kr}+\left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^2\right]2\cos\theta+\hat{\boldsymbol{\theta}}\left[1+\frac{\mathrm{i}}{kr}+\left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^2\right]\sin\theta\right\} \tag{4.3.19}$$

赫兹磁偶极子可以用一个面积为 A 的载有电流的小环路线圈来实现,且 $ml=-\mathrm{i}\omega\mu IA=-\mathrm{i}\omega\mu M$。其中,$I$ 是环路中的电流,$M=IA$ 则为环路的磁矩。下面将讨论由这样的小环路天线产生的场。

例 4.3.2 小环电流的辐射场。

考虑一个如图 4.3-4 所示半径无限小的小环电流，其电流密度取如下形式

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')=\hat{\boldsymbol{\phi}}I\delta(\rho'-a)\delta(z') \tag{4.3.20}$$

由此电流回路产生的电场矢量可计算如下

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\mathrm{i}\omega\mu\left(\boldsymbol{I}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)\cdot\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi'\int_0^{\infty}\mathrm{d}\rho'\int_{-\infty}^{\infty}\rho'\mathrm{d}z'\,\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{4.3.21}$$

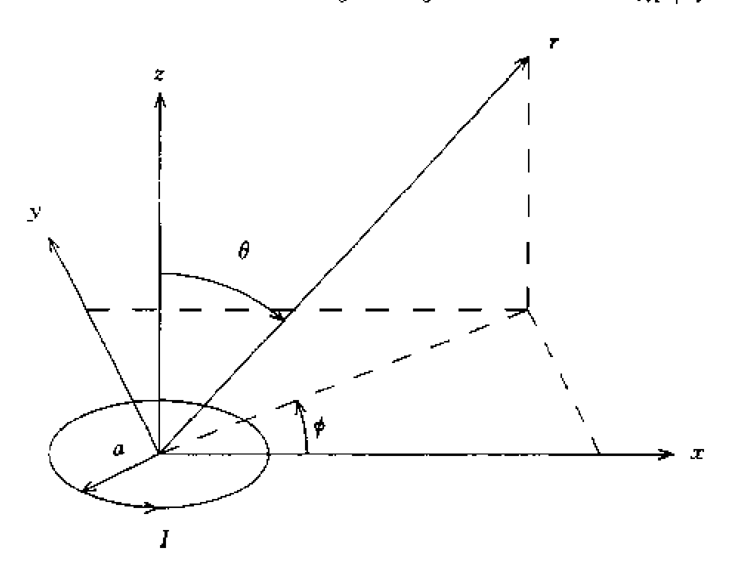


图 4.3-4 小环路天线

为了计算这一积分我们发现，其中 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 在直角坐标系中取值

$$\boldsymbol{r}=\hat{\boldsymbol{x}}r\sin\theta\cos\phi+\hat{\boldsymbol{y}}r\sin\theta\sin\phi+\hat{\boldsymbol{z}}r\cos\theta$$

$$\boldsymbol{r}'=\hat{\boldsymbol{x}}a\cos\phi'+\hat{\boldsymbol{y}}a\sin\phi'$$

由于坐标轴的选取，环路天线位于 x-y 平面内，因此对径向矢量 r' 有 $\theta'=\pi/2$。由源点 $\boldsymbol{r}'$ 到观察点 $\boldsymbol{r}$ 的距离 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ 为

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|&=|\hat{\boldsymbol{x}}(r\sin\theta\cos\phi-a\cos\phi')+\hat{\boldsymbol{y}}(r\sin\theta\sin\phi-a\sin\phi')+\hat{\boldsymbol{z}}r\cos\theta|\\&=r\sqrt{1+\frac{a^2}{r^2}-\frac{2a}{r}\sin\theta\cos(\phi-\phi')}\end{aligned} \tag{4.3.22}$$

然后将标量格林函数用 MacLaurin 级数对 $a/r\to0$ 展开并取其前两项，可得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}&\approx\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}+\frac{a}{r}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\left(\frac{a}{r}\right)}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right]_{a/r\to0}\\&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}+\frac{a}{r}(-\mathrm{i}kr+1)\sin\theta\cos(\phi-\phi')\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\end{aligned} \tag{4.3.23}$$

由于 $\hat{\boldsymbol{\phi}}=-\hat{\boldsymbol{x}}\sin\phi'+\hat{\boldsymbol{y}}\cos\phi'$，可将式(4.3.23)代入式(4.3.21)中，积分得到

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}a\mathrm{d}\phi'(-\hat{\boldsymbol{x}}\sin\phi'+\hat{\boldsymbol{y}}\cos\phi')\frac{I\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\\&\quad=(-\hat{\boldsymbol{x}}\sin\phi+\hat{\boldsymbol{y}}\cos\phi)\frac{\pi a^2I\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r^2}(1-\mathrm{i}kr)\sin\theta\end{aligned}$$

$$= \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{I\pi a^2 e^{ikr}}{4\pi r^2}(1 - ikr)\sin\theta \tag{4.3.24}$$

将上述结果代回到式(4.3.21)且由于式(4.3.24)与 ϕ 无关,因此 $\nabla\nabla$ 算子对结果无贡献。电场矢量就变为

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{\phi}}\, \omega\mu k I \pi a^2 \frac{e^{ikr}}{4\pi r}\left(1 + \frac{i}{kr}\right)\sin\theta \tag{4.3.25}$$

磁场矢量为

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{i\omega\mu}\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

$$= -k^2 I\pi a^2 \frac{e^{ikr}}{4\pi r}\left\{\hat{\boldsymbol{r}}\left[\frac{i}{kr} + \left(\frac{i}{kr}\right)^2\right]2\cos\theta + \hat{\boldsymbol{\theta}}\left[1 + \frac{i}{kr} + \left(\frac{i}{kr}\right)^2\right]\sin\theta\right\} \tag{4.3.26}$$

可见这里的电场与磁场矢量是赫兹偶极子的二元对称。在回路之外的磁场图与赫兹偶极子的电力线完全一样。关于坡印廷功率矢量,增益和辐射场的讨论与这两个基本辐射单元的讨论完全相同。

电与磁偶极子之间定量的联系由下式确定,如令赫兹偶极矩为 Il,则

$$(Il)_e = (ikIA)_m \tag{4.3.27}$$

其中,下标 e 和 m 分别表示电偶极子和小电流回路。式(4.3.25)和(4.3.26)中关于小电流环路的解可以通过令

$$\boldsymbol{E}_m = \eta\boldsymbol{H}_e \tag{4.3.28}$$

$$\boldsymbol{H}_m = -\frac{\boldsymbol{E}_e}{\eta} \tag{4.3.29}$$

和电偶极子的解获得。式(4.3.28)和(4.3.29)所表示的关系就是二元性定理。这里力图说明的是一个小电流环路的所有解,包括近场和远场,就是一个赫兹电偶极子的二元对称。一个小环路也就可以被认为是与电偶极子二元对称的磁偶极子。

为了对由电荷磁偶极子产生的电磁场的表达式进行一个归纳总结,可令电流矩和磁矩都指向一个一般性的方向,记作 $\boldsymbol{I}l = \hat{\boldsymbol{x}}I_x l + \hat{\boldsymbol{y}}I_y l + \hat{\boldsymbol{z}}I_z l$ 和 $\boldsymbol{M} = \hat{\boldsymbol{x}}M_x + \hat{\boldsymbol{y}}M_y + \hat{\boldsymbol{z}}M$。由式(4.3.10)和(4.3.12)可得到

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{i\omega\mu e^{ikr}}{4\pi r}\left[\boldsymbol{I}l\left(1 + \frac{i}{kr} - \frac{1}{k^2r^2}\right) - \hat{\boldsymbol{r}}(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{I}l)\left(1 + \frac{3i}{kr} - \frac{3}{k^2r^2}\right)\right] \tag{4.3.30}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{I}l\,\frac{ike^{ikr}}{4\pi r}\left(1 + \frac{i}{kr}\right) \tag{4.3.31}$$

应用二元性定理,得到

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{M}\frac{\omega\mu k e^{ikr}}{4\pi r}\left[1 + \frac{i}{kr}\right] \tag{4.3.32}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{k^2 e^{ikr}}{4\pi r}\left[\boldsymbol{M}\left(1 + \frac{i}{kr} - \frac{1}{k^2r^2}\right) - \hat{\boldsymbol{r}}(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{M})\left(1 + \frac{3i}{kr} - \frac{3}{k^2r^2}\right)\right] \tag{4.3.33}$$

当磁偶极子位于 z 方向时,式(4.3.32)和(4.3.33)退化为式(4.3.18)和(4.3.19)。

习题

4.3.1　一个十字天线由两个赫兹偶极子正交放置组成,并分别载有等幅的电流分布

$$\boldsymbol{J}_1 = \hat{\boldsymbol{x}}Il\delta(\boldsymbol{r}) \quad 和 \quad \boldsymbol{J}_2 = \hat{\boldsymbol{y}}iIl\delta(\boldsymbol{r})$$

(1)证明由此天线产生的电场为

$$E = -\eta\frac{\mathrm{i}kIl\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\left\{\hat{r}\left[\frac{\mathrm{i}}{kr}+\left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^2\right]2\sin\theta-\hat{\theta}\left[1+\frac{\mathrm{i}}{kr}+\left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^2\right]\cos\theta-\hat{\phi}\mathrm{i}\left[1+\frac{\mathrm{i}}{kr}+\left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^2\right]\right\}$$

(2)求在 x-y 平面中,$\theta=\pi/2$ 远场($k_\rho\gg1$)处的总电场。证明电场的实空间-时间函数取 $\cos(\omega t-\phi-k_\rho\rho)$ 的形式。这里

$$\hat{x}=\hat{r}\cos\phi\sin\theta-\hat{\phi}\sin\phi+\hat{\theta}\cos\phi\cos\theta$$
$$\hat{y}=\hat{r}\sin\phi\sin\theta+\hat{\phi}\cos\phi+\hat{\theta}\sin\phi\cos\theta$$

求在 x-y 平面中的辐射波的极化方向。

(3)画出在 x-y 平面中的辐射功率方向图。

(4)求在 z 方向上的总辐射电场,并说明在 $\hat{z}$ 方向上的辐射波的极化方向。

(5)计算 $+\hat{z}$ 方向上的远场辐射功率密度,并将其与 $+\hat{x}$ 方向上的辐射功率密度比较。

4.3.2 考虑一个具有磁矩 $\boldsymbol{M}$ 的原子,放置在恒定磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中。关于 $\boldsymbol{M}$ 运动的经典公式为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t}=\gamma\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{B}$$

其中,γ 为旋磁系数。

(1)设 $\boldsymbol{M}=M_0(-\hat{x}\cos\omega t+\hat{y}\sin\omega t)$。求由频率 ω 和旋磁系数 γ 表示的静磁场 $\boldsymbol{B}$。

(2)将原子旋转在坐标原点处($\boldsymbol{r}=0$),求在 z 轴上位于 $z=d$ 处的由 $\boldsymbol{M}$ 产生的磁场。

(3)有一个很小的半径为 R 的检测线圈位于 z 轴上 $z=d$ 处。令其放置的方向与 y-z 平面平行且其面积 $A=\pi R^2$ 中通过的磁场为均匀的。求线圈两端的感应电压。

4.3.3 在磁谐振成像(MRI)应用中,假设一个具有磁矩 $\boldsymbol{M}=M_0(\hat{x}\cos\omega t+\hat{y}\sin\omega t)$ 的原子,其角度 Larmor 频率 $\omega=\gamma\boldsymbol{B}_0$,静磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 的方向与 $\hat{z}$ 轴平行。

(1)证明由于原子的旋转在其附近感应的磁场为

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi r^3}[-\boldsymbol{M}+3\hat{r}(\hat{r}\cdot\boldsymbol{M})]$$

(2)有一个检测线圈旋转在 z 轴上 $z=d$ 处,且位于 y-z 平面中,其中心对准 x 轴方向,求作用于其上的时变磁场的 x 分量。检测线圈上的感应电压(磁动力)可由下式计算

$$V=-\frac{\partial}{\partial t}\int_A\mathrm{d}a\,B_x(\boldsymbol{r},t)$$

证明检测线圈上的感应电压取如下形式

$$V=U(\omega)\sin\omega t$$

求系数 $U(\omega)$。如果想在检测线圈上获得一个大的感应电压,为什么需要施加一个大的静磁场 B_0?

(3)考虑位于 z 轴上且分开一个小距离 δ 的具有相同磁旋率 γ 的两个磁偶极子。假设它们靠近原点,因此其上的相互感应电压可以用 $V_i=U(\omega_i)\sin\omega_i t(i=1,2)$ 来近似。用一个射频检测线圈就可以准确地测量 Larmor 频率 ω_i。令 $\omega_1-\omega_2=\Delta\omega$。求用 $\Delta\omega$ 和 γ 表示的作用于两个磁偶极矩上的静磁场 B_0 的差值。

(4)设静磁场 $\boldsymbol{B}_0=\hat{z}(b_0+b_1z)$,Larmor 频率的差为 ω_i,令 $\omega_1-\omega_2=\Delta\omega$。求用 $\Delta\omega$、γ 和 b_1 表示的两个磁偶极矩上的间距 δ。

(5)假设磁矩由在室温下水中旋转的质子产生,且质子的磁旋系数 $\gamma=2.7\times10^8\ \mathrm{T^{-1}\cdot s^{-1}}$。令两个质子位于 z 轴上。施加其上的磁场 $\boldsymbol{B}=\hat{z}(b_0+b_1z)$,其中 $b_0=1.0\ \mathrm{T}$, $b_1=1.0\ \mathrm{T/m}$。求用于测量间距 $\delta=0.5\ \mathrm{mm}$,位于 z 轴上面的两个质子的检测线圈的频率分辨率(用 kHz 表示)。

4.4 偶极子线阵

4.4.1 具有顺序相移的均匀阵列天线

考虑一个 N 单元的阵列,其偶极子指向 $\hat{z}$ 方向并沿 x 轴以均匀间距 d 排列(见图 4.4-1),

每一个单元的相位与其相邻的单元顺序差 α，其电流密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$ 取如下形式

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') = \hat{z}Il\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}\delta(x'-nd)\delta(y')\delta(z') \tag{4.4.1}$$

则矢量电流矩可由下式计算

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(\theta,\phi) &= \int\mathrm{d}x'\int\mathrm{d}y'\int\mathrm{d}z'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x'\sin\theta\cos\phi+y'\sin\theta\sin\phi+z'\cos\theta)}\\ &= \hat{z}Il\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(kd\sin\theta\cos\phi-\alpha)}\end{aligned} \tag{4.4.2}$$

在辐射场区中的电场 $\boldsymbol{E}$ 为

$$E_\theta = -\mathrm{i}\omega\mu\frac{Il\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\sin\theta\left[\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(kd\cos\psi-\alpha)}\right] \tag{4.4.3}$$

其中，

$$\cos\psi = \sin\theta\cos\phi \tag{4.4.4}$$

且 ψ 为矢径 $\boldsymbol{r}$ 与 x 轴之间的夹角(见图4.4-1)。

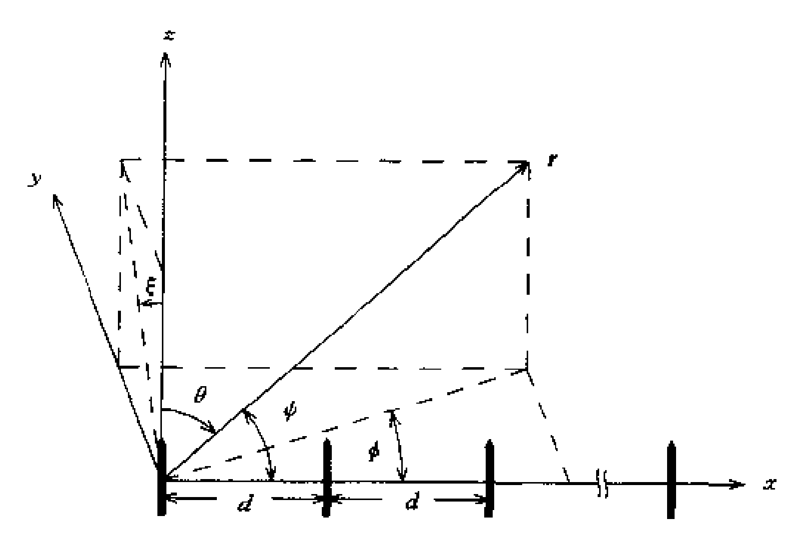


图4.4-1　线天线阵

可以看出，式(4.4.3)括号前的系数就是单独一个赫兹偶极子的辐射场。阵列本身的性能则由称为阵列因子 $F(u)$ 的求和项确定，

$$F(u) = \sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nu} \tag{4.4.5}$$

其中，

$$u = kd\cos\psi - \alpha \tag{4.4.6}$$

阵列因子中的求和可以很容易地得到并产生出阵因子 $F(u)$ 的幅度

$$|F(u)| = \left|\frac{\sin(Nu/2)}{\sin(u/2)}\right| \tag{4.4.7}$$

阵因子的幅度 $|F(u)|$ 为一关于 u 的周期性的方向图，当 $N=5$ 时的情况示于图4.4-2中。

当 ψ 等于0到 π 时，方向图中物理上可观测到的部分是由式(4.4.6)决定的，其对应由 $+\hat{x}$

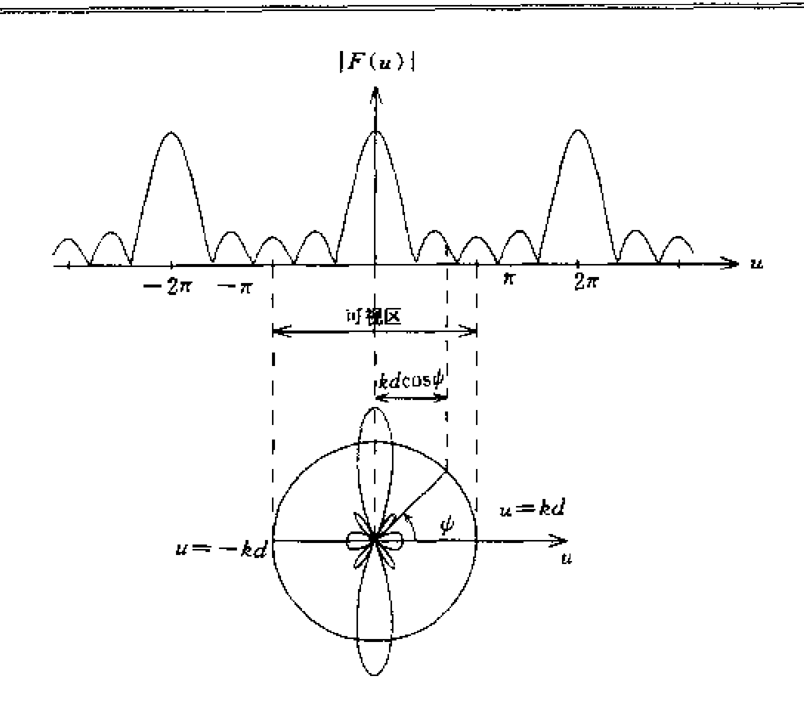


图 4.4-2 $N=5$, $kd=\pi$ 时的阵因子与辐射方向图

到 $-\hat{x}$ 方向之间所包含的空间，称为可视区，其中，u 的分布范围是 $-kd \sim kd$。可以示出以观测角 ψ 为变量的阵列因子的方向图。

例 4.4.1 在图 4.4-2 中给出了当 $N=5$ 时以 u 为变量的阵因子方向图函数。设 $a=0$，$d=\lambda/2$，则与其对应的可视区与方向图的关系由图 4.4-2 所示。对由 0 变到 π 的观察角 ψ，其投影 $u=kd\cos\psi$ 则由 kd 变到 $-kd$，并由此得到了阵列因子的方向图 $|F(u)|$。需要指出的是，这个方向图在 $x-y$ 平面中，即 $\theta=\pi/2$ 是物理上可以观测到的。在包含 x 轴的其他平面内，总的方向图是阵列方向图与阵列单元天线方向图乘积的结果。因为方向图中主瓣最大方向与阵列垂直，$\psi=\pi/2$，因此这样一种均匀的线阵称为边射阵。

由式(4.4.7)，主瓣最大方向 u_{max} 发生在分母趋向于 0 时，即 $u_{max}/2=m\pi$ 或

$$u_{max} = 2m\pi, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{4.4.8}$$

所有这些最大方向的幅值都等于

$$|F(u_{max})| = N \tag{4.4.9}$$

零点 u_n 的位置发生在分子趋向于零时，即 $Nu_n/2=n\pi$ 或

$$u_n = \frac{2n\pi}{N}, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{4.4.10}$$

其必须与 u_{max} 不同。对图 4.4-2 中所示的 5 单元线阵，$u_n = \pm 2\pi/5$ 和 $\pm 4\pi/5$。副瓣的幅值也可以通过式(4.4.7)来确定。首先通过对 $|F(u)|$ 求导并令其为零，来确定副瓣最大值 u_m 的位置，然后通过式(4.4.7)求得其幅值。对一个非常大的阵列，副瓣的最大值可以认为近似处于零点的中间，

$$u_m \approx \frac{(2m+1)\pi}{N}, \qquad m = 1,2,3,\cdots$$

其幅值为

$$|F(u_m)| = \left|\frac{\sin[(2m+1)\pi/2]}{\sin[(2m+1)\pi/2N]}\right| \approx \frac{2N}{(2m+1)\pi} \tag{4.4.11}$$

条件为 N 很大，并在可视区内。由于主瓣最大值为 N，其与副瓣的相对值为

$$\frac{|F(u_m)|}{|F(u_{max})|}=\frac{2}{(2m+1)\pi}$$

对一个大天线阵，第一副瓣($m=1$)电平对主瓣的相对值为 $2/3\pi$，或 $20\lg(2/3\pi)=-13.5$ dB。

对边射阵，$\alpha=0$ 且当 ψ 由 π 变到 0 时，可视区覆盖 $-kd\leqslant u\leqslant kd$。对一个非零的相位差 α，其可视区将在 u 轴上向左平移。

考虑 $\alpha=kd$ 时的情况，可有

$$u=kd(\cos\psi-1) \tag{4.4.12}$$

其可视区覆盖 $-2kd\leqslant u\leqslant 0$。可视区和方向示于图 4.4-3 中，其中，$N=5$，$d=\lambda/2$；在图 4.4-4 中，$N=5$，$d=4\lambda/5$。当 $kd\geqslant\pi$ 时，在可视区内是有可能出现两个或更多主瓣的。对 $\alpha=kd$，主瓣方向总是发生在 $\psi=0$ 处，此时天线阵称为端射阵。

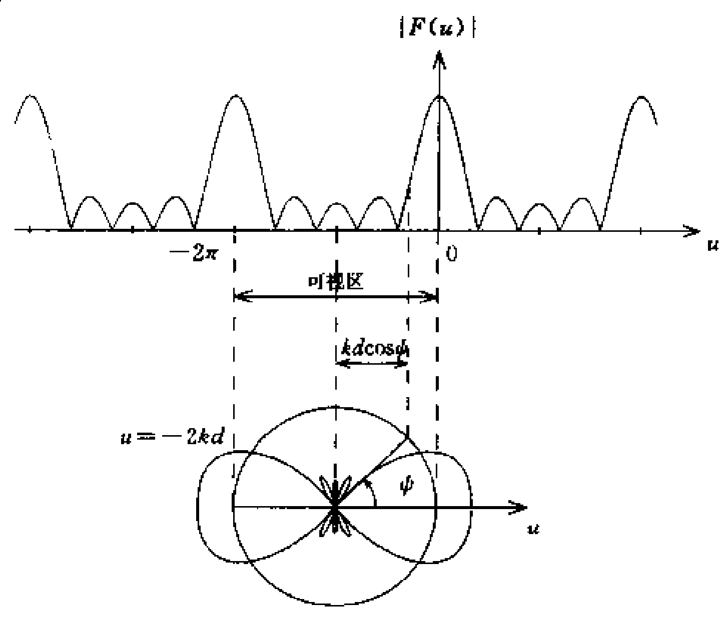


图 4.4-3 $N=5,\alpha=kd=\pi$ 阵列的可视区

对边射和端射阵列，估计其波束的宽度和方向性系数是很有用的。这里可以定义两种波束宽度。一种测量主瓣左右第一个零点之间的角度，另一种测量主瓣电平下降到半功率时所张的角度。为确定第一零点之间的波束宽度，可先求得第一个零点 $u<0$ 发生在

$$u_1=kd\cos\psi_1-\alpha=\frac{-2\pi}{N} \tag{4.4.13}$$

对边射阵，$\alpha=0$ 且主瓣最大方向发生在 $\psi=\pi/2$ 处。波束宽度为$(\mathrm{BW})_b=2(\psi_1-\pi/2)$。由式(4.4.13)，可以发现对大的 N，

$$-\frac{2\pi}{Nkd}=\cos\psi_1=-\sin\left(\psi_1-\frac{\pi}{2}\right)\approx-\left(\psi_1-\frac{\pi}{2}\right)$$

因此有

$$(\mathrm{BW_b})\approx\frac{4\pi}{Nkd} \tag{4.4.14}$$

对端射阵 $\alpha=kd$ 且主波束方向发生在 $\psi=0$ 处。其波束宽度为$(\mathrm{BW})_e=2\psi_1$。由式(4.4.13)，对大 N 可有

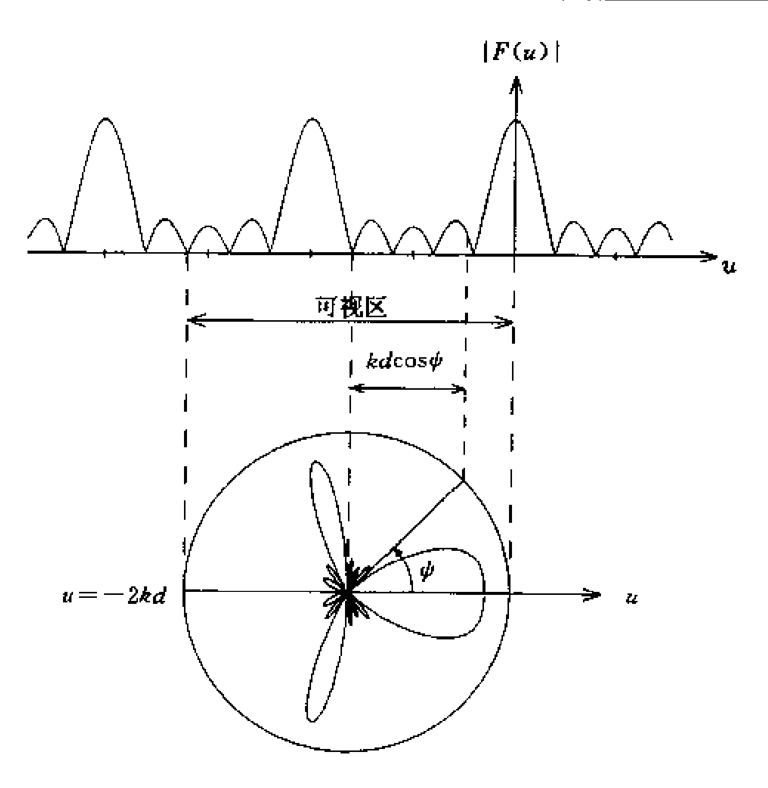


图 4.4-4 $N=5, \alpha=kd=8\pi/5$ 阵列的可视区

$$-\frac{2\pi}{Nkd} = \cos\psi_1 - 1 \approx -\frac{\psi_1^2}{2}$$

因此有

$$(\mathrm{BW})_e = 2\sqrt{\frac{4\pi}{Nkd}} \tag{4.4.15}$$

对边射阵,第一零点波束宽度与 N 的倒数成反比;而对端射阵,第一零点波束宽度与$\sqrt{N}$的倒数成反比。因此较大的端射阵的第一零点波束宽度则较大。

方向性系数 D 的定义是峰值功率与 4π 立体角内的总辐射功率的比值,即

$$D = G(\theta,\phi)_{\max} = \frac{4\pi\mid E(\theta,\phi)_{\max}\mid^2}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\sin\theta\mid E(\theta,\phi)\mid^2} \tag{4.4.16}$$

从式(4.4.3)得到

$$E_\theta = E_0\sin\theta\Big(\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nu}\Big) \tag{4.4.17}$$

其中,$u=kd\cos\psi-\alpha$,且 $E_0=-\mathrm{i}\omega\mu I\,l\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}/4\pi r$,方向性系数为

$$D = \frac{4\pi N^2}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\,\sin^3\theta\Big[N+2\sum_{m=1}^{N-1}(N-m)\cos mu\Big]} \tag{4.4.18}$$

为方便对 4π 立体角的积分,可采用如图 4.4-1 中所示的 ψ 和 ξ,并对 $\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\psi\sin\psi$ 积分。其中,ψ 由 0 积到 π,ξ 由 0 积到 2π。方向性系数的计算如下

$$
\begin{aligned}
D &= 4\pi N^2\left\{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\xi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\psi\sin\xi(1-\cos^2\xi\sin^2\psi)\left[N+2\sum_{m=1}^{N-1}(N-m)\cos mu\right]\right\}^{-1} \\
&= 4\pi N^2\left\{\int_0^{\pi}\mathrm{d}\psi\sin\psi(2\pi-\pi\sin^2\psi)\left[N+2\sum_{m=1}^{N-1}(N-m)\cos mu\right]\right\}^{-1} \\
&= 4N^2\left\{\int_{-kd-\alpha}^{kd-\alpha}\mathrm{d}\frac{u}{kd}\left[1+\frac{1}{(kd)^2}(u+\alpha)^2\right]\left[N+2\sum_{m=1}^{N-1}(N-m)\cos mu\right]\right\}^{-1} \\
&= 4N^2\left\{\frac{8}{3}N+\frac{2}{kd}\sum_{m=1}^{N-1}(N-m)\left[\frac{4}{m}\sin(mkd)\cos(m\alpha)+\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.\frac{4}{m^2kd}\cos(mkd)\cos(m\alpha)-\frac{4}{m^3(kd)^3}\sin(mkd)\cos(m\alpha)\right]\right\}^{-1} \\
&= N^2\left\{\frac{2}{3}N+2\sum_{m=1}^{N-1}(N-m)\left[\left(\frac{1}{mkd}-\frac{1}{(mkd)^3}\right)\sin(mkd)+\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.\frac{1}{(mkd)^2}\cos(mkd)\right]\cos(m\alpha)\right\}^{-1}
\end{aligned}
\tag{4.4.19}
$$

当 $kd\to 0$，有

$$
D = N^2\left[\frac{2N}{3}+\frac{2}{3}(N-m)\cos m\alpha\right]^{-1}
$$

令 $\alpha=0$，可得到

$$
D = N^2\left[\frac{2N}{3}+\frac{2}{3}N(N-1)\right]^{-1} = \frac{3}{2} \tag{4.4.20}
$$

这就是一个单一赫兹偶极子的方向性系数。

4.4.2 非均匀电流激励的阵列天线

对均匀线阵无论是边射还是端射，其第一副瓣电平与主瓣相比都是 - 13.5 dB 甚至更高，如对改进的端射天线阵，采用非均匀的电流激励，可以降低副瓣电平。一个简单的例子就是人字形的阵列，其阵因子等于均匀线阵阵因子的平方，

$$
\begin{aligned}
\widetilde{F}(u) &= \left(\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nu}\right)^2 = 1+2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}+\cdots+N\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(N-1)u}+\cdots+ \\
&\qquad 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2N-3)u}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2(N-1)u}
\end{aligned}
\tag{4.4.21}
$$

人字形幅度分布的阵列由 $2N-1$ 个单元组成，如果令其两端单元的激励电流幅度为单位值，则其中心单元的激励电流幅度值为 N。这一阵列以 u 为变量的方向图就为均匀线阵方向图的平方。第一副瓣电平这时与主瓣相比为 - 27 dB。

另一个类似的结构称为二项式阵列，其没有副瓣。考虑一个二单元阵列，其阵因子为

$$
|\widetilde{F}(u)| = \left|\sum_{n=0}^{1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nu}\right| = \left|\frac{\sin u}{\sin\frac{u}{2}}\right| \tag{4.4.22}
$$

如果选择 d,使得 $kd\leqslant\pi$,由图 4.4-5(其中 $kd=\pi$)所示的阵因子可以看到,无论是边射阵还是端射阵,其方向图都没有副瓣。取 $\tilde{F}(u)$的 N 阶级数展开,仍然没有任何副瓣。

$$
\begin{aligned}
|\tilde{F}(u)|^N &= \left|1 + C_N^1 e^{-iu} + C_N^2 e^{-i2u} + \cdots + C_N^N e^{-iNu}\right| \\
&= \left|\sum_{n=0}^{N} C_N^n e^{-inu}\right|
\end{aligned}
\tag{4.4.23}
$$

这样,其单元激励电流的幅度分布就等于二项系数 C_N^n。

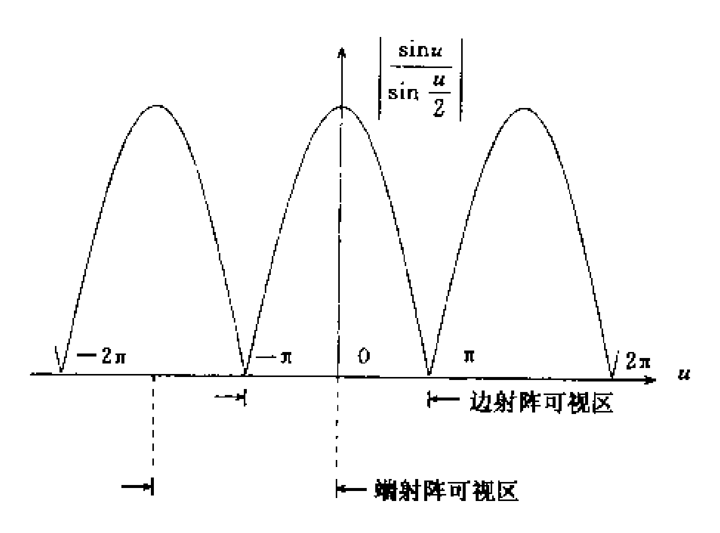


图 4.4-5 $N=2$ 的阵因子方向图

一般来说,具有非均匀激励的阵列,如果其激励幅度分布可以通过泛涵形式表示,它就可以通过 z 变换法来进行分析。例如,考虑一正弦形式的激励电流分布

$$
\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') = \hat{z} I_0\, l \sum_{n=0}^{N-1} \sin(kax')\delta(x'-nd)\delta(y')\delta(z') \tag{4.4.24}
$$

对于对称的激励分布,还有

$$
(N-1)kad = \pi \tag{4.4.25}
$$

这个阵列的阵因子就等于

$$
\tilde{F}(u) = \sum_{n=0}^{N-1} \sin(nkad) e^{-inu} \tag{4.4.26}
$$

这里注意,阵列只有 $N-2$ 个单元,因为两端单元的激励幅度为零。这个阵列因子可以用一个标准的 z 变换来表示,令

$$
z = e^{iu} \tag{4.4.27}
$$

$\tilde{F}(u)$这样就变为一个平移了的对函数 $\sin(nkad)$的有限 z 变换。我们对式(4.4.26)中的求和作如下形式的运算

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1} \sin(nkad) z^{-n} &= -\operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} e^{-inkad}\right) \\
&= -\operatorname{Im}\left(\frac{1 - z^{-N} e^{-iNkad}}{1 - z^{-1} e^{-ikad}}\right)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{(z^{-1} + z^{-N})\sin\left(\frac{\pi}{N-1}\right)}{1 - 2z^{-1}\cos\left(\frac{\pi}{N-1}\right) + z^{-2}} \tag{4.4.28}$$

其中，利用了式(4.4.12)中的对称条件。实际上，一旦求和表示成了 z 变换的形式，许多常见函数的标准变换公式都可以通过查表的方式得到。

由式(4.4.13)～(4.4.15)得到阵列因子的幅度，

$$|\tilde{F}(u)| = \left| \frac{\cos\left[\frac{(N-1)u}{2}\right]\sin\left(\frac{\pi}{N-1}\right)}{\cos u - \cos\left(\frac{\pi}{N-1}\right)} \right| \tag{4.4.29}$$

主瓣的最大方向发生在 $u=0$，在此方向

$$|\tilde{F}(u_{\max})| = \cot\frac{\pi}{1(N-1)} \tag{4.4.30}$$

零点发生在 $u_n = \pm(2n+1)/(N-1)$，$n=1,2,3,\cdots$。$n=0$ 或 $u_0=\pi/(N-1)$的值并不会产生零点，因为当(4.4.29)中的分子和分母同时趋于零时，$|\tilde{F}(u_0)| = (N-1)/2$。

对 $N=6$，$d=\lambda/2$ 的阵列，其辐射方向图示于图 4.4-6 中。第一副瓣的最大值发生在 $u=\pm 2.44$，相应的有 $|\tilde{F}(2.44)|/|\tilde{F}(u_{\max})| = 0.12$ 或 -18 dB。当 $d=\lambda/2$ 时，对边射和端射阵列，方向性系数通过计算得到 $D=3.79$。

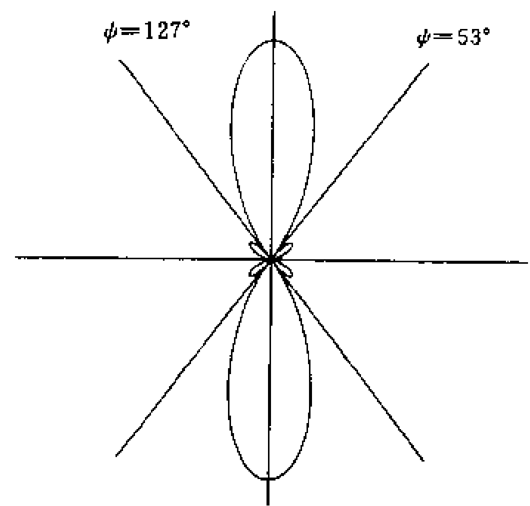


图 4.4-6 $N=6, d=\lambda/2$ 时的辐射方向图

4.4.3 Dolph-Chebyshev 阵列

Dolph-Chebyshev 阵列具有相等的副瓣。这个阵列的单元是等间距的，电流激励是对称分布的并具有均匀的顺序相位移，其单元激励幅度是由 Chebyshev 多项式的系数决定的。由于 Chebyshev 多项式系数的性质，因此这一阵列可以在预置的副瓣电平下给出最窄的主波束宽度。同样，它可以在预先设定的主波束宽度下给出最小的副瓣电平。

Chebyshev(也可写为 Tchebyscheff)多项式由下式定义

$$T_n(x) = \cos[n\arccos x] \tag{4.4.31}$$

前几个多项式的系数为

$$T_0(x) = 1 \tag{4.4.32a}$$

$$T_1(x) = x \tag{4.4.32b}$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1 \tag{4.4.32c}$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x \tag{4.4.32d}$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \tag{4.4.32e}$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x \tag{4.4.32f}$$

更高阶的多项式可以由下列递推关系得到

$$T_{n+1} = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \tag{4.4.33}$$

x 的 n 阶多项式可以用 $T_n(x)$ 表示。当 n 为偶数时，$T_n(x)$ 中只存在 x 的偶数指数项；当 n 为奇数时，$T_n(x)$ 中只存在 x 的奇数指数项。对 $x>1$，$T_n(x)=\cosh(n\operatorname{arccosh}x)$；对 $x<-1$，$T_n(x)=(-1)^n\cosh(n\operatorname{arccosh}|x|)$。在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 中，$T_n(x)$ 在 ± 1 之间振荡。在 $x=1$ 处多项式 $T_n(x)$ 通过 1，在 $x=-1$ 处多项式 $T_n(x)$ 通过 $(-1)^n$。对 $n>0$，$T_n(x)$ 的零点发生在

$$x_p = \cos\frac{(2p-1)\pi}{2n} \qquad p = 1,2,\cdots,n \tag{4.4.34}$$

对 $n>1$，在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 中 $T_n(x)$ 的极点发生在

$$x_m = \cos\frac{m\pi}{n} \qquad m = 1,2,\cdots,n-1 \tag{4.4.35}$$

0 阶到 4 阶的 Chebyshev 多项式示于图 4.4-5。

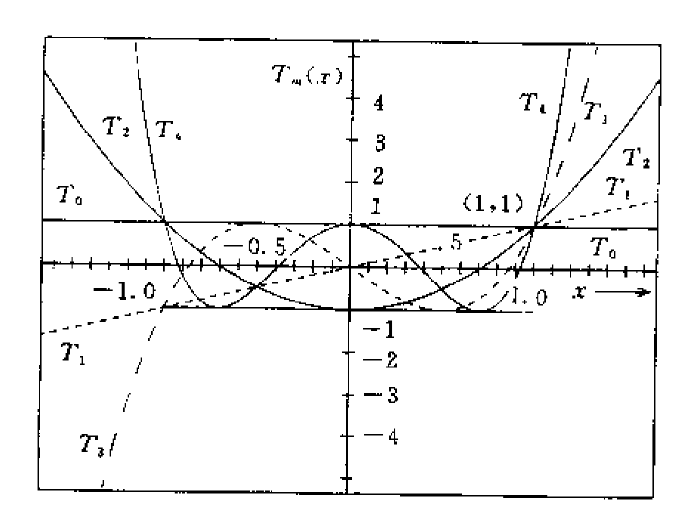


图 4.4-7 Chebyshev 多项式 T_0, T_1, T_2, T_3 和 T_4

一个 N 单元的 Chebyshev 阵列的激励幅度的确定，是将其阵因子 $\bar{F}(u)$ 与 Chebyshev 多项式 $T_{N-1}(x)$ 等同，通过 Dolph 变换

$$x = b\cos\frac{u}{2} \tag{4.4.36}$$

其中，$u = kd\cos\psi - \alpha$，b 为一个大于 1 的参数，即 $b>1$。

为确定一个对称激励的 N 单元阵列的激励幅度，可将坐标的原点放在阵列的中心，并将阵因子写为

$$\bar{F}(u) = \begin{cases} 2\sum\limits_{m=1}^{N/2} a_m \cos\dfrac{(2m-1)u}{2} & N = \text{偶数} \quad (4.4.37\text{a}) \\ a_0 + 2\sum\limits_{m=1}^{(N-1)/2} a_m \cos mu & N = \text{奇数} \quad (4.4.37\text{b}) \end{cases}$$

其中，$u = kd\cos\psi - \alpha$，α 是相邻单元的相位差，a_m 为激励幅度。用 Dolph 变换，$u = 2\arccos(x/b)$。令阵因子与 $T_{N-1}(x)$ 相等，可得到

$$T_{N-1}(x)=\begin{cases}2\sum_{m=1}^{N/2}a_mT_{2m-1}(x/b) & N=偶数 \quad (4.4.38a)\\ a_0+2\sum_{m=1}^{(N-1)/2}a_mT_{2m}(x/b) & N=奇数 \quad (4.4.38b)\end{cases}$$

激励幅度 a_m 的确定就可通过比较式(4.4.39)两端同幂项的系数得到。

例 4.4.2 边射 Chebyshev 阵列。

这里说明一个 5 单元边射 Chebyshev 阵列的辐射方向图的建立过程,其 $d=\lambda/2,\alpha=0$,如图 4.4-8 所示,可视区由 $u=-kd=-\pi$ 到 $u=kd=\pi$。

可将 Chebyshev 阵列的阵因子写为

$$\tilde{F}(u)=T_{N-1}\left(b\cos\frac{u}{2}\right)=T_4(x) \tag{4.4.39}$$

对 5 单元 Chebyshev 阵列,

$$\tilde{F}(u)=a_0+2\sum_{m=1}^{(N-1)/2}a_m\cos mu \qquad N\text{ 为奇数} \tag{4.4.40}$$

因此有

$$a_0+2a_1T_2(x/b)+2a_2T_4(x/b)=T_4(x)$$

$$\tilde{F}(u)=T_4\left(b\cos\frac{u}{2}\right)$$

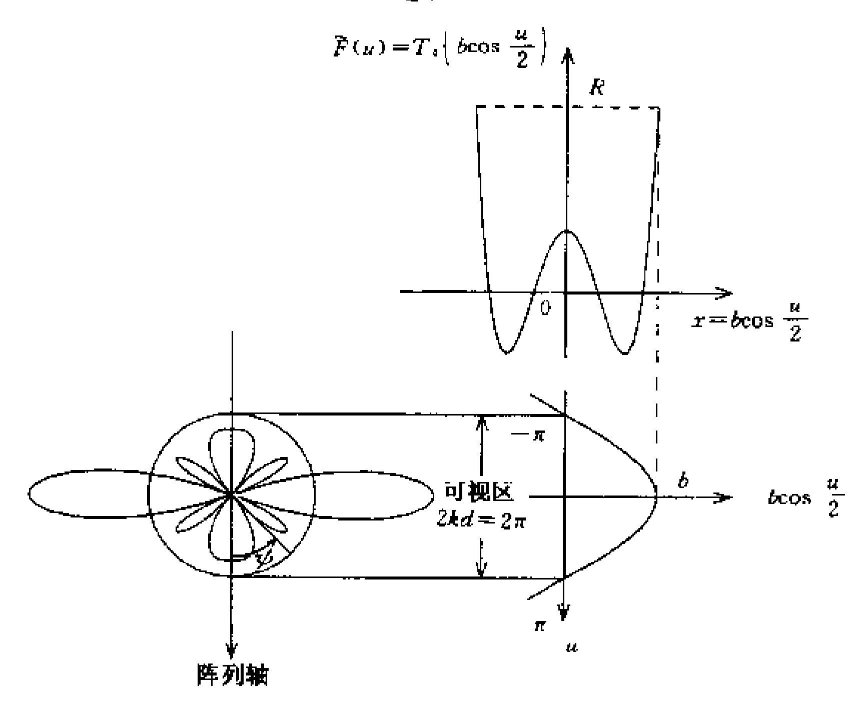


图 4.4-8 边射 Chebyshev 阵列, $N=5$, $kd=\pi$

激励幅度 a_0,a_1 和 a_2 的确定利用了式(4.4.32c)和(4.4.32e)。

$$a_0+2a_1[2(x/b)^2-1]+2a_2[8(x/b)^4-8(x/b)^2+1]=8x^4-8x^2+1$$

将同幂项的系数比较,得到 $a_2=b^4/2$, $a_1=2b^4-2b^2$ 以及 $a_0=3b^4-4b^2+1$。

令此边射阵的第一零点波束宽度为 $2[(\pi/2)-\psi_1]$。在第一零点处 $x=b\cos[(kd\cos\psi)/2]$,设 $p=1,n=N-1$,由式(4.4.34)得到

$$b\cos\frac{kd\cos\psi_1}{2}=\cos\frac{\pi}{2(N-1)} \tag{4.4.41}$$

主波束发生在 $u=0$ 处,此处 $\tilde{F}(u)=T_{N-1}(b)=R$。注意由于 $b>1$,可有

$$R=T_{N-1}(b)=\cos[(N-1)\arccos b]=\cosh[(N-1)\operatorname{arccosh} b] \tag{4.4.42}$$

这样,由于 b 已经确定,波束宽度和副瓣电平就可以由式(4.4.41)和式(4.4.42)确定。或者如果先定义副瓣电平为 $1/R$,由式(4.4.42)就可得到 b,

$$b=\cosh\left(\frac{1}{N-1}\operatorname{arccosh} R\right)$$

并由此通过式(4.4.42)得到波束宽度。

例 4.4.3 端射 Chebyshev 阵列。

一个 5 单元端射 Chebyshev 阵列,如图 4.4-9 所示,其 $d=\lambda/4$。主波束最大值 $\tilde{F}(u_{\max})=R$ 并发生在 $\psi=0$ 处,此时

$$u_{\max}=kd-\alpha$$

这里将顺序相移 α 留做需要确定的量,以保证方向图为端射。对 $\psi=\pi$,可有 $u=-kd-\alpha$。为了在阵列方向图中包含所有副瓣,且不包括 $\psi=\pi$ 时的主瓣,则令在 $\psi=\pi$ 时,对应 $T_4(x)$ 中的 $x=-1$。由 Dolph 变换式(4.4.36),有

$$-1=b\cos\frac{kd+\alpha}{2} \tag{4.4.43}$$

可视区位于 $u=kd-\alpha$ 和 $u=-kd-\alpha$ 之间。当 $d=\lambda/4$ 时,辐射方向图的建立如图 4.4-9 所示。注意将 $x=-1$ 与 $\psi=\pi$ 对应,且对 d 的选择确定了可视区的宽度为 $2kd$。变量 b 可由主波束最大值 R 或由主波束宽度确定。如果可视区的宽度 $2kd$ 太大,比如令 $d=\lambda/2$,则在 $\psi=0$ 以外就会出现其他的主波束。

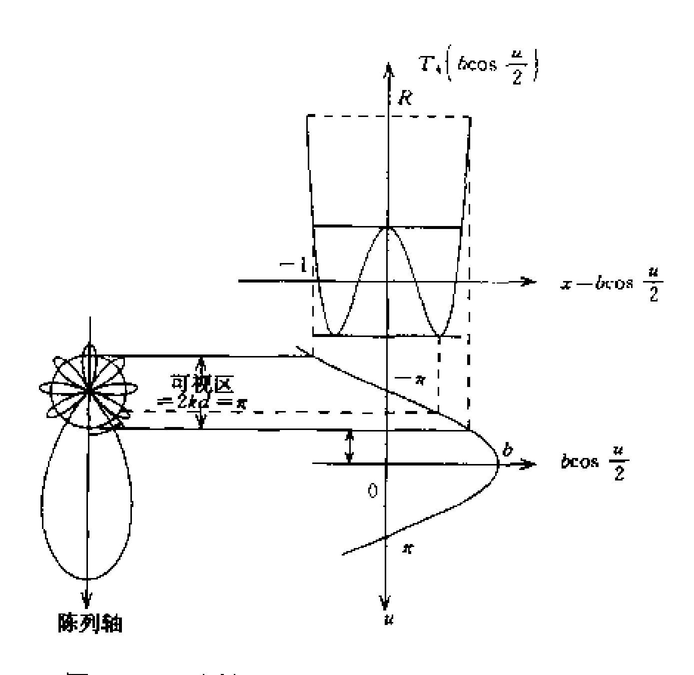


图 4.4-9 端射 Chebyshev 天线阵,$N=5$,$kd=\pi/2$

对阵列进行综合,假设已知副瓣电平为 $1/R$,可得到

$$R = T_{N-1}\left(b\cos\frac{kd-\alpha}{2}\right) \tag{4.4.44}$$

利用式(4.4.44),可得到公式

$$b\cos\frac{kd-\alpha}{2} = \cosh\left(\frac{1}{N-1}\operatorname{arccosh}R\right) \tag{4.4.45}$$

这样 α,b 就可由式(4.4.43)～(4.4.45)确定。

如果首先确定的是主波束宽度 $2\psi_1$,则有

$$b\cos\frac{kd\cos\psi_1-\alpha}{2} = \cos\frac{\pi}{2(N-1)} \tag{4.4.46}$$

由式(4.4.43)和(4.4.46),α 和 b 就可确定。副瓣电平可由式(4.4.44)计算出来。

为了说明 Chebyshev 多项式的最优化特性,令 $T_n(x)$的最大值出现在 x_0 处,第一零点出现在 x_1 处。对 $-1\leqslant x\leqslant 1$, $T_n(x)$只在 -1 与 1 之间变化。令可视区覆盖从 $x=-1$ 到 $x=x_0$ 之间的 Chebyshev 多项式。要证明,对一个给定的主波束宽度且其第一零点出现在 x_1 处,$1/R$ 的副瓣电平是最低值,相应地有对一个给定的副瓣电平值,由 $T_n(x)$得到的主波束宽度是最窄的。为证明这个结论,可令一个多项式 $P_n(x)$具有同样的阶数和在 $x=x_0$ 处有同样的幅度 $R>1$,对给定波束宽度的情况,$P_n(x)$和 $T_n(x)$在 $x=x_1$ 和 $x=x_0$ 处相交。如果 $P_n(x)$在 -1 与 1 之间小于等于 1,那么 $P_n(x)$和 $T_n(x)$至少再相交 $n-1$ 次。然而,对一个 n 阶的多项式,给定其中 $n+1$ 个系数值就可以将这个多项式惟一确定,这两个多项式 $P_n(x)$和 $T_n(x)$必然相等。从另一个角度来讲,如果首先确定了副瓣电平为 $1/R$,$P_n(x)$在 -1 与 1 之间并产生一个比 x_1 大的零点 x_1',即 $x_1\leqslant x_1'\leqslant x_0$,则它必将与 $T_n(x)$相交 n 次,就再次使得 $P_n(x)=T_n(x)$。这样就证明了 $T_n(x)$可以提供最优的阵列方向图。

再建立边射阵列的方向图时,如果 $d\geqslant\lambda/2$,可视区将会大于如图 4.4-8 所示的区域,其他的主瓣将会出现。然而对 $d<\lambda/2$,可视区将会小于如图 4.4-8 所示的区域,Chebyshev 多项式提供的区域并没有被充分利用。这样 Chebyshev 多项式提供的阵列将不再是最优化的。这一点可以通过下面的例子说明。对一个边射的奇数单元的阵列,考虑另外一个对称多项式 $P_{N-1}(x)$而不是 $T_{N-1}(x)$,并令其具有如下性质:在主波束处 $P_{N-1}(b)=R$,在 $\cos[\pi/2(N-1)]$处等于 0,但是在区间 $b\cos(kd/2)<x<\cos[\pi/2(N-1)]$中有 $|P_{N-1}(x)|<1$。这种可能性是存在的,因为 $|P_{N-1}(x)|$在区间 $0<x<b\cos(kd/2)$中可能会大于 1,其并不在可视区内。这一结果产生的方向图将与 Chebyshev 阵列产生的方向图具有同样的主波束宽度,但是其具有更低的副瓣电平。因此,边射 Chebyshev 阵列的最优特性受限于 $d\geqslant\lambda/2$。

这个限制被 Riblet 排除,它对 Dolph 变换式(4.4.36)进行了修改,对奇数单元的边射阵,令 $x=b\cos u+c$。这里注意即使当 $c=0$ 时,Riblet 变换也不能还原为 Dolph 变换 $x=b\cos(u/2)$。为了惟一确定一个$(2N+1)$单元的阵列的激励参数,阵列因子需设定为 N 阶多项式 $T_N(x)$,其与采用 Dolph 变换时需将阵列因子设定为 $2N$ 阶多项式 $T_{2N}(x)$不同。激励参数通过比较下式中的系数得到

$$T_N(x) = a_0 + 2\sum_{m=1}^{N} a_m T_m\left(\frac{x-c}{b}\right)$$

Chebyshev 多项式的全部区域可以被重新利用。当 $d<\lambda/2$ 时,可令 $x=-1$ 对应 $u=\pm kd$,或 $b\cos(kd)+c=-1$。主波束的最大方向位于 $x=b+c$ 处。

4.4.4 阵列方向图的综合

在阵列综合问题中，将根据给定的主波束宽度、副瓣电平、零点位置和方向性系数等，求出可以物理实现的阵列单元激励参数。考虑一个具有对称非负激励且具有尽可能多的零点的阵列。其阵因子可取如下形式

$$\tilde{F}(u) = 1 + I_1 e^{-iu} + I_2 e^{-i2u} + \cdots + I_{N-2} e^{-i(N-2)u} + e^{-i(N-1)u} \tag{4.4.47}$$

其中，假设 $I_0 = I_{N-1} = 1$ 为阵列两端的两个激励单元，并有 $I_m = I_{N-1-m}$，$m = 1,2,\cdots,N-2$。由 $z = e^{-iu}$确定的多项式对 z 有 $N-1$ 个根。对奇数单元的阵列，$\tilde{F}(u)$有$(N-1)/2$ 个未知系数；对偶数单元的阵列，$\tilde{F}(u)$有$(N-2)/2$ 个未知系数。当 N 为奇数时，可将 $\tilde{F}(u)$写为如下连乘形式

$$\tilde{F}_o(u) = \prod_{m=1}^{(N-1)/2} (1 + c_m e^{-iu} + e^{-i2u}) \tag{4.4.48}$$

此式将产生一个系数对称的多项式。当 N 为偶数时，可将 $\tilde{F}(u)$写为如下连乘形式

$$\tilde{F}_e(u) = (1 + e^{-iu}) \prod_{m=1}^{(N-2)/2} (1 + c_m e^{-iu} + e^{-i2u}) \tag{4.4.49}$$

在式(4.4.49)中第一个因子是由于多项式对称的项结合以后产生的。例如第一项和最后一项结合产生出 $1 + e^{-i(N-1)u}$，且由于 N 为偶数，此项最后为 $1 + e^{-iu}$。

功率方向图由 $\tilde{F}(u)$的单元因子的平方结合而成。如 c_m 为实数，注意

$$(1 + c_m e^{-iu} + e^{-i2u})(1 + c_m e^{iu} + e^{i2u}) = (\xi + c_m)^2$$

其中，设

$$\xi = e^{iu} + e^{-iu} = 2\cos u = 2\cos(kd\cos\psi - \alpha) \tag{4.4.50}$$

采用新变量 ξ 表示的$\tilde{F}_o(u)$和 $\tilde{F}_e(u)$的功率方向图，对奇数 N 为

$$P_o(\xi) = |\tilde{F}_o|^2 = \prod_{m=1}^{(N-1)/2} (\xi + c_m)^2 \tag{4.4.51}$$

对偶数 N 为

$$P_e(\xi) = |\tilde{F}_e|^2 = (\xi + 2) \prod_{m=1}^{(N-2)/2} (\xi + c_m)^2 \tag{4.4.52}$$

从式(4.4.50)得知 $-2 \leqslant \xi \leqslant 2$。在此区间内，对一个物理上存在的阵列其功率方向图必须是正实数。为得到数量最多的零点，也要求 c_m 为实数，且$|c_m| < 2$ 以使得所有零点都发生在区间 $-2 \leqslant \xi \leqslant 2$ 中。

例 4.4.4 考虑一个 5 单元等间距 $\lambda/2$ 边射阵列的综合(Ma, 1974)。其功率方向图和相应的阵因子分别为

$$P_o(\xi) = (\xi + c_1)^2 (\xi + c_2)^2 \tag{4.4.53}$$

$$\begin{aligned}\tilde{F}(u) &= (1 + c_1 e^{-iu} + e^{-i2u})(1 + c_2 e^{-iu} e^{-i2u}) \\ &= 1 + (c_1 + c_2)e^{-iu} + (2 + c_1 c_2)e^{-i2u} + (c_1 + c_2)e^{-i3u} + e^{-i4u}\end{aligned} \tag{4.4.54}$$

由式(4.4.53)可看到零点发生在 $\xi = -c_1$ 和 $\xi = -c_2$ 处。副瓣的位置可以通过设 $dP_o(\xi)/d\xi = 0$ 得到 $\xi_1 = -(c_1 + c_2)/2$。$\xi = -c_1$ 和 $\xi = -c_2$ 两值可以忽略，因为它们是已知的零点。对非负的激励参数，要求$(c_1 + c_2) \geqslant 0$ 和 $c_1 c_2 \geqslant -2$ 以保证边射最大值发生在 $\xi = 2$ 处。代回式(4.4.53)可得到相应的副瓣电平

$$\frac{P[\xi_1 = -(c_1 + c_2)/2]}{P(\xi_m = 2)} = \frac{(c_1 - c_2)^4}{16(c_1 + 2)^2(c_2 + 2)^2} \tag{4.4.55}$$

我们同样在 $\xi = -2$ 处可求得最大副瓣电平，

$$\frac{P(\xi_2 = -2)}{P(\xi_m = 2)} = \frac{(c_1 - 2)^2(c_2 - 2)^2}{(c_1 + 2)^2(c_2 + 2)^2} \tag{4.4.56}$$

方向性系数 D 定义为最大方向辐射功率与 4π 立体角内总辐射功率的比值，

$$D = G(\psi, \phi)_{\max} = \frac{4\pi P(\xi)_{\max}}{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\psi \sin\psi P(\xi)} = \frac{2kdP(\xi)_{\max}}{W} \tag{4.4.57}$$

其中，

$$W = \int_0^{\pi} d\psi \sin\psi P(\xi) = 2\int_{2\cos kd}^{2} d\xi \frac{P(\xi)}{\sqrt{4 - \xi^2}}$$

得到

$$W = 2\pi[6 + 2(c_1^2 + c_2^2) + 8c_1c_2 + c_1^2c_2^2]$$

$$D = \frac{(2 + c_1)^2(2 + c_2)^2}{6 + 2(c_1^2 + c_2^2) + 8c_1c_2 + c_1^2c_2^2}$$

下面讨论几种特殊情况。

情况 1

要求所有激励参数相等。由式(4.4.54)有 $c_1 + c_2 = 1$，$c_1c_2 = -1$ 并得到 $c_1 = (1 - \sqrt{5})/2$。阵因子示于图 4.4-10。第一副瓣电平约为$(1/4)^2$(约 -12 dB)，第二副瓣电平为$(1/5)^2$(约 -14 dB)。第一零点波束宽度为 47.2°，方向性系数为 $D = 5$。

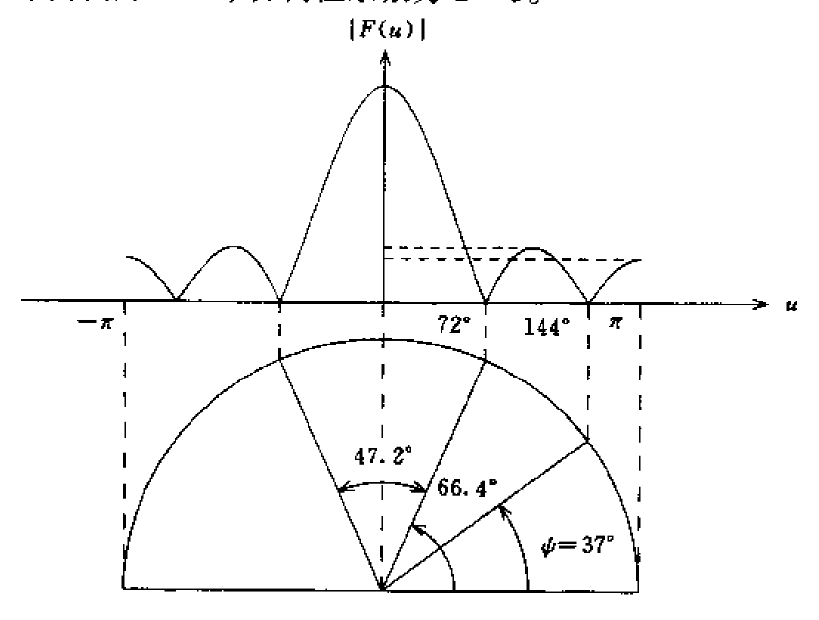


图 4.4-10 情况 1 的阵因子

情况 2

要求所有副瓣等于零(- ∞ dB)。由式(4.4.55)和(4.4.56)有 $c_1 = c_2 = 2$。所有副瓣零点都移到 $\xi = -2$，或 $\psi = 0$ 和 π。因此没有副瓣在可视区当中。从式(4.4.50)可见这样的阵列为二项式阵列，其激励参数为 1:4:6:4:1。第一零点波束宽度为 180°。

情况 3

要求所有副瓣电平要低于 20dB。由式(4.4.55)和(4.4.56)设

$$16(c_1+2)^2(c_2+2)^2 = 100(c_1-c_2)^2$$

以及

$$(c_1+2)^2(c_2+2)^2 = 100(2-c_1)^2(2-c_2)^2$$

由此得到 $c_1=-0.0413$ 和 $c_2=1.6498$。由式(4.4.54)得到要求的激励参数为 1:1.6085:1.9318:1.6085:1。其阵因子示于图 4.4-11 中。第一零点波束宽度为 59.2°。方向性系数 $D=4.686$。与均匀激励的阵列相比,可以看到这个例子的确能给出较低的副瓣电平 $(1/10)^2$(−20 dB),但是付出的代价是第一零点波束变宽了。

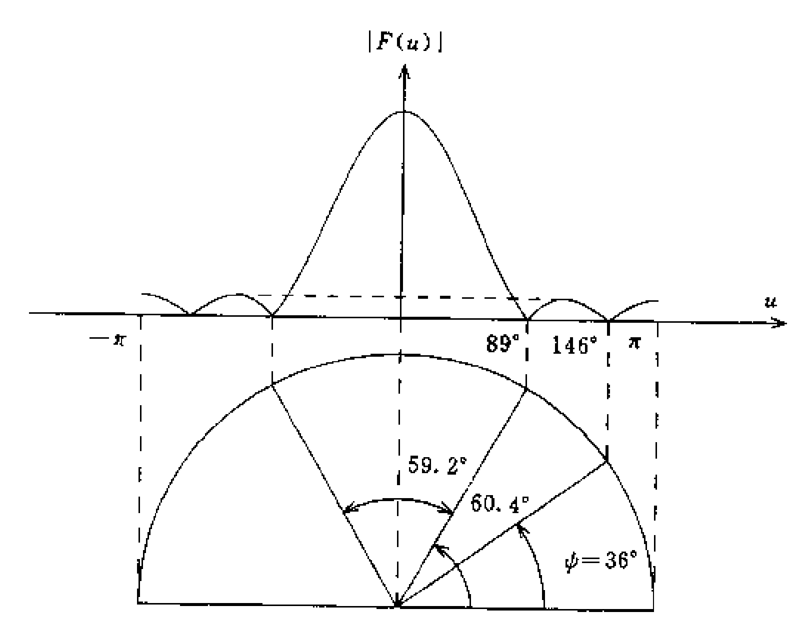


图 4.4-11 情况 3 的阵因子

当 $d=\lambda/2$ 时,u 的整个可视区间为 2π。预期的阵列方向图 $\tilde{F}(u)$ 可以用傅里叶级数展开,然后由其前数项的和来近似。对任意间距 d,包括 $d=\lambda/2$,我们可以研究对一个预先给定的阵列的方向图,用 Lagrange 插值法与 Chebyshev 多项式来综合一个线阵。

例 4.4.5 一个给定的功率方向图可以写成 $G(\xi)$ 的形式,其中 $\xi=2\cos u$,$u=kd\cos\psi-\alpha$。举例考虑方向图的综合(Ma,1974),$N=4$。

$$G(\xi) = e^{-(\xi-2)^2/4} \qquad -2 \leqslant \xi \leqslant 2 \tag{4.4.58}$$

我们首先令 $x=\xi/2$,因此

$$g(x) = e^{-(1-x)^2}$$

其区间也被归一化为 $-1\leqslant x\leqslant 1$(见图 4.4-12)。欲用一个三阶的多项式去匹配这个函数,为此,选择 Chebyshev 多项式 $T_4(x)$ 的零点为采样点,有 $x_{N-1-l}=\cos[(2l+1)\pi/2N]$,其中 $l=0,1,2,\cdots,N-1$,或者

$$x_0=-0.924,\ x_1=-0.383,\ g(x_2)=0.6840,\ g(x_3)=0.9958$$

为了建立这个三阶的多项式,我们应用 Lagrange 插值公式

$$L(x) = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\pi(x)g(x_l)}{(x - x_l)\pi'(x_l)} \tag{4.4.59}$$

其中，

$$\pi(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \tag{4.4.60}$$

$\pi'(x)$是$\pi(x)$的导数，$L(x)$表示 $g(x)$的多项式近似，即在$-1 \leqslant x \leqslant 1$中 $x = x_0, x_1, x_2$ 和 x_3 处，有 $L(x_i) = g(x_i)$。

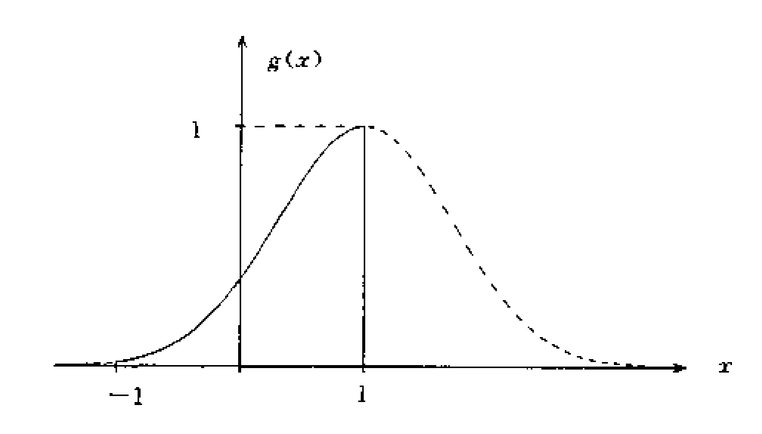


图 4.4-12 $g(x) = \exp[-(1-x^2)]$的图形

对 Chebyshev 多项式，当对采样点取零时，可求得式(4.4.59)中的 Lagrange 插值公式

$$\begin{aligned} L(x) = & (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\frac{g(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + \\ & (x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)\frac{g(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \\ & (x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)\frac{g(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \\ & (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\frac{g(x_3)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_4)(x_3 - x_2)} \\ = & -0.246\,28x^3 + 0.133\,43x^2 + 0.735\,86x + 0.396\,43 \end{aligned} \tag{4.4.61}$$

现在对用式(4.4.59)中的 $L(x)$来近似 $g(x)$引入的最大误差进行估计，近似精度可由留数来衡量

$$R = \pi(x)\frac{g^{(N)}(x)}{N!} \qquad x_0 < x < x_{N-1}$$

其中，上标 N 表示$g(x)$的 N 阶导数。这与泰勒(Taylor)级数中的余数项相似，其前 N 项由$(N-1)$阶的多项式近似。可能发生的最大误差为

$$\varepsilon_{\max} \leqslant \frac{|\pi(x)|_{\max}|g^{(N)}(x)|_{\max}}{N!}$$

误差的大小决定于预期的方向图函数 $g(x)$及采样点的数量和位置。

将采样点的位置选择为 $T_4(x)$的零点，不但可以提供一些位置依据以免使得采样点位置

完全随机,而且还可以使误差估计 $|\pi(x)|_{max}$ 变得简单。应用 $T_{N-1}(x)=2^{N-1}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{N-1})$ 以及对 $-1\leqslant x\leqslant 1$,有 $|g_{N-1}(x)|\leqslant 1$,可得到

$$|\pi(x)|_{max}=|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{N-1})|_{max}$$

$$=\frac{1}{2^{N-1}}|T_{N-1}^{(x)}|_{max}=\frac{1}{2^{N-1}}$$

注意,

$$g^{(4)}(x)=(16x^4-64x^3+48x^2+32x-20)e^{-(1-x)^2}$$

其最大值发生在 $x=1$ 处,且有 $|g^{(4)}(x)|_{max}=12$。有

$$\varepsilon_{max}=\frac{12}{2^3\cdot 4!}=0.0625$$

这个 $g(x)$ 与 $L(x)$ 之间的最大误差发生在 $x\approx 0$ 处,误差为 $\varepsilon(0)=L(0)-G(0)\approx 0.0284$。

代入 $x=\xi/2$,我们得到功率方向图

$$P(\xi)=-0.03078\xi^3+0.03331\xi^2+0.36787\xi+0.39651$$

将其在区间 $-2\leqslant\xi\leqslant 2$ 中给出,得到 $P(\xi)>0$。当 $\xi\to\pm\infty$, $P(\xi)\to\mp\infty$。

对具有顺序相移的阵列,功率方向图必须满足可实现条件,即

$$P(\xi)=\sum_{m=0}^{N-1}A_m\xi^m\geqslant 0,\qquad -2\leqslant\xi\leqslant 2$$

只要 $g(\xi)$ 在 $-2\leqslant\xi\leqslant 2$ 中连续,能使得对一个正数 ε,有 $|g(\xi)-P(\xi)|\leqslant\varepsilon$, Weierstrass 近似理论就可以保证系数 A_m 的存在性和 N 为正整数。上面多项式可以在一个延伸的区间内给出,并由此得到在 $\xi=4.4340$ 处多项式有一个零点,则有

$$P(\xi)=-0.03078(\xi-4.4340)(\xi^2+3.3350\xi+2.9042)\tag{4.4.62}$$

对式中的第二个因子 ξ 不存在其他实数零点。

这个功率方向图必须转化为阵因子并给出激励参数。注意由定义 $\xi=2\cos u=e^{iu}+e^{-iu}$,如果功率方向图具有因子

$$P_l(\xi)=(\xi_l\pm\xi)\tag{4.4.63a}$$

那么对应的阵因子就有

$$\tilde{F}_l(u)=\frac{1}{\sqrt{c_l}}(1\pm c_l e^{-iu})\tag{4.4.63b}$$

其中, $c_l=[\xi_l\pm(\xi_l^2-4)^{1/2}]/2$。如果功率方向图具有因子

$$P_l(\xi)=(\xi+\xi_l)^2\tag{4.4.64a}$$

其中, ξ_l 为实数,且 $|\xi_l|<2$,则对应的阵因子就有

$$\tilde{F}(u)=1+\xi_l e^{-iu}+e^{-i2u}\tag{4.4.64b}$$

如果功率方向图具有因子

$$P_l(\xi)=\xi^2+2\xi_{l1}\xi+\xi_{l1}^2+\xi_{l2}^2\tag{4.4.65a}$$

则对应的阵因子就有因子

$$\tilde{F}_l(u)=\frac{1}{\sqrt{c_{l1}c_{l2}}}[1+(c_{l1}+c_{l2})e^{-iu}+c_{l1}c_{l2}e^{-i2u}]\tag{4.4.65b}$$

其中, $c_{l2}=c_{l1}^*$ 和 $c_{l1}=\{\xi_{l1}-i\xi_{l2}\pm[(\xi_{l1}-\xi_{l2})^2-4]^{1/2}\}/2$, ξ_{l1} 和 ξ_{l2} 为实数。实际上可以看到,在 $-2\leqslant\xi\leqslant 2$ 和 $P(\xi)>0$ 中,可实现的功率方向图 $P(\xi)$ 的多项式只包含式(4.4.62)~

(4.4.64)中所列出的基本因子。

回到式(4.4.54),可以发现相应的阵因子是

$$\tilde{F}_1(u) = \frac{1}{2.0484}(1 - 4.1957\mathrm{e}^{\mathrm{i}u})$$

或

$$\tilde{F}_1(u) = \frac{1}{0.4882}(1 - 0.2383\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u})$$

和

$$\tilde{F}_2(u) = \frac{1}{1.3013}(1 + 2.1064\mathrm{e}^{\mathrm{i}u} + 1.6931\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2u})$$

或

$$\tilde{F}_2(u) = \frac{1}{0.7685}(1 + 1.2440\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u} + 0.5906\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2u})$$

的乘积。显然,阵因子 $\tilde{F}(u) = \tilde{F}_1(u)\tilde{F}_2(u)$的解,即由其得到的激励参数并不是惟一的。

综上所述的 Chebyshev 插值方法,对同一个功率方向图可以得到四组不同的激励参数。

习 题

4.4.1 综合一个 7 单元等间距边射 Dolph-Chebyshev 阵列,其单元间距 $d = \lambda/2$,副瓣电平为 −20 dB,试确定其激励参数。如果阵列的辐射单元为全向天线,求第一零点波束宽度和方向性系数。然后将单元间距变为 $d = \lambda/4$,如果仍然采用上面求得的激励参数,求第一零点波束宽度和方向性系数。

4.4.2 考虑一个 5 单元等间距边射 Chebyshev 阵列,其单元间距为 d,

(1)如果激励是对称的,$d = \lambda/2$,副瓣电平为 $1/R = 0.03$,证明 $b = 1.6036$。第一零点 $T_4(x_1)$位于 $x_1 = 0.9239$,由 $u_1 = kd\cos(\psi_1) = 2\arccos x_0/b$,证明 $\psi_0 = 52.47°$。第一零点波束宽度是多少?

(2)求 Dolph-Chebyshev 阵列的激励参数。

(3)如果 $d = \lambda/3$, $1/R = 0.03$, Dolph-Chebyshev 阵列的波束宽度是多少?

(4)如果 $d = \lambda/3, 1/R = 0.03$,采用 Dolph 变换,考虑一个由多项式 $P_4(x) = 14.2x^4 - 19.3x^2 + 5.56$ 激励的阵列。证明由 $P_4(x)$得到的第一副瓣的峰值发生在 $x = 0.8244$ 处,$P_4(0.8244) = -0.9979$ 且 $b = 1.4943$。$P_4(x)$的第一零点发生在 $x_1 = 0.9719$ 处,计算第一零点波束宽度。证明在可视区内第一副瓣为峰值最大的副瓣。将波束宽度与 Dolph-Chebyshev 阵列的波束宽度进行比较并解释不同点。这个 P_4 阵列的激励参数是多少?

(5)对上面条件(3),采用 Riblet 变换 $x = b\cos u + c$ 重新设计 Dolph-Chebyshev 阵列。求出激励参数。将结果与上面条件(3)和(4)的结果比较并加以总结。

4.4.3 考虑一个具有正弦激励分布的偶极子线阵,其 $u = kd\cos\psi - \alpha$。阵因子为

$$\tilde{F}(u) = \sum_{n=0}^{N-1}\sin\left(\frac{n\pi}{N-1}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nu}$$
$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left\{\sum_{n=0}^{N-1}\left[\exp \mathrm{i}n\left(\frac{\pi}{N-1} - u\right)\right] - \sum_{n=0}^{N-1}\left[\exp \mathrm{i}n\left(-\frac{\pi}{N-1} - u\right)\right]\right\}$$

$$|\tilde{F}(u)| = \left|\frac{\cos\left(\frac{N-1}{2}u\right)\sin\left(\frac{\pi}{N-1}\right)}{\cos u - \cos\frac{\pi}{N-1}}\right|$$

注意,位于两端的两个单元其激励参数为零。

(1)确定当 $u = 0$ 时的全局最大值,并在 $N \to \infty$ 时,求其渐近值。

(2)证明$|\tilde{F}(u)|$的全局最大发生在 $u=0$ 处,且 $\cos u=\cos[\pi/(N-1)]$既不是全局最大也不是局部最大。$|\tilde{F}(u)|$的零点发生在

$$u=\frac{(2m+1)\pi}{N-1}$$

其中,m 可为任意整数,但是 $m/(N-1)$和 $m/(N+1)$都不能为整数。确定副瓣的准确位置和电平以及它们在 $N\to\infty$时的渐近值。计算并比较 $N=6,10,15,50$ 时的结果。

(3)计算这个阵列的方向性系数的公式为

$$D=\frac{4\pi|\tilde{F}(u)|^2_{\max}}{\int \mathrm{d}\Omega|\tilde{F}(u)|^2}$$

$$=\frac{4\pi|\tilde{F}(0)|^2}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\psi\sin\psi|\tilde{F}(u)|^2}=\frac{2kd\cot^2\left[\frac{\pi}{2(N-1)}\right]}{\int_{-kd-\alpha}^{kd-\alpha}\mathrm{d}u|\tilde{F}(u)|^2}$$

其中,$u=kd\cos\psi-\alpha$,$du=-kd\sin\psi d\psi$,当 $N=6,d=\lambda/2$ 时,计算 D。

4.4.4　考虑一个阵列方向图的综合(Ma,1974),

$$G(\xi)=\mathrm{e}^{-(\xi-2)^2/4},\qquad -2\leqslant\xi\leqslant 2$$

阵列单元数为 4,其中 $\xi=2\cos u=2\cos(kd\cos\psi-\alpha)$。

(1)设 $x=\xi/2$ 并选择勒让德(Legendre)多项式 $P_4(x)$的零点为对 $g(x)=\exp[-(1-x)^2]$的采样点。这些零点为

$$x_0=-0.861,\quad x_1=-0.340,\quad x_2=0.340,\quad x_3=0.861$$

利用 Lagrange 插值公式,确定 $g(x)$,其在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 中应取正值。求功率方向图 $P(\xi)$,其在区间 $-2\leqslant\xi\leqslant 2$ 中应取正值。

(2)估计最大误差 $\varepsilon_{\max}$,有

$$|\pi(x)|_{\max}=\frac{N!}{(2N-1)(2N-3)\cdots 1}|P_N(x)|_{\max}$$

以及在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 中有 $P_N(x)\leqslant 1$。

4.4.5　如果采样点是均匀分布的,三角插值法是一种很有用的方法(Ma,1974)。用这种方法可以很方便地处理以 u 为变量的功率方向图 $P(u)$的综合问题。这里需记住 $\xi=2\cos u$。原来的可视区通过变换可以给出 u 的区间为从 0 到 π。采样点可以通过把此区间等分为 $N-1$ 得到。

$$u_l=\frac{l\pi}{N-1},\qquad l=0,1,\cdots,N-1$$

对任意的有限函数 $G(u)$,三角插值法得到的 $P(u)$在当采样点增加的时候都将无条件地向 $G(u)$收敛。

考虑例 4.4.2,设 $kd=\pi$,$\alpha=0$,因此 u 的区间无需附加变换就为$[0,\pi]$,选取

$$u_0=0,\quad u_1=\pi/3,\quad u_2=2\pi/3,\quad u_3=\pi$$

$$G(u_0)=1,\ G(u_1)=0.779,\ G(u_2)=0.105,\ G(u_3)=0.018$$

求 $P(u)$和 $P(\xi)$。证明功率方向图满足可实现条件,即在 $-2\leqslant\xi\leqslant 2$ 区间中,$P(\xi)\geqslant 0$。

4.4.6　考虑用 Bernstein 多项式近似一个给定的功率方向图。对于在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 区间中定义的实函数 $g(x)$,用来近似 $g(x)$的 n 阶 Bernstein 多项式为(Ma,1974)

$$B_n^g(x)=\sum_{l=0}^{n}\frac{n!}{l!(n-l)!}g(l/n)x^l(1-x)^{n-l}$$

当 n 增加的时候,$B_n^g(x)$对 $g(x)$的收敛也是无条件的。可以看到,当 $g(x)$为一个常数时,对所有 n 阶 $B_n^g(x)$也等于同一个常数。$B_n^g(x)$在阵列综合中最为重要的性质是,当 $g(x)$在有限界的情况下,$B_n^g(x)$的上界和下界与 $g(x)$相同。因此,由此得到的近似总能够满足可实现条件,这一点是其他插值方法不能确保的。对例 4.4.2 中的阵列方向图,求 $n=3$ 的 Bernstein 多项式近似,并计算相应的阵列方向图。

4.5 线天线

从天线的馈电端口看进去,天线辐射出去的功率可以被等同于在电阻上消耗掉的功率,因此可将其称为辐射电阻。对一个具有 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')=\hat{z}I(z')\delta(x')\delta(y')$ 电流分布的线天线,其矢量电流矩的 θ 分量为 $f_\theta = -\sin\theta \iiint \mathrm{d}^3r'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'} = -\sin\theta\int \mathrm{d}z' I(z')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz'\cos\theta}$ (4.5.1)

其电场可由下式计算

$$E_\theta = \mathrm{i}\omega\mu\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}f_\theta$$

及其磁场

$$H_\phi = \mathrm{i}k\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}f_\theta$$

总辐射功率为

$$\begin{aligned} P_\mathrm{r} &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^\pi \mathrm{d}\theta r^2\sin\theta\,\frac{1}{2}E_\theta H_\phi^* \\ &= \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\sin\theta\pi\eta\left(\frac{k}{4\pi}\right)^2 |f_\theta|^2 \end{aligned} \tag{4.5.2}$$

其中,$\eta=(\mu/\varepsilon)^{1/2}$。辐射电阻为

$$R_\mathrm{r} = 2P_\mathrm{r}/I_0^2$$

其中,I_0 为输入电流的幅度。

考虑一个线径为零、长度为 $2l$ 的线天线,在其中心由恒定的电流源 I_0 激励(如图4.5-1)。当 l 为无限短时,可以使用赫兹偶极子模型 $I(z')=2I_0l\delta(z')$。其矢量电流矩可由式(4.5.1)得到 $f_\theta=-2I_0l\sin\theta$。由矢量电流矩 f_θ 和式(4.5.2)可求得线天线的总辐射功率

$$P_\mathrm{r} = \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\sin^3\theta(k/4\pi)^2 4\pi\eta I_0^2 l^2 = \frac{(2kI_0l)^2}{12\pi}\eta$$

因此辐射电阻为

$$R_\mathrm{r} = \frac{2P_\mathrm{r}}{I_0^2} = \frac{(2kl)^2}{6\pi}\eta = 20(2kl)^2 \tag{4.5.3}$$

其中,利用了 $\eta=120\pi\,\Omega$ 这一事实。显然,由式(4.5.3)计算得到的辐射电阻 R_r 对任何具有一定长度的线天线都不适用。例如,用 $2l=\lambda/2$,我们得到 $R_\mathrm{r}\approx 200\,\Omega$,而通过测量或更为复杂的计算得到的较准确的值为 $73\,\Omega$。

由式(4.5.3)计算辐射电阻 R_r 的时候,假设线上的电流分布是均匀的(见图 4.5-2)。如果天线是由导体做的,对 $z=\pm l$ 处的边界条件要求电流 $I(z)$ 为零。对 l 较小时更为接近的近似电流分布为三角形分布(见图 4.5-3),

$$I(z') = \frac{I_0}{l}(l-|z'|)$$

在计算电流矩的时候,由于天线很短可先忽略相位滞后项 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz'\cos\theta}$,

$$f_\theta \approx -\sin\theta\int_{-l}^{l}\mathrm{d}z'\,\frac{I_0}{l}(l-|z'|) = -I_0l\sin\theta \tag{4.5.4}$$

这相当于将图 4.5-2 中的均匀电流分布的赫兹偶极子中的电流矩 $-2I_0l\sin\theta$ 换为如图 4.5-3

所示的三角形分布的电流矩 $-I_0 l\sin\theta$。辐射电阻可由下式计算得到

$$R_r = \frac{2P_r}{I_0^2} = 5(2kl)^2$$

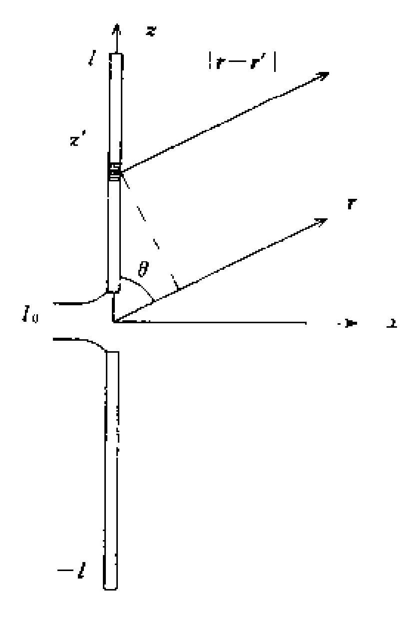


图 4.5-1 由电流源激励的线天线

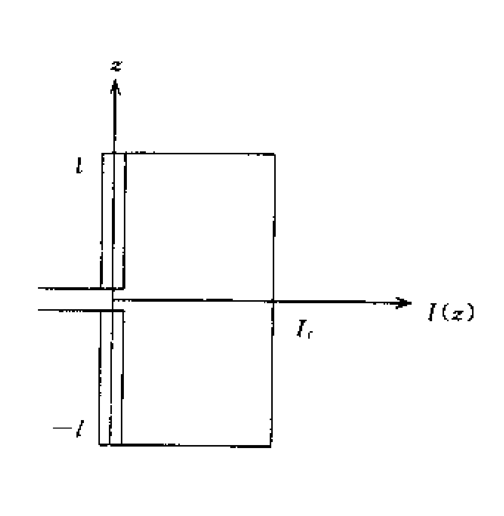


图 4.5-2 均匀电流分布

它比式(4.5.3)中的值小 4 倍。将天线长度上下限 $2l$ 拉长到半个波长,可得到 $R_r = 50\Omega$。对一个长度 $2l$ 小于半个波长的线天线,如果在计算时计及相位滞后因子的影响,将会使电流矩的值减小,这是因为在式(4.5.4)的积分中,其积分核总是正数,加入相位滞后因子将会使其值减小。因此对 R_r 的过小估计不是由于忽略了相位滞后因子而引起的,而一定是由于对电流分布的不准确估计引起的。

对一个长度不是无限小的线天线,用正弦电流分布来近似将更加接近实际情况。假设(见图 4.5-4),

$$I(z') = I_m \sin k(l - |z'|) \tag{4.5.5}$$

注意,I_m 是正弦幅度,其与 I_0 的关系为 $I_0 = I_m \sin(kl)$。电流矢量矩的 θ 分量为

$$f_\theta = -\sin\theta \int_{-l}^{l} dz' I_m \sin k(l - |z'|) e^{-ikz'\cos\theta}$$

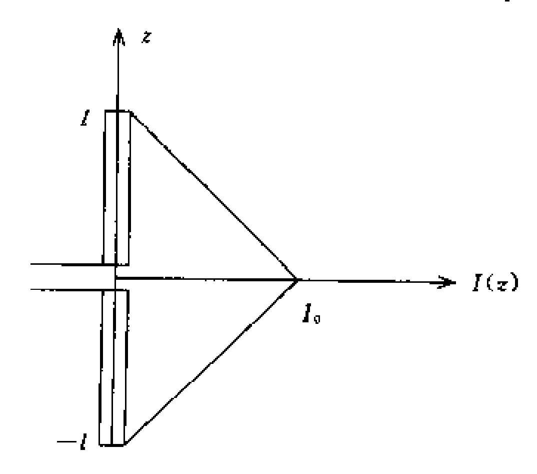


图 4.5-3 三角形电流分布

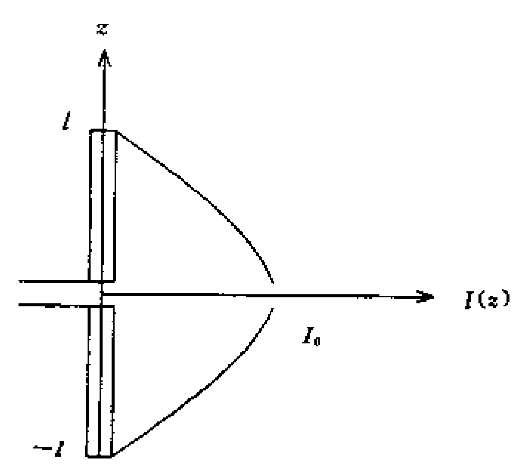


图 4.5-4 正弦形电流分布

这个积分式是可积的，并可得到一个解析的解。

在精确计算这个积分之前，再次假设天线的长度 $2l$ 很短，以至于相位滞后因子 $e^{-ikz'\cos\theta}$ 可近似等于 1。如果在积分时不考虑这个相位滞后因子，可得到

$$f_\theta = -\sin\theta\frac{2I_m}{k}(1-\cos kl) \tag{4.5.6}$$

在 $kl \ll 1$ 的极限条件下，得到近似结果

$$f_\theta \approx -I_m(kl^2)\sin\theta \tag{4.5.7}$$

这里 $I_m \approx I_0/kl$。因此式(4.5.7)与式(4.5.4)相等。

将这个结果应用于半波振子天线，由式(4.5.6)得到 $f_\theta = -\sin\theta(2I_m/k)$。应用式(4.5.2)可计算出总辐射功率为

$$P_r = \int_0^\pi d\theta\sin^3\theta\frac{\eta I_m^2}{4\pi} = 40I_m^2 \tag{4.5.8}$$

其中，$\eta=\sqrt{\mu/\epsilon}=120\pi\ \Omega$。由此得到的辐射电阻为 $R_r=2P_r/I_m^2=80\ \Omega$。之所以采用正弦电流分布得到的辐射电阻比三角形电流分布得到的值大，是因为其覆盖的面积比三角形大。然而相位滞后因子还没有计算进去。如果将相位滞后因子考虑进去，其结果将适用于各种不同长度的线天线，无论是长的还是短的。

对长度为 $2l$ 的线天线，如采用正弦电流分布并考虑相位滞后因子，其电流矢量矩可由下式计算

$$\begin{aligned} f_\theta &= -\sin\theta\int_{-l}^{l}dz' I_m\sin k(l-|z'|)e^{-ikz'\cos\theta} \\ &= -\frac{2I_m}{k}\left[\frac{\cos(kl\cos\theta)-\cos kl}{\sin\theta}\right] \end{aligned} \tag{4.5.9}$$

电场矢量为

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{\theta}}i\omega\mu\frac{e^{ikr}}{4\pi r}f_\theta = -\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{i\eta I_m e^{ikr}}{2\pi r}\left[\frac{\cos(kl\cos\theta)-\cos kl}{\sin\theta}\right]$$

总辐射功率 P_r 为

$$P_r = \int_0^\pi d\theta\sin\theta\frac{\eta I_m^2}{4\pi}\left[\frac{\cos(kl\cos\theta)-\cos kl}{\sin\theta}\right]^2$$

如用 I_m 表示输入电流，辐射电阻为

$$R_r = \frac{2P_r}{I_m^2} = \frac{\eta}{2\pi}\int_0^\pi d\theta\frac{[\cos(kl\cos\theta)-\cos kl]^2}{\sin\theta} \tag{4.5.10}$$

置换积分变量，可得到

$$\begin{aligned} R_r &= \frac{\eta}{2\pi}\int_{-1}^{1}du\frac{[\cos(klu)-\cos kl]^2}{1-u^2} \\ &= \frac{\eta}{4\pi}\int_{-1}^{1}du\left\{\frac{[\cos(klu)-\cos kl]^2}{1+u}+\frac{[\cos(klu)-\cos kl]^2}{1-u}\right\} \\ &= \frac{\eta}{2\pi}\int_0^2 dv\left\{\frac{[\cos(klu)-\cos kl]^2}{v}\right\} \\ &= \frac{\eta}{2\pi}\left\{\left(1+\frac{1}{2}\cos 2kl\right)\int_0^2 dy\frac{1}{y}-\int_0^2 dy\frac{\cos kly}{y}-\right. \\ &\qquad \left.\int_0^2 dy\frac{\cos[kl(y-2)]}{y}+\int_0^2 dy\frac{\cos[2kl(y-1)]}{2y}\right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{\eta}{2\pi}\left\{\int_0^2 \frac{dy}{y}(1-\cos kly)+\right.$$

$$\sin(2kl)\left(\int_0^2 \frac{dy}{2y}\sin 2kly - \int_0^2 \frac{dy}{y}\sin kly\right)+$$

$$\left.\cos(2kl)\left[\int_0^2 \frac{dy}{y}(1-\cos kly) - \int_0^2 \frac{dy}{2y}(1-\cos 2kly)\right]\right\}$$

$$= \frac{\eta}{2\pi}\left\{\gamma + \ln(2kl) - \mathrm{Ci}(2kl) + \sin(2kl)\left[\frac{1}{2}\mathrm{Si}(4kl) - \mathrm{Si}(2kl)\right]+\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\cos(2kl)[\gamma + \ln(kl) + \mathrm{Ci}(4kl) - 2\mathrm{Ci}(2kl)]\right\} \tag{4.5.11}$$

其中,

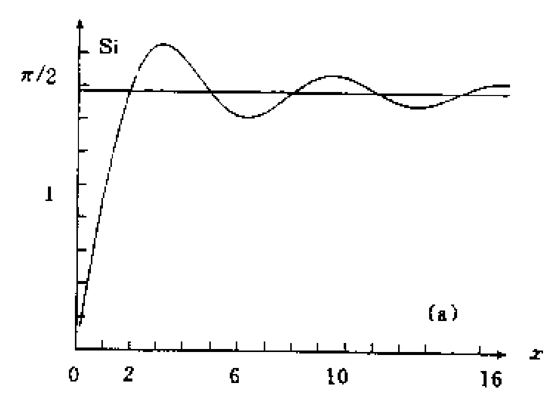
$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x dx' \frac{\sin x'}{x'}$$

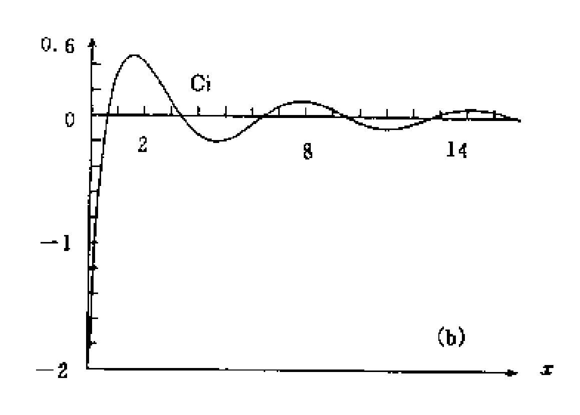
$$\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^\infty dx' \frac{\cos x'}{x'}$$

以及 $\gamma = 0.5772\cdots$。在上面的推导中,应用了如下关系

$$\int_0^x dx' \frac{1-\cos x'}{x'} = \gamma + \ln x - \mathrm{Ci}(x)$$

正弦积分 Si(x)和余弦积分 Ci(x)函数如图 4.5-5(a),(b)所示,图 4.5-5(c)为数值计算的以 $2l$ 为变量的辐射电阻 R_r。当 $2l = \lambda/2$ 时,有 $R_r = 73\ \Omega$。





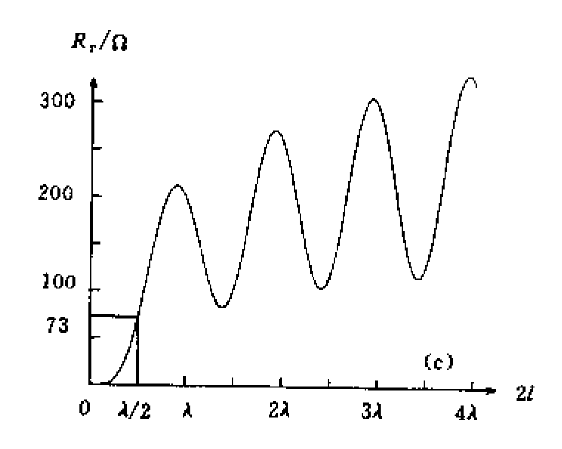


图 4.5-5 辐射电阻 R_r 和 Si(x),Ci(x)函数

在上面的讨论中,演示了对一个天线问题的处理过程。随着近似量与实际情况的逐渐接近,计算结果也变得越来越准确,然而由此带来的数学处理也变得越来越复杂。但是仍不能说线天线的问题到此就满意地解决了,因为还存在两个重要问题:①天线的线径被假设为无限细,如果不这样假设结果会如何呢?②如何能够确认正弦电流分布就是实际的电流分布,为什么不能是同样满足在 $z=\pm l$ 处电流为零的边界条件的其他电流分布呢?这些问题只有在对天线做更进一步的模型化之后才能回答。采用精确的物理结构,天线上的电流分布可由解麦克斯韦方程组得到,而不是通过假设。

针对上面的问题,求解复杂的边界值至少可以处理3种模型(见图4.5-6)。由 Hallen 和 King(1969)提出的模式是一个半径为 a,长度为 l 的圆柱形,其在 $z=0$ 处有一个间隙,此处的电场强度为 $-V\delta(z)$。这个问题被描述为积分方程的形式。第二个模型由 Stratton 和 Chu(1941)提出,他们将偶极子天线用一对椭球形或拉长的球形来描述。与此结构相应的正交法向模型被用来匹配边界条件。第三个是由 Schelkunoff(1943)开发的双锥模型。在下一节中将应用 Schelkunoff 的方法来求解这一基本问题。

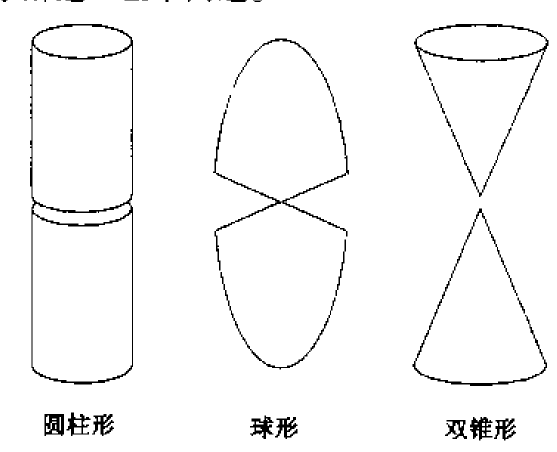


图4.5-6　天线的物理模型

习　题

4.5.1

(1)求位于自由空间 z 轴上,由一线源 $I(z)=I_0e^{ik_zz}$ 产生的远场电场和磁场矢量。

(2)求远场复坡印廷功率矢量的实部,问如果 $k_z>k$ 又将会如何。

(3)在远场中,对 $k_z<k$ 和 $k_z>k$,确定等相位面(相位波前)。问坡印廷矢量的实部是否与等相位面正交。

4.5.2　考虑一个导电直线,其线径为零,长度为 $2l$,由一个恒定电流 I_0 激励,其电流密度为

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')=\hat{z}I_0\sin(kl-k|z'|)\delta(x')\delta(y')$$

并满足在 $z'=\pm l$ 处电流为零的边界条件。在辐射场中,证明矢量电流矩 $\boldsymbol{f}(\theta,\phi)$ 为

$$\boldsymbol{f}(\theta,\phi)=\hat{z}\frac{2I_0}{k\sin^2\theta}[\cos(kl\cos\theta)-\cos(kl)]$$

求辐射场中的电场 $\boldsymbol{E}$。当 $\theta=0$ 和 π 时,$\boldsymbol{E}$ 等于什么?当 $2l=3\lambda/2$ 时,画出辐射场方向图并求出零点的位置。为了理解在此处出现零点的原因,考虑三个以 $\lambda/2$ 为间距的共线振子天线,其中间一个振子的激励相位与两端的相比差 π。证明远场为求和式 $e^{-i\pi\cos\theta}-1+e^{i\pi\cos\theta}$,并确定零点的位置。

4.5.3　求一个长度为 l/λ 的细线偶极子天线的辐射电阻 R_r 的渐近公式。

4.5.4

(1)估算一个半波振子的 R_r。

(2)当 $kl\to0$ 时,计算辐射电阻并将其与赫兹振子的结果比较。

4.6 双锥天线

4.6.1 建模和波动方程解

一个双锥天线的结构如图4.6-1所示。由于其对称性,设想所有场的解都是关于ϕ对称的。麦克斯韦方程组因此可以简化为两组互不偶合的方程组,一组与E_r,E_θ和H_ϕ以及TM模相关,另一组与H_r,H_θ和E_ϕ以及TE模相关。对于双锥天线问题,电流是向r方向流动的,因此只应该有TM模存在。

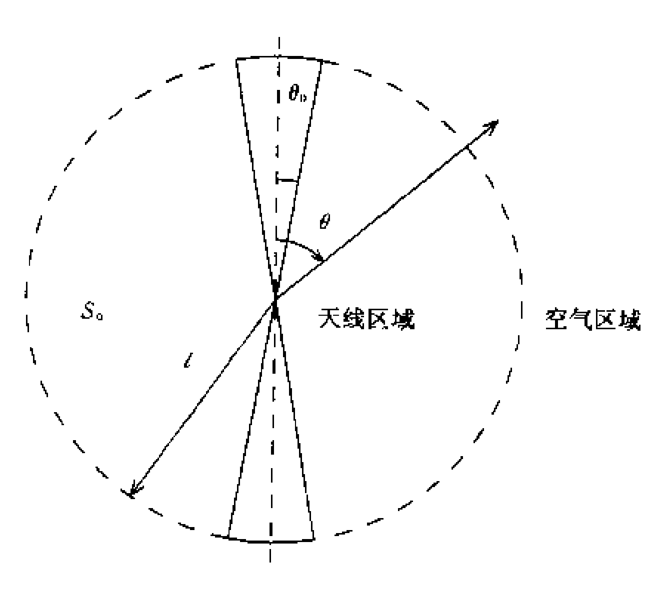


图4.6-1 双锥天线

我们是在如下边界条件下来考虑麦克斯韦方程组的解。

(1)在空气区域中,电磁场应是向外传播的场。

(2)在天线区域中,锥体表面的切向电场应趋于零,

$$E_r(\theta_0) = E_r(\pi - \theta_0) = 0 \tag{4.6.1}$$

在天线的输入端,

$$V_0 = \lim_{r\to 0}\int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \mathrm{d}\theta r E_\theta \tag{4.6.2}$$

其中,V_0是外加电压的强度。

(3)在分开天线区域和空气区域的边界S_0的表面,

$$E_\theta(l+0) = 0 \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 \text{和} \pi - \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi \tag{4.6.3}$$

$$E_\theta(l+0) = E_\theta(l-0) \qquad \theta_0 < \theta < \pi - \theta_0 \tag{4.6.4}$$

$$E_r(l+0) = E_r(l-0) \qquad \theta_0 < \theta < \pi - \theta_0 \tag{4.6.5a}$$

$$H_\phi(l+0) = H_\phi(l-0) \qquad \theta_0 < \theta < \pi - \theta_0 \tag{4.6.5b}$$

注意,其中边界条件(4.6.5a)和(4.6.5b)相互不是独立的,因为条件(4.6.5a)与高斯定律有关,而条件(4.6.5b)与安培定律有关。它们由电荷与电流的守恒定律相互关联。应该根据情况的合适程度只选用式(4.6.5a)和(4.6.5b)中的一个。与TM波相关的方程为

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta H_\phi) = -\mathrm{i}\omega\epsilon E_r \tag{4.6.6a}$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\phi) = -\mathrm{i}\omega\epsilon E_\theta \tag{4.6.6b}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(E_r) = \mathrm{i}\omega\mu H_\phi \tag{4.6.6c}$$

将式(4.6.6a)和(4.6.6b)代入式(4.6.6c)以消去 E_r 和 E_θ，可得到

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}rH_\phi + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta rH_\phi)\right] + k^2 rH_\phi = 0 \tag{4.6.7}$$

方程(4.6.7)可用分离变量法来解。设

$$H_\phi = R(r)\Theta(\theta) \tag{4.6.8}$$

可得到下面两个方程

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}rR(r) + \left[k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right]R(r) = 0 \tag{4.6.9}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}[\sin\theta\,\Theta(\theta)]\right\} + n(n+1)\Theta(\theta) = 0 \tag{4.6.10}$$

其中，$n(n+1)$为分离常数。

公式(4.6.9)的解是球面汉开尔函数 $h_n^{(1)}(kr)$和 $h_n^{(2)}(kr)$。对其前几阶 $n=0$ 到 2，第一类球面汉开尔函数为

$$h_0^{(1)}(kr) = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{kr} \tag{4.6.11a}$$

$$h_1^{(1)}(kr) = -\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{kr}\right)\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{kr} \tag{4.6.11b}$$

$$h_2^{(1)}(kr) = \mathrm{i}\left[1 + 3\left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right) + 3\left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^2\right]\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{kr} \tag{4.6.11c}$$

第二类球面汉开尔函数 $h_n^{(2)}(kr)$是第一类球面汉开尔函数 $h_n^{(1)}(kr)$复数共扼。球面贝塞尔函数 $b_n(\xi)$与柱面贝塞尔函数 $B_n(\xi)$的关系为

$$b_n(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}}B_{n+\frac{1}{2}}(\xi)$$

其中，$b_n(\xi)$表示 $h_n^{(1)}$ 或 $h_n^{(2)}$，而 $B_n(\xi)$表示 $H_n^{(1)}$ 或 $H_n^{(2)}$。相关的递推公式为

$$B_\nu{}'(\xi) = B_{\nu-1}(\xi) - \frac{\nu}{\xi}B_\nu(\xi)$$

$$= -B_{\nu+1}(\xi) + \frac{\nu}{\xi}B_\nu(\xi)$$

球面贝塞尔函数 $j_n(kr)$为 $h_n^{(1)}$ 或 $h_n^{(2)}$ 的实部。对于前几阶，它们为

$$j_0(kr) = \frac{\sin kr}{kr} \tag{4.6.12a}$$

$$j_1(kr) = -\frac{\cos kr}{kr} + \frac{\sin kr}{(kr)^2} \tag{4.6.12b}$$

$$j_2(kr) = -\frac{\sin kr}{kr} - \frac{3\cos kr}{(kr)^2} + \frac{3\sin kr}{(kr)^3} \tag{4.6.12c}$$

注意，$j_n(kr)$在 $kr\to0$ 时可保持有限。$h_n^{(1)}(kr)$的虚部被称为球面诺依曼(Neumann)函数，其在 $kr\to0$ 时将趋于无穷大。

公式(4.6.10)的解由勒让德(Legendre)多项式 $P(\theta)$ 导出

$$\Theta(\theta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}P(\theta) \tag{4.6.13}$$

其中,$P(\theta)$满足常规勒让德方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}P(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right] + n(n+1)P(\theta) = 0 \tag{4.6.14}$$

式(4.6.14)的两个独立的解为 $P_n(\cos\theta)$和 $Q_n(\cos\theta)$。其中,

$$P_n(\cos\theta) = \sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q(n+q)!}{(n-q)!(q!)^2}\sin^{2q}(\theta/2) \tag{4.6.15}$$

对所有不等于整数的 n 另一个独立解为 $Q_n(\cos\theta) = P_n(-\cos\theta)$。对等于整数的 n,可有

$$Q_n(\cos\theta) = P_n(\cos\theta)\ln\left(\cot\frac{\theta}{2}\right) - \sum_{s=1}^{n}\frac{P_{n-s}P_{s-1}}{s} \tag{4.6.16}$$

其中,求和项只在 $n\geqslant1$ 时才有贡献。当 n 等于整数时,用来生成勒让德多项式的 Rodrigues 公式如下,

$$P_n(u) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}u^n}(u^2-1)^n$$

其中,$u=\cos\theta$。前几阶的勒让德多项式 $P_n(\cos\theta)$为

$$P_0(\cos\theta) = 1 \tag{4.6.17a}$$

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta \tag{4.6.17b}$$

$$P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) = \frac{1}{4}(3\cos2\theta + 1) \tag{4.6.17c}$$

注意,函数 $Q_n(\cos\theta)$在 n 为整数时,对 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 将趋于无穷大。对 n 为非整数时 $P_n(-\cos\theta)$在 $\theta=\pi$ 处将趋于无穷大。

应用 $R(r)$和 $P(\theta)$,可由式(4.6.6a),(4.6.6b)和(4.6.8)求得

$$H_\phi = R(r)\frac{\mathrm{d}P(\theta)}{\mathrm{d}\theta} \tag{4.6.18a}$$

$$E_r = -\frac{R(r)}{\mathrm{i}\omega\epsilon r}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}P(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right] = \frac{n(n+1)}{\mathrm{i}\omega\epsilon r}R(r)P(\theta) \tag{4.6.18b}$$

$$E_\theta = \frac{1}{\mathrm{i}\omega\epsilon r}\frac{\mathrm{d}[rR(r)]}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}P(\theta)}{\mathrm{d}\theta} \tag{4.6.18c}$$

4.6.2 空气区域和偶极子场的解

我们先考虑空气区域中的解。当 $n=0,1,2\cdots$时,它们取如下形式

$$H_\phi = \frac{1}{2\pi}\sum_n b_n h_n^{(1)}(kr)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}P_n(\cos\theta) \tag{4.6.19a}$$

$$E_r = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}\omega\epsilon r}\sum_n n(n+1)b_n h_n^{(1)}(kr)P_n(\cos\theta) \tag{4.6.19b}$$

$$E_\theta = \frac{1}{2\pi1\mathrm{i}\omega\epsilon r}\sum_n b_n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[rh_n^{(1)}(kr)]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}P_n(\cos\theta) \tag{4.6.19c}$$

选择第一类汉开尔函数是因为它们表示向外传播的波。那些 n 取非整数的函数和 $Q_n(\cos\theta)$没有包括在内是因为它们在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 处有奇点。TM_1 和 TM_2 模的电力线示于图 4.6-2 和图 4.6-3 中。

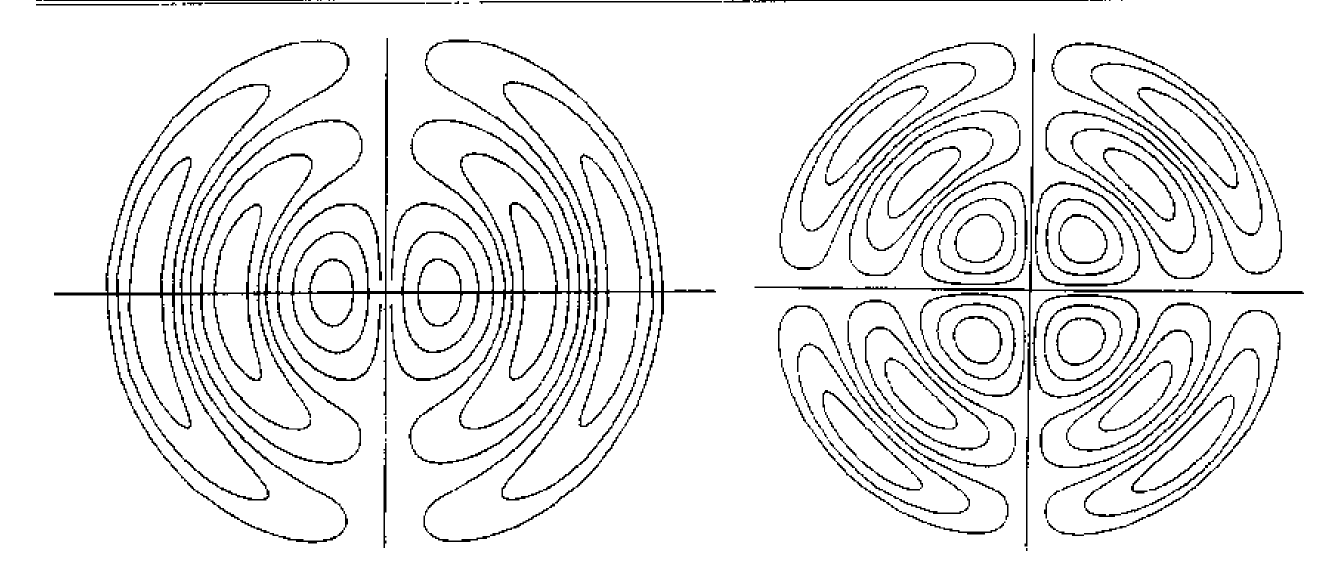


图 4.6-2 TM$_1$ 模的电力线图　　图 4.6-3 TM$_2$ 模的电力线图

我们注意到由于 $n=0$ 时 $P_0(\cos\theta)=1$，因此 TEM（或 TM$_0$）模在空气区域中是不存在的，对 TM$_1$ 模，我们得到

$$H_\phi = \frac{b_1 e^{ikr}}{2\pi kr}\left(1+\frac{i}{kr}\right)\sin\theta \tag{4.6.20a}$$

$$E_r = \frac{\eta b_1 e^{ikr}}{\pi kr}\left[\frac{i}{kr}+\left(\frac{i}{kr}\right)^2\right]\cos\theta \tag{4.6.20b}$$

$$E_\theta = \frac{\eta b_1 e^{ikr}}{2\pi kr}\left[1+\frac{i}{kr}+\left(\frac{i}{kr}\right)^2\right]\sin\theta \tag{4.6.20c}$$

其中，$\eta = k/\omega\varepsilon = (\mu/\varepsilon)^{1/2}$。这些场也是赫兹偶极子的场。可以采用柱面坐标系来确定 b_1 并注意到电流偶极矩为

$$I_0 l_{\text{eff}} = \int_{-\infty}^{\infty} dz I_z \tag{4.6.21}$$

其中，

$$I_z = \int_0^{2\pi} \rho d\phi H_\phi$$

由于 $r=(z^2+\rho^2)^{1/2}$ 且 $\sin\theta=\rho/r$，可由式(4.6.20a)得到，当 $\rho\to 0$ 和 $z\to 0$ 时，

$$I_z \approx \frac{i b_1 \rho^2}{k^2(z^2+\rho^2)^{3/2}}$$

注意，有当 $\rho\to 0$ 时，$I_z\to 0$。然而在 $z=0$ 处，当 $\rho\to 0$ 时 $I_z\to\infty$。计算式(4.6.21)中的积分，可得到

$$I_0 l_{\text{eff}} = \frac{i2b_1}{k^2}\int_0^\infty dz \frac{\rho^2}{(z^2+\rho^2)^{3/2}} = \frac{i2b_1}{k^2}$$

由此得到

$$b_1 = \frac{k^2}{i2} I_0 l_{\text{eff}}$$

式(4.6.20)中的解与无限小偶极天线的解是等同的。相应的四极子的电力线如图 4.6-3 所示。

4.6.3 天线区域中的解

在天线区域中，根据式(4.6.18b)中的 E_r，应注意到式(4.6.1)中表示的边界条件在 $n=0$

时可以得到满足，另外当

$$P(\theta_0)=P(\pi-\theta_0)=0 \tag{4.6.22}$$

时也可以得到满足。当 $n=0$ 时，实际上有 TEM 模。$R(r)$的解为 e^{ikr}/r 和 e^{-ikr}/r 的线性组合，表明波在锥体和输入端之间传导与反射。由于 $P_0(\cos\theta)=1$ 和 $d[P_0(\cos\theta)]/d\theta=0$，$Q_0(\cos\theta)$也被使用。

对高阶的 TM 模，n 由式(4.6.22)求得，在一般情况下不是整数，因此用 u 来表示。设 $P(\theta)$为 $P_u(\cos\theta)$和 $P_u(-\cos\theta)$的线性组合：

$$P(\theta)=T_u(\theta)=\frac{1}{2}[P_u(\cos\theta)+aP_u(-\cos\theta)]$$

式(4.6.22)要求

$$P_u(\cos\theta_0)+aP_u(-\cos\theta_0)=0$$

$$P_u(-\cos\theta_0)+aP_u(\cos\theta_0)=0$$

我们发现式中 $a=\pm1$。因此有

$$T_u(\theta)=\frac{1}{2}[P_u(\cos\theta)-P_u(-\cos\theta)]$$

它是一个关于 $\cos\theta$ 的奇函数，或者

$$T_u(\theta)=\frac{1}{2}[P_u(\cos\theta)+P_u(-\cos\theta)]$$

它是一个关于 $\cos\theta$ 的偶函数。它们的导数

$$\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{1}{2}[P_u(\cos\theta)-P_u(-\cos\theta)]\right\}=-\frac{1}{2}[P'_u(\cos\theta)+P'_u(-\cos\theta)]\sin\theta$$

$$\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{1}{2}[P_u(\cos\theta)+P_u(-\cos\theta)]\right\}=-\frac{1}{2}[P'_u(\cos\theta)-P'_u(-\cos\theta)]\sin\theta$$

也分别为奇函数和偶函数。因此，由于 $T_u(\theta)$为奇函数，H_ϕ 就为 θ 的偶函数，这意味着上下两个锥上的电流为同方向(如果位于上锥 r_0 处的电流由原点处外流，而在下锥 r_0 处的电流则是向内流)。对于 $T_u(\theta)$为偶函数的情况，H_ϕ 就为 θ 的奇函数。表明上下两个锥 r_0 处的电流流向相反(两处的电流要么同时流向原点，要么同时由原点向外流)。

这里只考虑 $T_u(\theta)$为奇函数级数的平衡馈电方式，这也是从实用观点来说最为重要的一种馈电方式。因此选择

$$T_u(\theta)=\frac{1}{2}[P_u(\cos\theta)-P_u(-\cos\theta)] \tag{4.6.23}$$

其完整的解可以表示为关于 u 的求和，其中 u 取最为靠近的整数，

$$H_\phi=\frac{I_0(r)}{2\pi r\sin\theta}+\frac{1}{2\pi}\sum_u a_u j_u(kr)\frac{d}{d\theta}T_u(\theta) \tag{4.6.24a}$$

$$E_r=\frac{1}{2\pi ri\omega\epsilon}\sum_u u(u+1)a_u j_u(kr)T_u(\theta) \tag{4.6.24b}$$

$$E_\theta=\frac{1}{2\pi ri\omega\sin\theta}\frac{d}{dr}I_0(r)+\frac{1}{2\pi ri\omega\epsilon}\sum_u a_u\frac{d}{dr}[rj_u(kr)]\frac{d}{d\theta}T_u(\theta) \tag{4.6.24c}$$

式中，$T_u(\theta)$由式(4.6.23)给出。式(4.6.24a)和(4.6.24c)中的第一项为由(4.6.9)和(4.6.10)式当令 $n=0$，$I_0(r)\simeq e^{\pm ikr}$时给出的 TEM 解。对于更高阶的解，只选择球贝塞尔函数 $j_u(kr)$。这是由于如果引入了诺依曼函数 $N_u(kr)$，不但场量 H_ϕ 和 E_θ 在 $kr\to0$ 时会趋于无穷大，而且代表电流和电压的这些场量的积分在 $kr\to0$ 时也会变得非常奇异。下面将通过对传输线模型的

推导来说明上面得到的解的含义。

4.6.4 传输线模型

首先假设天线是无限长的，并以此来研究向外传播的 TEM 波的解。如设式(4.6.24)中的 $I_0(r)=A\mathrm{e}^{ikr}$，即可得到定义在 r 处的 TEM 模的电压 $V(r)$ 和电流 $I(r)$。

$$V_0(r) = \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \mathrm{d}\theta r E_\theta = \frac{\eta}{\pi} A\left[\ln\left(\cot\frac{\theta_0}{2}\right)\right]\mathrm{e}^{ikr}$$

$$I_0(r) = r\sin\theta_0 H_\phi(\theta=\theta_0) = A\mathrm{e}^{ikr}$$

$V_0(r)$ 和 $I_0(r)$ 的比值给出特征阻抗 Z_0

$$Z_0 = \frac{\eta}{\pi}\ln\left(\cot\frac{\theta_0}{2}\right) \tag{4.6.25}$$

其对任何 r 均为常数。

由于天线的长度 l 实际上是有限的，对 TEM 模可以将天线用一个长度为 l，特征阻抗为 Z_0，并由 Z_t 在终端加载的传输线模型来描述(见图 4.6-4)。

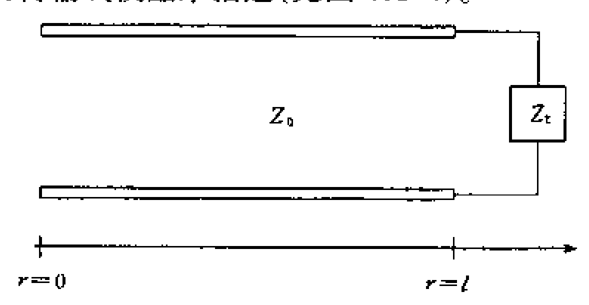


图 4.6-4 TEM 模的传输线模型

对长度为 l 的双锥天线的 TEM 模，可以表示为

$$H_\phi = \frac{I_0(r)}{2\pi r\sin\theta} \tag{4.6.26a}$$

$$E_\theta = \frac{\eta}{Z_0}\frac{V_0(r)}{2\pi r\sin\theta} \tag{4.6.26b}$$

根据传输线理论，线上的电压可以用终端负载阻抗 Z_t 上的电压 $V_0(l)$ 表示，

$$V_0(r) = V_0(l)\left[\cos k(l-r) - \mathrm{i}\frac{Z_0}{Z_t}\sin k(l-r)\right] \tag{4.6.27a}$$

$$I_0(r) = \frac{V_0(l)}{Z_0}\left[-\mathrm{i}\sin k(l-r) + \frac{Z_0}{Z_t}\cos k(l-r)\right] \tag{4.6.27b}$$

因此在任意 r 处的电压即为关于 kr 的正弦和余弦函数的叠加。这里注意

$$E_\theta = \frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\phi)$$

成立，且对 $r=l$ 有 $V_0(l)/I_0(l)=Z_t$。可以证明 Z_t 包含了所有天线区域的高阶模和空气区域中的辐射场。

为了包含所有高阶模，在两锥之间的子午线上可有 $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$。定义电压 $V(r)$ 为

$$\begin{aligned} V(r) &= \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0}\mathrm{d}\theta r E_\theta \\ &= V_0(r) + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}\omega\varepsilon}\sum_u a_u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[r j_u(kr)][P_u(-\cos\theta_0) - P_u(\cos\theta_0)] \end{aligned}$$

$$= V_0(r) \tag{4.6.28}$$

式中第二个等量关系由(4.6.24c)得到,第三个等量关系由边界条件(4.6.1)得到。这一结果表明,沿传输线方向任意 r 处的所有电压都是 TEM 模,没有其他模式存在。

沿传输线方向上的电流 $I(r)$ 由下式给出,

$$\begin{aligned} I(r) &= 2\pi r \sin\theta_0 H_\phi(\theta = \theta_0) \\ &= I_0(r) + \sum_u a_u r j_u(kr) \sin\theta_0 \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} T_u(\theta)\right]_{\theta=\theta_0} \\ &= I_0(r) + \tilde{I}(r) \end{aligned} \tag{4.6.29}$$

式中使用 $\tilde{I}(r)$ 来表示由高阶 TM 模产生的补偿电流。然而,输入端处($r=0$)

$$I(r=0) = I_0(r=0) + \tilde{I}(r=0) = I_0(r=0) \tag{4.6.30}$$

这是由于当 $r \to 0$ 时,$r j_u(kr) \to 0$,因此输入电流与 TEM 模是相同的。由此得到,天线端的输入阻抗为

$$Z_i = \frac{V(0)}{I(0)} = \frac{V_0(0)}{I_0(0)} \tag{4.6.31}$$

其只与 TEM 模有关。如用终端阻抗 Z_t 表示,由式(4.6.27)可以立即得到输入电阻,

$$Z_i = \frac{V_0(0)}{I_0(0)} = Z_0 \frac{Z_t - \mathrm{i} Z_0 \tan kl}{Z_0 - \mathrm{i} Z_t \tan kl} \tag{4.6.32}$$

终端阻抗 Z_t 包涵了天线结构以及所有高阶模的信息。为了确定终端阻抗 Z_t,现转为考虑空气区域中的解,然后将其与天线区域中的解匹配。

由图 4.6-4 所示的传输线模型,等效的终端电阻 Z_t 为

$$Z_t = \frac{V_0(l)}{I_0(l)} = \frac{V_0(l)}{I(l) - \tilde{I}(l)} \tag{4.6.33}$$

其中,$I(l)$ 表示在 $r=l$ 处天线上的总电流,$\tilde{I}(l)$ 则表示除 TME 模以外的所有高阶模补偿电流。

图 4.6-4 所示的传输线模型中的等效终端导纳 Y_t 是式(4.6.33)的倒数。对非常细的天线

$$Y_t = \frac{I(l)}{V_0(l)} - \frac{\tilde{I}(l)}{V_0(l)} \approx -\frac{\tilde{I}(l)}{V(l)} \tag{4.6.34}$$

这是由于一个细天线终端处的总电流会变得很小,实际上 $I(l)/V_0(l) = I(l)/V(l)$ 项就是两个天线端点之间的导纳,即近似为两个天线端点之间静电电容的电纳。

由式(4.6.29)表示高阶模的补偿电流 $\tilde{I}(r)$ 为

$$\begin{aligned} \tilde{I}(r) &= \sum_u a_u r j_u(kr) \sin\theta_0 \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} T_u(\theta)\right]_{\theta=\theta_0} \\ &\approx \frac{120}{Z_0} \sum_u a_u r j_u(kr) \end{aligned} \tag{4.6.35}$$

其中,第二个等量关系的依据为,当 $\theta_0 \to 0$ 时,$u \to 2m+1+\Delta$,以及

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} T_u(\theta)\right]_{\theta=\theta_0} \simeq -\frac{1}{2\pi} \sin u\pi \cot\frac{\theta_0}{2} \approx -\frac{\sin u\pi}{\pi\theta_0} \approx \frac{\Delta}{\theta_0} = \frac{120}{Z_0 \theta_0} \tag{4.6.36}$$

天线区域和空气区域中的完整的解由式(4.6.24)和(4.6.19)给出。在 $r=l$ 处,E_r 应当连续,因此有

$$\sum_u u(u+1)a_u j_u(kl)T_u(\theta) = \sum_n n(n+1)b_n h_n^{(1)}(kl)P_n(\cos\theta)$$

当 $\theta_0 \to 0$ 和 $Z_0 \to \infty$ 时，u 趋于 $2m+1$，T_u 趋于 $P_{2m+1}(\cos\theta)$，a_u 的极限为

$$\lim_{\theta_0 \to 0} a_u = \lim_{\theta_0 \to 0} a_{2m+1+\Delta} = b_{2m+1} \frac{h_{2m+1}^{(1)}(kl)}{j_{2m+1}(kl)}$$

因此有

$$\tilde{I}(r) = \frac{120}{Z_0}\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1} \frac{h_{2m+1}^{(1)}(kl)}{j_{2m+1}(kl)} r j_{2m+1}(kr)$$

对非常细的天线，电流的分布趋向于正弦分布的基波

$$I(r) = I_0 \sin k(r-l) \tag{4.6.37}$$

其中，

$$I_0 = \mathrm{i}\frac{V_0(l)}{Z_0}$$

系数 b_{2m+1} 可以由式(4.6.37)给出的电流分布，通过比较天线区域与空气区域中的场的表达式得到。对如式(4.6.37)所示的正弦电流分布，有远区场中的近似解，

$$H_\phi = \mathrm{i}k\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r} f_\theta$$

其中，

$$f_\theta = I_0 \frac{2}{k\sin\theta}[\cos(kl\cos\theta) - \cos kl]$$

径向电场为

$$E_r = \frac{1}{-\mathrm{i}\omega\epsilon}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta H_\phi) = -\eta I_0 l\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{2\pi r^2}\sin(kl\cos\theta) \tag{4.6.38}$$

表达式 $\sin(kl\cos\theta)$ 可用球谐函数展开为

$$\sin(kl\cos\theta) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(4m+3)j_{2m+1}(kl)P_{2m+1}(\cos\theta) \tag{4.6.39}$$

因此式(4.6.38)可写为

$$E_r = -\eta I_0 l\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{2\pi r^2}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(4m+3)j_{2m+1}(kl)P_{2m+1}(\cos\theta) \tag{4.6.40}$$

另外，用远区场近似，式(4.6.19b)可变为

$$E_r = \frac{1}{I\omega\epsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{2\pi r^2}\frac{1}{k}\sum_{m=0}^{\infty}2(2m+1)(m+1)b_{2m+1}(-1)^{m+1}P_{2m+1}(\cos\theta) \tag{4.6.41}$$

式中考虑了对大变量有

$$h_n^{(1)}(kr) \approx (-\mathrm{i})^{n+1}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{kr}$$

将式(4.6.40)和(4.6.41)联立，得到

$$b_{2m+1} = -\frac{V_0(l)}{Z_0}\frac{(4m+3)}{2(2m+1)(m+1)}k^2 l j_{2m+1}(kl) \tag{4.6.42}$$

以及

$$\tilde{I}(r) = -\frac{60}{Z_0^2}V_0(l)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(4m+1)}{(2m+1)(m+1)}kl h_{2m+1}^{(1)}(kl) kr j_{2m+1}(kr) \tag{4.6.43}$$

从而得到

$$Y_t = -\frac{\tilde{I}(l)}{V_0(l)} = \frac{Z_a(kl)}{Z_0^2} = \frac{1}{Z_0^2}[R_a(kl) - \mathrm{i}X_a(kl)] \tag{4.6.44}$$

其中，

$$R_a(kl) = 60\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(4m+3)}{(2m+1)(m+1)}[k l j_{2m+1}(kl)]^2 \tag{4.6.45}$$

$$X_a(kl) = -60\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(4m+3)}{(2m+1)(m+1)}k l j_{2m+1}(kl) kl\, n_{2m+1}(kl) \tag{4.6.46}$$

用正弦和余弦积分表示

$$R_a(kl) = 60[\gamma + \ln(2kl) - \mathrm{Ci}(2kl)] + 30[\gamma + \ln(kl) - 2\mathrm{Ci}(2kl) + \mathrm{Ci}(4kl)]\cos(2kl) + 30[\mathrm{Si}(4kl) - 2\mathrm{Si}(2kl)]\sin(2kl) X_a(2kl) \tag{4.6.47}$$

$$= 60\mathrm{Si}(2kl) + 30[\mathrm{Ci}(4kl) - \ln(kl) - \gamma]\sin 2kl - 30\mathrm{Si}(4kl)\cos(2kl) \tag{4.6.48}$$

其中，$\gamma = 0.5772\cdots$为欧拉(Euler)常数。R_a 和 X_a 的值示于图 4.6-5。

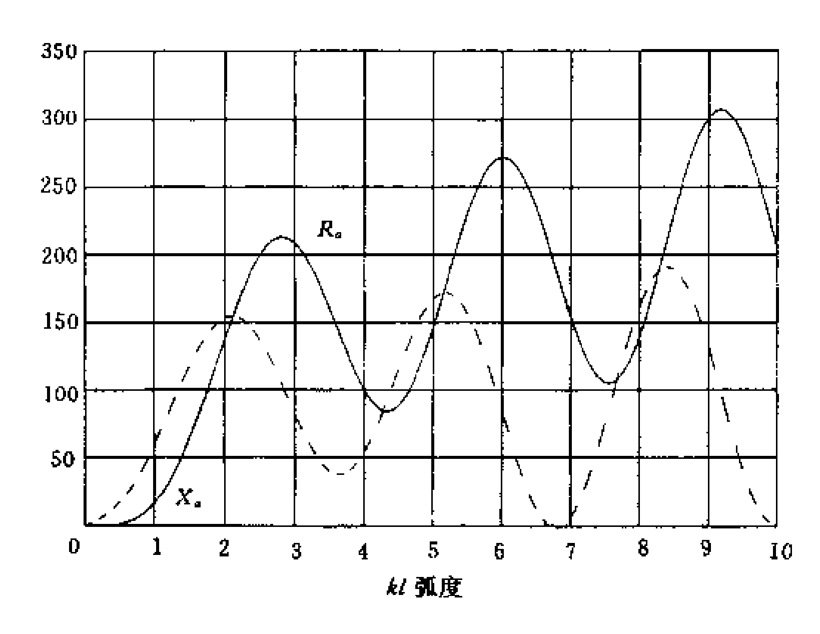


图 4.6-5 $Z_a = R_a - \mathrm{i}X_a$ 中的电阻和电抗分量

应该注意，尽管 $Z_a = R_a - \mathrm{i}X_a$ 不是关于锥角 θ_0 的方程，但是特性阻抗 Z_0 却是。从式(4.6.32)可以看出，一个双锥天线的输入阻抗 Z_i 是关于 θ_0 的方程。在上面的讨论中，将锥角限制得很小。对锥角 $\theta_0 = 2.7°$的天线其特性阻抗为 450 Ω，面对锥角 $\theta_0 = 0.027°$的天线其特性阻抗为 1000 Ω。在 $l/\lambda = 0.25$ 处，上述两个天线的输入阻抗 $Z_a(kl = \pi/2) \simeq (73.129 - \mathrm{i}153.66)$ Ω。对一个特定的 l，较细的天线的输入阻抗对不同频率引起的变化远比粗的天线要大。因此，对一个给定的 l，较粗的天线对频率的变化不很敏感，它比细天线更适合于宽频带的应用。

4.6.5 双锥天线问题的正解

在一般情况下，当 θ_0 不再被限定为很小，可以通过应用勒让德函数的正交特性得到双锥天线问题的正解。在天线和空气区域中场的表达式由式(4.6.24)和(4.6.19)给出。这时问题就化为通过边界条件匹配来确定系数 a_n 和 b_n。首先要注意，在天线区域式(4.6.24a)中的 H_ϕ 可以被写成

$$H_{\phi}(r=l)=\frac{Y_{1}V_{0}(l)}{2\pi l\sin\theta}+\frac{1}{2\pi}\sum_{u}a_{u}j_{u}(kl)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}T_{u}(\cos\theta) \tag{4.6.49}$$

等式两边同乘以 $\sin\theta(\mathrm{d}T_{u'}(\theta)/\mathrm{d}\theta)$，并在区间 $\theta_0\sim\pi-\theta_0$ 积分，得到

$$a_{u}=\frac{2\pi}{N_{u}j_{u}(kl)}\int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0}\sin\theta\mathrm{d}\theta H_{\phi}(r=l)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}T_{u}(\theta) \tag{4.6.50}$$

其中，考虑了如下关系

$$\int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0}\sin\theta\mathrm{d}\theta\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}T_{u}(\theta)\right]\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}T_{u'}(\theta)\right]=\begin{cases}0 & u\neq u'\\ N_{u} & u=u'\end{cases}$$

然而，由式(4.6.19a)有

$$H_{\phi}(r=l)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n_{\text{odd}}}b_{n}h_{n}^{(1)}(kl)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}P_{n}(\cos\theta) \tag{4.6.51}$$

将上式代入式(4.6.50)，得到一个线性方程组的无限形式

$$a_{u}=\sum_{n_{\text{odd}}}\alpha_{u,n}b_{n} \tag{4.6.52}$$

其中，

$$\alpha_{u,n}=\frac{h_{n}^{(1)}(kl)}{N_{u}j_{u}(kl)}\int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0}\sin\theta\mathrm{d}\theta\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}T_{u}(\cos\theta)\right]\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}P_{n}(\cos\theta)\right] \tag{4.6.53}$$

另一个与上面系数相关的方程系统，可以通过考虑在 $r=l$ 处的 E_θ 分量来得到。在空气区域中，由式(4.6.19c)得 $E_\theta(r=l)$，

$$lE_{\theta}(r=l)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}\omega\epsilon}\sum_{n_{\text{odd}}}b_{n}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[rh_{n}^{(1)}(kr)\right]\right\}_{r=l}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}P_{n}(\cos\theta) \tag{4.6.54}$$

将等式两边同乘以 $\sin\theta\mathrm{d}[P_{n'}(\cos\theta)]/\mathrm{d}\theta$，并在区间 $0\sim\pi$ 中积分，得到

$$b_{n}=\frac{2n(n+1)}{2n+1}\frac{2\pi\mathrm{i}\omega\epsilon}{\{\mathrm{d}[rh_{n}^{(1)}(kr)]/\mathrm{d}r\}_{r=l}}\int_{0}^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta lE_{\theta}(r=l)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}P_{n}(\cos\theta) \tag{4.6.55}$$

其中考虑了如下关系，

$$\int_{0}^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}P_{n}(\cos\theta)\right]\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}P_{n'}(\cos\theta)\right]=\begin{cases}\dfrac{2n+1}{2n(n+1)} & n=n'\\ 0 & n\neq n'\end{cases}$$

然而，由式(4.6.24c)有

$$lE_{\theta}(r=l)=\frac{\eta V_{0}(l)}{2\pi Z_{0}\sin\theta}+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}\omega\epsilon}\sum_{u}a_{u}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[rj_{u}(kr)\right]\right\}_{r=l}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}T_{u}(\theta) \tag{4.6.56}$$

对 $\theta_0<\theta<\pi-\theta_0$ 成立，其他区域中有 $E_\theta(r=l)=0$。

因此，将上式代入(4.6.55)式，得到，

$$b_{n}=\sum_{u}\beta_{n,u}a_{u}+K_{n}\frac{V_{0}(l)}{Z_{0}} \tag{4.6.57}$$

其中，

$$\beta_{n,u}=\frac{2n(n+1)}{2n+1}\frac{\{\mathrm{d}[rj_{u}(kr)]/\mathrm{d}r\}_{r=l}}{\{\mathrm{d}[rh_{n}^{(1)}(kr)]/\mathrm{d}r\}_{r=l}}\cdot\int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0}\mathrm{d}\theta\sin\theta\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}P_{n}(\cos\theta)\right]\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}T_{u}(\theta)\right] \tag{4.6.58}$$

$$K_n = \mathrm{i}\,\frac{4n(n+1)}{2n+1}\,\frac{k}{\{\mathrm{d}[rh_n^{(1)}(kr)]/\mathrm{d}r\}_{r=l}}P_n(\cos\theta_0) \tag{4.6.59}$$

所以,问题是可解的,因为系数 a_u 和 b_n 可以通过式(4.6.52)和(4.6.57)中的线性方程系统求得。一旦系数得到,终端导纳 Y_t 就可以容易地得到。首先,对式(4.6.49)从 $\theta_0 \sim \pi-\theta_0$ 积分,得到

$$Y_t = \frac{\eta l}{Z_0 V_0(l)}\int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0}\mathrm{d}\theta H_\phi(r=l) \tag{4.6.60}$$

其中特性阻抗 Z_0 由式(4.6.25)给出。然后,将式(4.6.51)代入上面的方程,可以得到

$$\begin{aligned} Y_t &\simeq \frac{-\eta}{Z_0 V_0(l)}\,\frac{1}{\pi}\sum_{n_{\text{odd}}} b_n h_n^{(1)}(kl)P_n(\cos\theta_0) \\ &= -\frac{120}{Z_0 V_0(l)}\,l\sum_{n_{\text{odd}}} b_n h_n^{(1)}(kl)P_n(\cos\theta_0) \end{aligned} \tag{4.6.61}$$

上述方程也可用来计算 Z_a,因为 $Z_a = Z_0^2 Y_t$。

习题

4.6.1 由球面限制的双锥天线的锥角趋向 $\pi/2$ 时,求模的阶数(即 u)的近似值。

4.6.2 考虑图 4.6-6 中所示的双锥天线,其锥面边界由 $\theta=\theta_0$ 到 $\theta=\pi-\theta_1$,且其天线区域中充满相对介电常数 ε 的电介质。

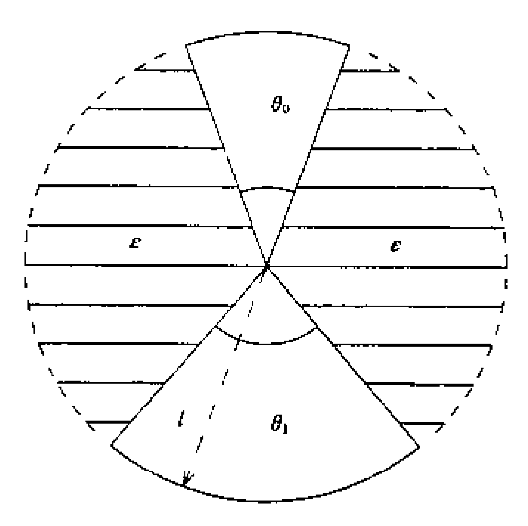


图 4.6-6 不对称双锥天线

(1)写出这个双锥天线的边界条件。

(2)求特征阻抗,并证明处于理想导体地面上的单锥天线的特征阻抗为 $\theta_0=\theta_1$ 时双锥天线特征阻抗的一半。

(3)求此双锥天线径向方向每单位长度上的电容和电感。

(4)求对小锥角 θ_0 和 θ_1 在天线区域中可以激励起的模式阶数(即 u)的近似值,证明答案可由 $u \simeq n+\Delta$ 给出,其中

$$\Delta \simeq -\frac{1}{2}\,\frac{\ln\left(\sin\dfrac{\theta_0}{2}\sin\dfrac{\theta_1}{2}\right)}{\ln\left(\sin\dfrac{\theta_0}{2}\right)\ln\left(\sin\dfrac{\theta_1}{2}\right)}$$

且 n 为奇数整数。

4.7　分层介质中的振子天线

4.7.1　积分方程法

本问题的几何结构示于图 4.7-1 中。坐标系的原点设置在旋转振子天线的位置上。振子天线可以是垂直磁振子(VMD),垂直电振子(VED),水平电振子(HED)或是水平磁振子(HMD)。在振子上面有 M 层介质,其分别位于 $z=d_1,d_2,\dots,d_M$ 处,在振子下面有 N 层介质,其分别位于 $z=d_0,d_{-1},\cdots,d_{-(N-1)}$处。首先假设所有分层区域中的介质都是各向同性的,在区域 l 中,可将介电常数和磁导率记为 ϵ_l 和 μ_l。注意:在区域 0 中的 ϵ_0 和 μ_0,它们不一定是自由空间中的介电常数和磁导率,自由空间中的介电常数和磁导率通常表示为 ε_o 和 μ_o。

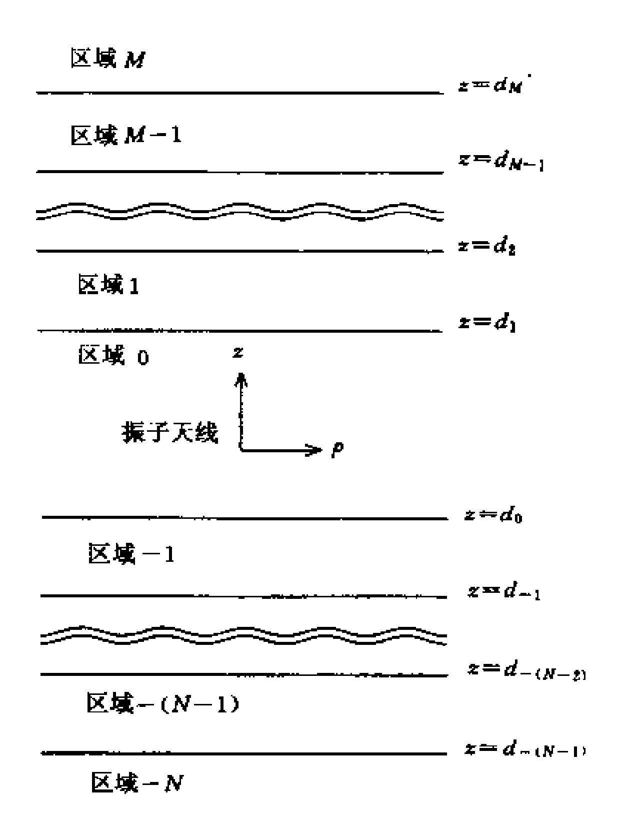


图 4.7-1　分层介质中的振子天线

波动方程的解可以被认为是许多 TE 和 TM 波分量的线性叠加。设 A_l 和 B_l 为 TM 波的幅度,C_l 和 D_l 为 TE 波的幅度。我们在区域 l 中得到如下解。

$$E_{lz}=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_\rho(A_l\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{lz}z}+B_l\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{lz}z})H_n^{(1)}(k_\rho\rho)C_n(\phi)\tag{4.7.1}$$

$$E_{l\rho}=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_\rho\frac{\mathrm{i}k_{lz}}{k_\rho}(A_l\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{lz}z}-B_l\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{lz}z})H_n^{(1)\prime}(k_\rho\rho)C_n(\phi)+\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_\rho\frac{\mathrm{i}\omega\mu_l}{k_\rho^2\rho}(C_l\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{lz}z}+D_l\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{lz}z})H_n^{(1)}(k_\rho\rho)S'_n(\phi)\tag{4.7.2}$$

$$E_{l\phi} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_\rho \frac{\mathrm{i}k_{lz}}{k_\rho^2 \rho}(A_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{lz}z} - B_l \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{lz}z}) H_n^{(1)}(k_\rho \rho) C_n'(\phi) +$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_\rho \frac{-\mathrm{i}\omega\mu_l}{k_\rho}(C_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{lz}z} - D_l \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{lz}z}) H_n^{(1)'}(k_\rho \rho) S_n(\phi) \tag{4.7.3}$$

$$H_{lz} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_\rho (C_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{lz}z} + D_l \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{lz}z}) H_n^{(1)}(k_\rho \rho) S_n(\phi) \tag{4.7.4}$$

$$H_{l\rho} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_\rho \frac{\mathrm{i}k_{lz}}{k_\rho}(C_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{lz}z} - D_l \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{lz}z}) H_n^{(1)'}(k_\rho \rho) S_n(\phi) +$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_\rho \frac{-\mathrm{i}\omega\epsilon_l}{k_\rho^2 \rho}(A_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{lz}z} + B_l \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{lz}z}) H_n^{(1)}(k_\rho \rho) C_n'(\phi) \tag{4.7.5}$$

$$H_{l\phi} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_\rho \frac{\mathrm{i}k_{lz}}{k_\rho^2 \rho}[C_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{lz}z} - D_l \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{lz}z}] H_n^{(1)}(k_\rho \rho) S_n'(\phi) +$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_\rho \frac{\mathrm{i}\omega\epsilon l}{k_\rho}(A_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{lz}z} + B_l \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{lz}z}) H_n^{(1)'}(k_\rho \rho) C_n(\phi) \tag{4.7.6}$$

在式(4.7.1)~(4.7.6)中，$H_n^{(1)}(k_\rho \rho)$为第一类 n 阶汉开尔函数，$H_n^{(1)'}(k_\rho \rho)$为 $H_n^{(1)}(\xi)$对 ξ 的导数　与 ϕ 相关的函数 $S_n(\phi)$和 $C_n(\phi)$，以及汉开尔函数的阶数都由天线振子的结构决定。作为被积函数的截面场量 $\boldsymbol{E}_s = \hat{\boldsymbol{\rho}} E_\rho + \hat{\boldsymbol{\phi}} E_\phi$ 和 $\boldsymbol{H}_s = \hat{\boldsymbol{\rho}} H_\rho + \hat{\boldsymbol{\phi}} H_\phi$ 是由径向场量 E_z 和 H_z 导出的。设

$$E_z = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_\rho E_z(k_\rho) \tag{4.7.7}$$

$$H_z = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_\rho H_z(k_\rho) \tag{4.7.8}$$

由无源区域中的麦克斯韦方程组可有

$$\boldsymbol{E}_s(k_\rho) = \frac{1}{k_\rho^2}\left[\nabla_s \frac{\partial}{\partial z} E_z(k_\rho) + \mathrm{i}\omega\mu_l \nabla_s \times \boldsymbol{H}_z(k_\rho)\right] \tag{4.7.9}$$

$$\boldsymbol{H}_s(k_\rho) = \frac{1}{k_\rho^2}\left[\nabla_s \frac{\partial}{\partial z} H_z(k_\rho) - \mathrm{i}\omega\epsilon_l \nabla_s \times \boldsymbol{E}_z(k_\rho)\right] \tag{4.7.10}$$

介质交界处的边界条件要求切向电场分量在所有 ρ 和 ϕ 处连续。在 $z = d_l$ 处可得到

$$k_{lz}(A_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{lz}d_l} - B_l \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{lz}d_l}) = k_{(l-1)z}(A_{l-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{(l-1)z}d_l} - B_{l-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{(l-1)z}d_l}) \tag{4.7.11}$$

$$\varepsilon_l(A_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{lz}d_l} + B_l \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{lz}d_l}) = \varepsilon_{(l-1)}(A_{l-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{(l-1)z}d_l} + B_{l-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{(l-1)z}d_l}) \tag{4.7.12}$$

$$k_{lz}(C_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{lz}d_l} - D_l \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{lz}d_l}) = k_{(l-1)z}(C_{l-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{(l-1)z}d_l} - D_{l-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{(l-1)z}d_l}) \tag{4.7.13}$$

$$\mu_l(C_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{lz}d_l} + D_l \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{lz}d_l}) = \mu_{(l-1)}(C_{l-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{(l-1)z}d_l} + D_{l-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{(l-1)z}d_l}) \tag{4.7.14}$$

由于总共有 $M+N$ 个边界，因而由上面方程组就得到 $4(M+N)$个方程。一共有 $M+N+1$ 个区域。在区域 M 和 $-N$ 中，由于没有波来自无限远处，则有 $A_M = C_M = 0$ 和 $B_{-N} = D_{-N} = 0$，这样就有 $4(M+N+1)-4=4(M+N)$个未知量，正好有 $4(M+N)$个方程来求解。由于波的

幅度与区域 0 中的振子天线的激励幅度和结构相关，因此应该对区域 0 中的解给予特别的重视。

当没有分层的介质存在时，在无边界的介质 ϵ_0 和 μ_0 中的振子天线的辐射场是大家熟知的。其解可以用 Sommerfeld 恒等式从球坐标系转换为圆柱坐标系

$$\frac{e^{ik_0 r}}{r} = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dk_\rho \frac{k_\rho}{k_{0z}} H_0^{(1)}(k_\rho \rho) e^{ik_{0z}|z|} \tag{4.7.15}$$

考虑到 4 种不同的振子结构，可有

(1) 垂直电振子(VED)

$$E_z = \int_{-\infty}^{\infty} dk_\rho E_{ved} \begin{pmatrix} e^{ik_{0z}z} \\ e^{-ik_{0z}z} \end{pmatrix} H_0^{(1)}(k_\rho \rho) \qquad \begin{matrix} z \geqslant 0 \\ z \leqslant 0 \end{matrix} \tag{4.7.16}$$

$$H_z = 0 \tag{4.7.17}$$

其中，

$$E_{ved} = -\frac{Ilk_\rho^3}{8\pi\omega\epsilon_0 k_{0z}} \tag{4.7.18}$$

式中 Il 为电偶极矩。

(2) 水平电振子(HED)

$$E_z = \int_{-\infty}^{\infty} dk_\rho \begin{pmatrix} E_{hed} e^{ik_{0z}z} \\ -E_{hed} e^{-ik_{0z}z} \end{pmatrix} H_1^{(1)}(k_\rho \rho)\cos\phi \qquad \begin{matrix} z \geqslant 0 \\ z \leqslant 0 \end{matrix} \tag{4.7.19}$$

$$H_z = \int_{-\infty}^{\infty} dk_\rho H_{hed} \begin{pmatrix} e^{ik_{0z}z} \\ e^{-ik_{0z}z} \end{pmatrix} H_1^{(1)}(k_\rho \rho)\sin\phi \qquad \begin{matrix} z \geqslant 0 \\ z \leqslant 0 \end{matrix} \tag{4.7.20}$$

其中，

$$E_{hed} = i\frac{Il k_\rho^2}{8\pi\omega\epsilon_0} \tag{4.7.21}$$

$$H_{hed} = i\frac{Il k_\rho^2}{8\pi k_{0z}} \tag{4.7.22}$$

(3) 垂直磁振子(VMD)

$$E_z = 0 \tag{4.7.23}$$

$$H_z = \int_{-\infty}^{\infty} dk_\rho H_{vmd} \begin{Bmatrix} e^{ik_{0z}z} \\ e^{-ik_{0z}z} \end{Bmatrix} H_0^{(1)}(k_\rho \rho) \qquad \begin{matrix} z \geqslant 0 \\ z \leqslant 0 \end{matrix} \tag{4.7.24}$$

其中，

$$H_{vmd} = -i\frac{IAk_\rho^3}{8\pi k_{0z}} \tag{4.7.25}$$

式中 IA 为磁偶极矩。

(4) 水平磁振子(HMD)

$$E_z = \int_{-\infty}^{\infty} dk_\rho E_{hmd} \begin{pmatrix} e^{ik_{0z}z} \\ e^{-ik_{0z}z} \end{pmatrix} H_1^{(1)}(k_\rho \rho)\sin\phi \qquad \begin{matrix} z \geqslant 0 \\ z \leqslant 0 \end{matrix} \tag{4.7.26}$$

$$H_z = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_\rho \begin{pmatrix} H_{\text{hmd}} e^{ik_{0z}z} \\ -H_{\text{hmd}} e^{-ik_{0z}z} \end{pmatrix} H_1^{(1)}(k_\rho \rho)\cos\phi \qquad \begin{matrix} z \geq 0 \\ z \leq 0 \end{matrix} \tag{4.7.27}$$

其中，

$$E_{\text{hmd}} = \frac{IA\omega\mu_0 k_\rho^2}{8\pi k_{0z}} \tag{4.7.28}$$

$$H_{\text{hmd}} = -\frac{IAk_\rho^2}{8\pi} \tag{4.7.29}$$

注意，这里由磁偶极子产生的场与电偶极子产生的相应场量的二元对应关系。磁偶极子产生的场可通过下列替换得到 $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{H}, \boldsymbol{H} \to -\boldsymbol{E}, \mu_0 \rightleftharpoons \varepsilon_0$ 以及 $Il \to i\omega\mu_0 IA$。需特别注意，在 $z=0$ 处，下列场量将会消失。

(1)VED

$$E_\rho = 0 \tag{4.7.30}$$

(2)HED

$$E_z = H_\rho = H_\phi = 0 \tag{4.7.31}$$

(3)VMD

$$H_\rho = 0 \tag{4.7.32}$$

(4)HMD

$$H_z = E_\rho = E_\phi = 0 \tag{4.7.33}$$

这可以从式(4.7.9)~(4.7.10)看出，且注意由式(4.7.15)有

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{ik_0 r}}{r} = 0 \qquad z = 0 \tag{4.7.34}$$

在分层介质存在时，可以通过对4种不同形式的振子和是否有 $z>0$ 与 $z<0$ 来识别 A_0 与 B_0，从而写出区域0中的场。在区域0中，有必要从 $z<0$ 处的波幅来判断 $z \geq 0$ 处的波幅。在 $z \geq 0$ 处，我们使用 A_{0+}, B_{0+}, C_{0+} 和 D_{0+}；在 $z<0$ 处，我们使用 A_{0-}, B_{0-}, C_{0-} 和 D_{0-}。分析上述4种情况如下。

(1)VED

$$\begin{cases} A_{0+} = A_{\text{ved}} + E_{\text{ved}} & A_{0-} = A_{\text{ved}} \\ B_{0+} = B_{\text{ved}} & B_{0-} = B_{\text{ved}} + E_{\text{ved}} \\ C_{0+} = D_{0+} = C_{0-} = D_{0-} = 0 \end{cases} \tag{4.7.35}$$

其中，A_{ved} 和 B_{ved} 代表了分层介质的贡献，需要由边界条件来确定。

(2)HED

$$\begin{cases} A_{0+} = A_{\text{hed}} + E_{\text{hed}} & A_{0-} = A_{\text{hed}} \\ B_{0+} = B_{\text{hed}} & B_{0-} = B_{\text{hed}} - E_{\text{hed}} \\ C_{0+} = C_{\text{hed}} + H_{\text{hed}} & C_{0-} = C_{\text{hed}} \\ D_{0+} = D_{\text{hed}} & D_{0-} = D_{\text{hed}} + H_{\text{hed}} \end{cases} \tag{4.7.36}$$

其中，$A_{\text{hed}}, B_{\text{hed}}, C_{\text{hed}}$ 和 D_{hed} 代表了分层介质的贡献，需要由边界条件来确定。

(3)VMD

$$\begin{cases} A_{0+} = B_{0+} = A_{0-} = B_{0-} = 0 \\ C_{0+} = C_{\text{vmd}} + H_{\text{vmd}} & C_{0-} = C_{\text{vmd}} \\ D_{0+} = D_{\text{vmd}} & D_{0-} = D_{\text{vmd}} + H_{\text{vmd}} \end{cases} \tag{4.7.37}$$

其中,C_{vmd}和 D_{vmd}代表了分层介质的贡献,需要由边界条件来确定。

(4)HMD

$$\begin{cases} A_{0+} = A_{\text{hmd}} + E_{\text{hmd}} \\ B_{0+} = B_{\text{hmd}} \\ C_{0+} = C_{\text{hmd}} + H_{\text{hmd}} D_{0+} = D_{\text{hmd}} \end{cases} \qquad \begin{aligned} A_{0-} &= A_{\text{hmd}} \\ B_{0-} &= B_{\text{hmd}} + E_{\text{hmd}} \\ C_{0-} &= C_{\text{hmd}} \\ D_{0-} &= D_{\text{hmd}} - H_{\text{hmd}} \end{aligned} \tag{4.7.38}$$

其中,A_{hmd},B_{hmd},C_{hmd}和 D_{hmd}代表了分层介质的贡献,需要由边界条件来确定。将有振子存在的区域0中的场表示为无边界区域中振子初始激励与分层介质中无源情况的叠加。区域0中总的波幅度在 $z\geqslant 0$ 处为 A_{0+}, B_{0+}, C_{0+}和 D_{0+},在 $z\leqslant 0$ 处为 A_{0-},B_{0-},C_{0-}和 D_{0-}。很容易证明它们在 $z=0$ 处满足边界条件,只需回顾一下对初始激励由式(4.7.30)~(4.7.33)中所列的在 $z=0$ 处消失的场分量即可。

现在来确定区域0中的波的幅度。对TM波式(4.7.11)和(4.7.12)可通过将 A_l 和 B_l 表示为 A_{l-1}和 B_{l-1},或将 A_{l-1}和 B_{l-1}表示为 A_l 和 B_l 来求解。将 A_l 和 B_l 表示为 A_{l-1}和 B_{l-1},有

$$A_l e^{ik_{lz}d_l} = \frac{1}{2}\left[\frac{\varepsilon_{l-1}}{\varepsilon_l} + \frac{k_{(l-1)z}}{k_{lz}}\right]\cdot\left[A_{l-1}e^{ik_{(l-1)z}d_l} + R_{l(l-1)}^{\text{TM}} B_{l-1} e^{-ik_{(l-1)z}d_l}\right] \tag{4.7.39a}$$

$$B_l e^{-ik_{lz}d_l} = \frac{1}{2}\left[\frac{\varepsilon_{l-1}}{\varepsilon_l} + \frac{k_{(l-1)z}}{k_{lz}}\right]\cdot\left[R_{l(l-1)}^{\text{TM}} A_{l-1}e^{ik_{(l-1)z}d_l} + B_{l-1} e^{-ik_{(l-1)z}d_l}\right] \tag{4.7.39b}$$

将 A_{l-1}和 B_{l-1}表示为 A_l 和 B_l,有

$$A_{l-1} e^{ik_{(l-1)z}d_l} = \frac{1}{2}\left[\frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_{l-1}} + \frac{k_{lz}}{k_{(l-1)z}}\right]\cdot\left[A_l e^{ik_{lz}d_l} + R_{(l-1)l}^{\text{TM}} B_l e^{-ik_{lz}d_l}\right] \tag{4.7.40a}$$

$$B_{l-1} e^{-ik_{(l-1)z}d_l} = \frac{1}{2}\left[\frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_{l-1}} + \frac{k_{lz}}{k_{(l-1)z}}\right]\cdot\left[R_{(l-1)l}^{\text{TM}} A_l e^{ik_{lz}d_l} + B_l e^{-ik_{lz}d_l}\right] \tag{4.7.40b}$$

在式(4.7.39)和(4.7.40)中,菲涅耳反射系数为

$$R_{(l-1)l}^{\text{TM}} = \frac{1 - \varepsilon_{l-1}k_{lz}/\varepsilon_l k_{(l-1)z}}{1 + \varepsilon_{l-1}k_{lz}/\varepsilon_l k_{(l-1)z}} = -R_{l(l-1)}^{\text{TM}} \tag{4.7.41}$$

类似的推导过程可以得到TE波的解。其结果与式(4.7.39)~(4.7.41)呈二元对称性,如用 C 替代A,D 替代B,且 ε 和μ 互换。

在 $z\geqslant 0$ 处,注意有 $B_M = D_M = 0$。设 $l=0$,得到用连分式表示的反射系数 $R_{0+}^{\text{TM}} = R_{0+}/A_{0+}$ 以及 $R_{0+}^{\text{TE}} = D_{0+}/C_{0+}$。有

$$R_{0+}^{\text{TM}} = \frac{B_{0+}}{A_{0+}} = \frac{e^{i2k_{0z}d_1}}{R_{01}^{\text{TM}}} + \frac{\left[1-(1/R_{01}^{\text{TM}})^2\right]e^{i2(k_{0z}+k_{1z})d_1}}{(1/R_{01}^{\text{TM}})e^{i2k_{1z}d_1} + (B_1/A_1)} \tag{4.7.42}$$

$$R_{0+}^{\text{TE}} = \frac{D_{0+}}{C_{0+}} = \frac{e^{i2k_{0z}d_1}}{R_{01}^{\text{TE}}} + \frac{\left[1-(1/R_{01}^{\text{TE}})^2\right]e^{i2(k_{0z}+k_{1z})d_1}}{(1/R_{01}^{\text{TE}})e^{i2k_{1z}d_1} + (D_1/C_1)} \tag{4.7.43}$$

其中，B_1/A_1 和 D_1/C_1 可表示为 B_2/A_2 和 D_2/C_2 直至区域 M，在区域 M 中有 $B_M/A_M = 0 = D_M/C_M$。

在 $z \leqslant 0$ 处，注意到有 $A_{-N} = C_{-N} = 0$。设 $l = 0$，可得到用连分式表示的反射系数 $R_{0-}^{TM} = A_{0-}/B_{0-}$ 以及 $R_{0-}^{TE} = C_{0-}/D_{0-}$。有

$$R_{0-}^{TM} = \frac{A_{0-}}{B_0} = \frac{e^{-i2k_{0z}d_0}}{R_{0(-1)}^{TM}} + \frac{[1-(1/R_{0(-1)}^{TM})^2]e^{-i2(k_{0z}+k_{-1z})d_0}}{(1/R_{0(-1)}^{TM})e^{-i2k_{-1z}d_0} + (A_{-1}/B_{-1})} \tag{4.7.44}$$

$$R_{0-}^{TE} = \frac{C_{0-}}{D_{0-}} = \frac{e^{-i2k_{0z}d_0}}{R_{0(-1)}^{TE}} + \frac{[1-(1/R_{0(-1)}^{TE})^2]e^{-i2(k_{0z}+k_{-1z})d_0}}{(1/R_{0(-1)}^{TE})e^{-i2k_{-1z}d_0} + (C_{-1}/D_{-1})} \tag{4.7.45}$$

其中，$A_{-1}/B_{-1}C_{-1}/D_{-1}$和可表示为 A_{-2}/B_{-2}和 C_{-2}/D_{-2}直至区域 $-N$，在区域 $-N$ 中有 $A_{-N}/B_{-N} = 0$ 以及 $C_{-N}/D_{-N} = 0$。

一旦区域 0 中的波幅已知，其他区域中的波幅就可以通过传播矩阵确定，其可以容易地通过式(4.7.39)、(4.7.40)和 TE 波的方程组得到。现在来求区域 0 中的波幅。

(1) VED：从式(4.7.35)，可以得到

$$R_{0+}^{TM} = \frac{B_{0+}}{A_{0+}} = \frac{B_{ved}}{A_{ved} + E_{ved}} \tag{4.7.46a}$$

$$R_{0-}^{TM} = \frac{A_{0-}}{B_{0-}} = \frac{A_{ved}}{B_{ved} + E_{ved}} \tag{4.7.46b}$$

解出 A_{ved}和 B_{ved}并代入式(4.7.35)中，得到

$$A_{0+} = \frac{1 + R_{0-}^{TM}}{1 - R_{0+}^{TM}R_{0-}^{TM}} E_{ved} \tag{4.7.47a}$$

$$B_{0+} = \frac{R_{0+}^{TM}(1 + R_{0-}^{TM})}{1 - R_{0+}^{TM}R_{0-}^{TM}} E_{ved} \tag{4.7.47b}$$

$$A_{0-} = \frac{R_{0-}^{TM}(1 + R_{0+}^{TM})}{1 - R_{0+}^{TM}R_{0-}^{TM}} E_{ved} \tag{4.7.47c}$$

$$B_{0-} = \frac{1 + R_{0+}^{TM}}{1 - R_{0+}^{TM}R_{0-}^{TM}} E_{ved} \tag{4.7.47d}$$

(2) HED：用同样的方法，从式(4.7.36)得到

$$A_{0+} = \frac{1 - R_{0-}^{TM}}{1 - R_{0+}^{TM}R_{0-}^{TM}} E_{hed} \tag{4.7.48a}$$

$$B_{0+} = \frac{R_{0+}^{TM}(1 - R_{0-}^{TM})}{1 - R_{0+}^{TM}R_{0-}^{TM}} E_{hed} \tag{4.7.48b}$$

$$C_{0+} = \frac{1 + R_{0-}^{TE}}{1 - R_{0+}^{TE}R_{0-}^{TE}} H_{hed} \tag{4.7.48c}$$

$$D_{0+} = \frac{R_{0+}^{TE}(1 + R_{0-}^{TE})}{1 - R_{0+}^{TE}R_{0-}^{TE}} H_{hed} \tag{4.7.48d}$$

$$A_{0-} = -\frac{R_{0-}^{TM}(1 - R_{0+}^{TM})}{1 - R_{0+}^{TM}R_{0-}^{TM}} E_{hed} \tag{4.7.49a}$$

$$B_{0-} = -\frac{1 - R_{0+}^{TM}}{1 - R_{0+}^{TM}R_{0-}^{TM}} E_{hed} \tag{4.7.49b}$$

$$C_{0-} = \frac{R_{0-}^{\mathrm{TE}}(1 + R_{0+}^{\mathrm{TE}})}{1 - R_{0+}^{\mathrm{TE}} R_{0}^{\mathrm{TE}}} H_{\mathrm{hed}} \tag{4.7.49c}$$

$$D_{0-} = \frac{1 + R_{0+}^{\mathrm{TE}}}{1 - R_{0+}^{\mathrm{TE}} R_{0-}^{\mathrm{TE}}} H_{\mathrm{hed}} \tag{4.7.49d}$$

(3) VMD：从式(4.7.37)得到

$$C_{0+} = \frac{1 + R_{0-}^{\mathrm{TE}}}{1 - R_{0+}^{\mathrm{TE}} R_{0-}^{\mathrm{TE}}} H_{\mathrm{vmd}} \tag{4.7.50a}$$

$$D_{0+} = \frac{R_{0+}^{\mathrm{TE}}(1 + R_{0-}^{\mathrm{TE}})}{1 - R_{0+}^{\mathrm{TE}} R_{0-}^{\mathrm{TE}}} H_{\mathrm{vmd}} \tag{4.7.50b}$$

$$C_{0-} = \frac{R_{0-}^{\mathrm{TE}}(1 + R_{0+}^{\mathrm{TE}})}{1 - R_{0+}^{\mathrm{TE}} R_{0-}^{\mathrm{TE}}} H_{\mathrm{vmd}} \tag{4.7.50c}$$

$$D_{0-} = -\frac{1 + R_{0+}^{\mathrm{TE}}}{1 - R_{0+}^{\mathrm{TE}} R_{0-}^{\mathrm{TE}}} H_{\mathrm{vmd}} \tag{4.7.50d}$$

(4) HMD：从式(4.7.38)得到

$$A_{0+} = -\frac{1 + R_{0-}^{\mathrm{TM}}}{1 - R_{0+}^{\mathrm{TM}} R_{0-}^{\mathrm{TM}}} E_{\mathrm{hmd}} \tag{4.7.51a}$$

$$B_{0+} = \frac{R_{0+}^{\mathrm{TM}}(1 + R_{0-}^{\mathrm{TM}})}{1 - R_{0+}^{\mathrm{TM}} R_{0-}^{\mathrm{TM}}} E_{\mathrm{hmd}} \tag{4.7.51b}$$

$$C_{0+} = -\frac{1 - R_{0-}^{\mathrm{TE}}}{1 - R_{0+}^{\mathrm{TE}} R_{0-}^{\mathrm{TE}}} H_{\mathrm{hmd}} \tag{4.7.51c}$$

$$D_{0+} = \frac{R_{0+}^{\mathrm{TE}}(1 - R_{0-}^{\mathrm{TE}})}{1 - R_{0+}^{\mathrm{TE}} R_{0-}^{\mathrm{TE}}} H_{\mathrm{hmd}} \tag{4.7.51d}$$

$$A_{0-} = \frac{R_{0-}^{\mathrm{TM}}(1 + R_{0+}^{\mathrm{TM}})}{1 - R_{0+}^{\mathrm{TM}} R_{0-}^{\mathrm{TM}}} E_{\mathrm{hmd}} \tag{4.7.52a}$$

$$B_{0-} = -\frac{1 + R_{0+}^{\mathrm{TM}}}{1 - R_{0+}^{\mathrm{TM}} R_{0-}^{\mathrm{TM}}} E_{\mathrm{hmd}} \tag{4.7.52b}$$

$$C_{0-} = -\frac{R_{0-}^{\mathrm{TE}}(1 - R_{0+}^{\mathrm{TE}})}{1 - R_{0+}^{\mathrm{TE}} R_{0-}^{\mathrm{TE}}} H_{\mathrm{hmd}} \tag{4.7.52c}$$

$$D_{0-} = -\frac{1 - R_{0+}^{\mathrm{TE}}}{1 - R_{0+}^{\mathrm{TE}} R_{0-}^{\mathrm{TE}}} H_{\mathrm{hmd}} \tag{4.7.52d}$$

电磁场分量的解，可通过将上述各值代入式(4.7.1)～(4.7.6)中的波幅得到。

4.7.2 回路积分法

柯西定理

回路积分法中最为重要和实用的定理就是柯西(Cauchy)定理。考虑一个复变函数

$$f(\alpha) = f_{\mathrm{R}}(\alpha) + \mathrm{i} f_{\mathrm{I}}(\alpha) \tag{4.7.53}$$

其变量

$$\alpha = \alpha_R + i\alpha_I \tag{4.7.54}$$

也为复数。其中 $f_R(\alpha)$,$f_I(\alpha)$,α_R,和 α_I 都是实数。假设 $f(\alpha)$是解析的,即它的导线在复平面 α 中的一个区域 D 上存在。D 的边界线围成了一条回路 C,如图 4.7-2 所示。柯西(Cauchy)定理即可陈述为沿回路 C 对$f(\alpha)$的积分为 0,

$$\oint_C d\alpha f(\alpha) = 0 \tag{4.7.55}$$

积分的方向是这样定义的,当沿着积分方向行走时,区域 D 总是在左手边。例如,考虑如下积分的值:

$$I = \int_0^\infty d\alpha \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

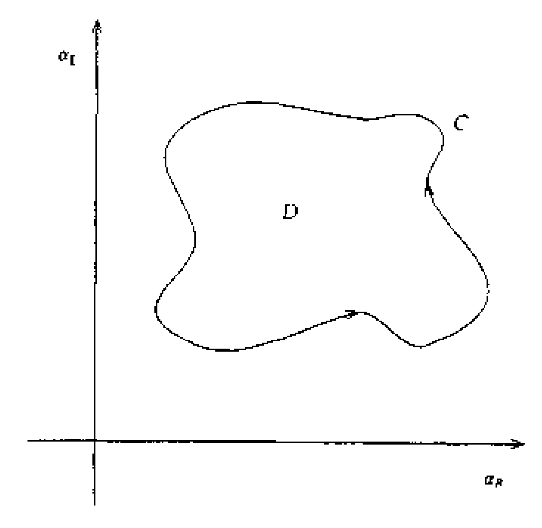


图 4.7-2 柯西(Cauchy)定理的积分回路

图 4.7-3 积分路径

将 $\sin\alpha$ 用其指数形式表示,有

$$I = \frac{1}{2i}\int_0^\infty d\alpha\left(\frac{e^{i\alpha}}{\alpha} - \frac{e^{-i\alpha}}{\alpha}\right) = \lim_{\delta\to 0}\left(\int_\delta^\infty d\alpha \frac{e^{i\alpha}}{2i\alpha} + \int_{-\infty}^{-\delta} d\alpha \frac{e^{i\alpha}}{2i\alpha}\right)$$

回路 C 的选择如图 4.7-3 所示,为 C_R 和实轴的负半边及 C_δ 和实轴的正半边,

$$I = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ R\to\infty}}\left\{\oint_C - \int_{C_\delta} - \int_{C_R}\right\} d\alpha \frac{e^{i\alpha}}{2i\alpha} \tag{4.7.56}$$

其中,$\alpha = \alpha_R + i\alpha_I$。根据柯西定理,由于 $e^{i\alpha}/\alpha$ 在区域中和在 C 上都是解析的,式中第一项积分应该为零。第三项积分在 $R\to\infty$ 时,考虑到前面曾经用到的 Jordan 的 Lemma 定理(参考习题 4.7.4),也应该逐渐消失。第二项积分是惟一有贡献的一项。将 α 变换为极坐标 $\alpha = \delta e^{i\phi}$,因此得到

$$I = -\frac{1}{2}\lim_{\delta\to 0}\int_\pi^0 d\phi \exp(i\delta e^{i\phi}) = -\frac{1}{2}\int_\pi^0 d\phi = \frac{\pi}{2} \tag{4.7.57}$$

注意,柯西定理的前提为被积函数在区域上是解析的。当区域中存在有奇点时,必须对它们单独考虑。将函数 $f(\alpha)$延伸至一个奇点 α_0,

$$f(\alpha) = \sum_{n=0}^\infty a_n(\alpha - \alpha_0)^n + \sum_{n=1}^\infty \frac{a_{-n}}{(\alpha - \alpha_0)^n} \tag{4.7.58}$$

根据柯西定理,第一项求和对积分无贡献,因为其是解析的。为了对第二项积分,首先将原先的回路 C_0 变为包含 α_0 的半径为 δ 的一个小的圆形回路 C(见图 4.7-4),并令

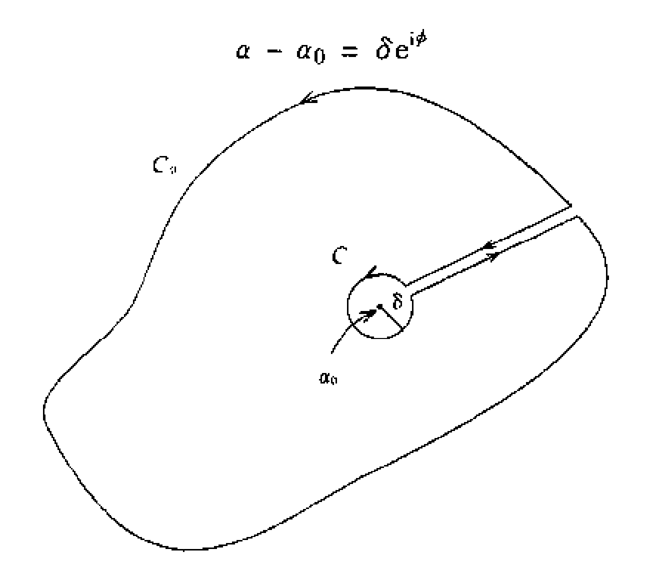


图 4.7-4 用于证明留数定理的积分路径

由柯西定理,可以得到

$$\oint_{C_0} \mathrm{d}\alpha f(\alpha) - \oint_C \mathrm{d}\alpha f(\alpha) = 0$$

由于两条方向相反的直线积分相互抵消,所以式中省略。这样原先的积分值就等于沿 C 的积分,有

$$\oint_C \mathrm{d}\alpha f(\alpha) = \mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{\delta^{n-1}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-n)\phi}$$

显然,所有 $n=1$ 的项都等于 0。因此可得到留数定理

$$\oint_C \mathrm{d}\alpha f(\alpha) = 2\pi \mathrm{i} a_{-1} \tag{4.7.59}$$

由于展开系数 a_{-1}是积分后剩下的惟一系数, a_{-1}被称为留数。

函数的留数可以通过多种方式来确定。如果 $f(\alpha)$具有一个极点,则除 a_{-1}以外的所有 a_{-n}都趋于 0。有

$$a_{-1} = \lim_{\alpha \to \alpha_0} [(\alpha - \alpha_0) f(\alpha)] \tag{4.7.60}$$

如果具有一个 m 阶的极点,则所有 a_{-m}以后的各项都趋于零,即对 $l>m$ 有 $a_{-1}=0$,

$$f(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\alpha - \alpha_0)^n + \frac{a_{-1}}{(\alpha - \alpha_0)} + \cdots + \frac{a_{-m}}{(\alpha - \alpha_0)^m}$$

由此得到

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{\alpha \to \alpha_0} \left[\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}\alpha^{m-1}} (\alpha - \alpha_0)^m f(\alpha) \right] \tag{4.7.61}$$

对基本奇点,可以通过已知的级数展开求得留数。例如,$\exp(-1/\alpha)$的留数是 -1。

作为应用留数定理的一个例子,再次考虑求积分

$$I = \int_0^{\infty} \mathrm{d}\alpha \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

可选择如图 4.7-5 所示的从外面包含极点 $\alpha=0$ 的路径来取代图 4.7-3 所示的路径。这一回路就包含了该极点,其留数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}/2\mathrm{i}\alpha$ 等于 $1/2\mathrm{i}$。这样就有

$$I = \lim_{\substack{\delta \to 0 \\ R \to \infty}} \left\{ \oint_C - \int_{C_\delta} - \int_{C_R} \right\} \mathrm{d}\alpha \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{2\mathrm{i}\alpha}$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{2i}\right) - \lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} d\alpha\, \frac{e^{i\alpha}}{2i\alpha} = \pi - \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi} d\phi = \frac{\pi}{2}$$

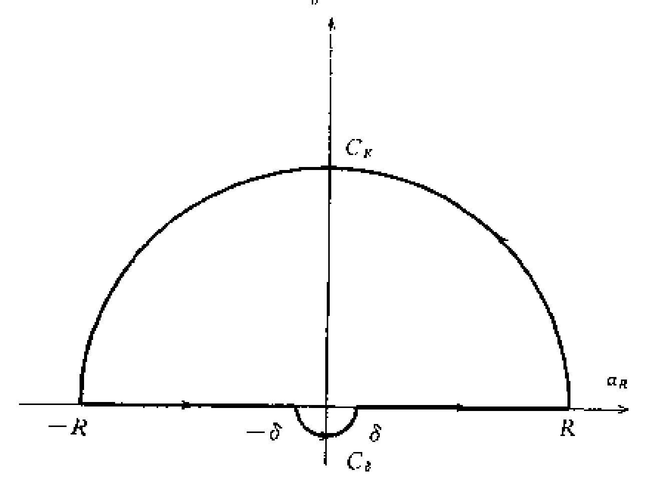


图 4.7-5 一个包括极点 $\alpha=0$ 的封闭回路

一个多值函数的留数决定于其奇点位置处相应的 Riemann 层。为了说明多值函数和其相应的 Riemann 层，考虑简单函数 $f(\alpha)=\sqrt{\alpha}$。这个函数是双值的，因为假如 $\alpha=1=e^{i2m\pi}$，$f(\alpha)=e^{im\pi}$，其对应 $+1$ 或 -1，到底是 $+1$ 还是 -1 决定于 m 是奇数还是偶数。还可看到，当 $\alpha=0$ 时，在其周围有可能定义一个单值函数区域。点 $\alpha=0$ 被称为支点，它是在极点和基本奇点之外的另外一种奇点，其导数也不存在。为了使这个函数变为单值的，我们定义两个 Riemann 层，上层为 $4m\pi\leqslant\phi\leqslant 2(2m+1)\pi$，底层为 $2(2m+1)\pi\leqslant\phi\leqslant 4(m+1)\pi$，其中 $m=0,1,2,\cdots$。为了分离这两个 Riemann 层，在积分回路中的正 α_R 轴上引入一个支点切口，如图 4.7-6 所示，它的形状如同一个尖辟，当 $0<\phi<2\pi$ 时，位于上 Riemann 层；当 $2\pi<\phi<4\pi$ 时，位于下 Riemann 层，并且当 $4\pi<\phi<6\pi$ 时，又回到上 Riemann 层。应该指出，完全可以用不同的方式定义一个支点切口，从而得到一个完全不同的 Riemann 分层。比如，可以选择 α_R 的负轴作为切口，这样上 Riemann 层就在 $(4m-1)\pi<\phi<(4m+1)\pi$ 之间，下 Riemann 层就在 $(4m+1)\pi<\phi<(4m+3)\pi$ 之间。

例如，求下面函数的留数，

$$f(\alpha) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}$$

注意，这里有一个极点位于 $\alpha=-1$，一个支点位于 $\alpha=0$。可选择如图 4.7-6 所示的支点切口，与其不同的地方只是这时在 $\alpha=-1$ 处多了一个极点。在上 Riemann 层，可求得

$$\text{Res.} = \lim_{\alpha\to -1}\sqrt{\alpha} = e^{i(4m+1)\pi/2} = i$$

在下 Riemann 层有，

$$\text{Res.} = \lim_{\alpha\to -1}\sqrt{\alpha} = e^{i(4m+3)\pi/2} = -i$$

如果 $f(\alpha)$ 在由回路 C 包围的区域 D 上解析，则由留数定理，在一个平常点 α_0 处的函数可用积分表示为

$$f(\alpha_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\alpha)}{(\alpha-\alpha_0)}d\alpha \tag{4.7.62}$$

这就是柯西(Cauchy)积分公式。注意，由 Leibnitz 微分法则，对式(4.7.62)还可有

$$f^{(n)}(\alpha_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\alpha)}{(\alpha-\alpha_0)^{n+1}}d\alpha$$

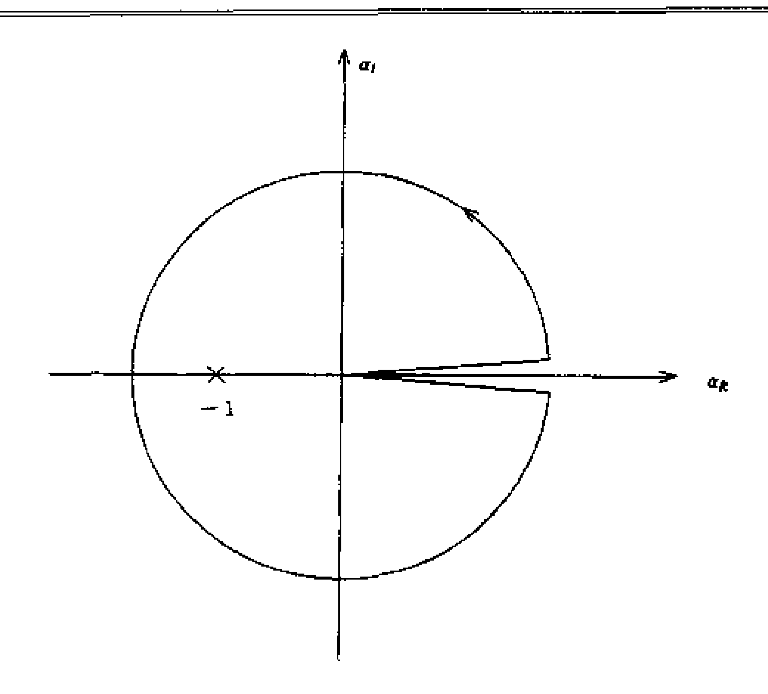


图 4.7-6 具有一个支点切口的积分回路

再举一个例子,推导线性、时间色散介质中负介电常数实部和虚部之间的 Kramers-Kronig 关系(即因果关系条件)。$\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 之间的线性关系可写为

$$\boldsymbol{D}(t) = \varepsilon_0\boldsymbol{E}(t) + \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}\tau\varepsilon_0\xi_e(t-\tau)\boldsymbol{E}(\tau)$$

$$= \varepsilon_0\boldsymbol{E}(t) + \varepsilon_0\int_0^{\infty} \mathrm{d}\tau\xi_e(\tau)\boldsymbol{E}(t-\tau)$$

考虑到因果关系,积分中的卷积部分表明 $\boldsymbol{D}(t)$是由在此刻之前所有时间中的 $\boldsymbol{E}$ 来决定的。用傅里叶变换来表示,可有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\boldsymbol{D}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = \varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\boldsymbol{E}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \varepsilon_0\int_0^{\infty}\mathrm{d}\tau\,\xi_e(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\boldsymbol{E}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-\tau)}$$

$$= \varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\left[1 + \int_0^{\infty}\mathrm{d}\tau\,\xi_e(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\right]\boldsymbol{E}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

其中,$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$为场的时间变量,介电常数 $\varepsilon(\omega)$为

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0\left[1 + \int_0^{\infty}\mathrm{d}\tau\xi_e(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right]$$

注意,由于因果关系,τ 的积分的区域是 $0\sim\infty$。灵敏性系数 $\xi_e(\tau)$假设在整个积分区域中有限,且 $\varepsilon(\omega)$在 ω 的负平面的上半区中为一个单值的正常函数。由 $\varepsilon(\omega)$的定义方程,可以看出 $\varepsilon^*(\omega)=\varepsilon(-\omega)$。

利用柯西(Cauchy)定理,可对 $\oint_C \mathrm{d}\alpha[\varepsilon(\alpha)-\varepsilon_\infty]/(\alpha-\omega)$ 在一个环路上进行积分,环路包围的区域为一个半圆,其半径为无限大,直边在实轴上,但将 $\alpha=\omega$ 点放在区域之外(见图 4.7-7)。考虑到 Jordan 引理,在无限大半径的半圆上的积分将趋于零。将沿实轴,除 $\alpha=\omega$ 点外的积分定义为积分的主值 PV,有

$$\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\alpha\,\frac{\varepsilon(\alpha)-\varepsilon_\infty}{\alpha-\omega} - \mathrm{i}\pi[\varepsilon(\omega)-\varepsilon_\infty] = 0$$

将实部和虚部分开,可得到 Kramers-Kronig 关系式或因果关系条件。

$$\varepsilon_R(\omega) - \varepsilon_\infty = \frac{1}{\pi}\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\alpha \, \frac{\varepsilon_I(\alpha)}{\alpha - \omega} \tag{4.7.63a}$$

$$\varepsilon_I(\omega) = -\frac{1}{\pi}\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\alpha \, \frac{\varepsilon_R(\alpha) - \varepsilon_\infty}{\alpha - \omega} \tag{4.7.63b}$$

式(4.7.63a)在数学上称为将 $\varepsilon(\omega) - \varepsilon_\infty$ 中的实部和虚部联系起来的 Hilbert 变换关系。式(4.7.63b)则为 Hilbert 反变换关系。

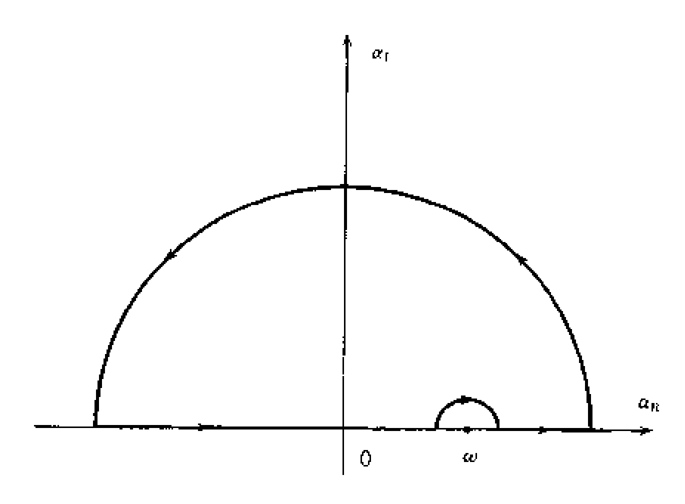


图 4.7-7 Kramers-Kronig 关系的积分回路

汉开尔函数的渐近级数展开

鞍点法是一种非常有用的方法，特别适于计算大参数被积函数的积分渐近值。下面通过求解汉开尔函数的渐近值来说明鞍点法。根据波的概念，可首先提出一个柱面波是由各个方向来的平面波叠加而成，包括实数和复数的。然后，可在一个复平面上定义汉开尔函数为一个回路的积分(Sommerfeld, 1962)。

柱坐标下的波动方程取如下形式，

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial_\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + k^2\right]u(\rho,\phi) = 0 \tag{4.7.64}$$

其解为

$$u(\rho,\phi) = H_n(k\rho)\mathrm{e}^{\pm in\phi}$$

其中，$H_n(k\rho)$为汉开尔函数。同样的波动方程在直角坐标系下的形式为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2\right)\tilde{u}(x,y) = 0$$

这两个波动方程通过坐标变换公式相互联系。对上述方程，我们熟悉的平面波解为

$$\tilde{u}(x,y) = \mathrm{e}^{ik_x x + ik_y y}$$

在柱坐标系中，平面波变为

$$\mathrm{e}^{ik_x x + ik_y y} = \mathrm{e}^{ik\rho\cos(\psi - \phi)}$$

其中，

$$\boldsymbol{k} = \hat{x}k_x + \hat{y}k_y = \hat{x}k\cos\psi + \hat{y}k\sin\psi$$
$$\boldsymbol{\rho} = \hat{x}x + \hat{y}y = \hat{x}\rho\cos\phi + \hat{y}\rho\sin\phi$$

这里波矢量 $\boldsymbol{k}$ 表示了波的传播方向,位置矢量 $\boldsymbol{\rho}$ 给出了观察点(见图 4.7-8)。

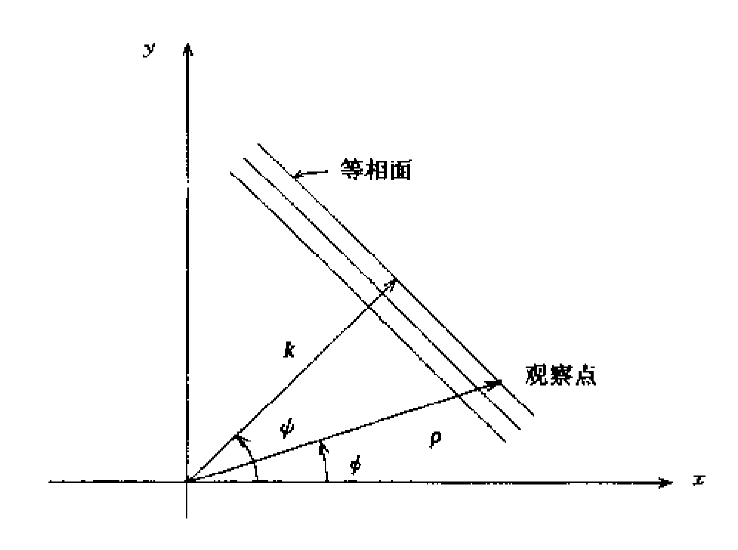


图 4.7-8　有平面波叠加形成的柱面波

我们可将一个柱面波看成许多平面波的叠加,包括均匀的和非均匀的,且来自于所有方向角 ψ,包括实数的和复数的。将波幅度记为 $C_n e^{in\psi}$,可有

$$u(\rho,\phi) = \int_{\Gamma} d\psi\, C_n e^{in\psi} e^{ik\rho\cos(\psi-\phi)} \tag{4.7.65}$$

可以直接证明这个积分确实是式(4.7.64)在柱坐标系中的解。但是路径 Γ 和幅度常数 C_n 还需要确定。

路径 Γ 的选择应使得在复平面 ψ 内积分正常收敛。为使解具有期望的形式,令 $\alpha = \psi - \phi$,这样有

$$u(\rho,\phi) = e^{in\phi}\int_{\Gamma} d\alpha C_n e^{ik\rho\cos\alpha + in\alpha} \tag{4.7.66}$$

现在可以研究在无限大附近积分的收敛情况。在复平面 $\alpha = \alpha_R + i\alpha_I$ 内,指数项具有如下形式。

$$ik\rho\cos\alpha + in\alpha = i(k\rho\cos\alpha_R\cosh\alpha_I + n\alpha_R) + (k\rho\sin\alpha_R\sinh\alpha_I - n\alpha_I) \tag{4.7.67}$$

当 $\alpha_I \to +\infty$ 时,实数部分对 $\sin\alpha_R > 0$ 取正值。当 $\alpha_I \to -\infty$ 时,实数部分对 $\sin\alpha_R < 0$ 取正值,对 $\sin\alpha_R > 0$ 取负值。当实数部分为正时,被积函数随 $\alpha_I \to \pm\infty$ 以指数规律发散,在图 4.7-9 中以阴影部分表示。令 $\xi = k\rho$,第一类汉开尔定义为

$$H_\nu^{(1)}(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{\Gamma_1} d\alpha\, e^{i(\xi\cos\alpha + \nu\alpha - \nu\pi/2)} \tag{4.7.68}$$

其中,积分路径 Γ_1 示于图 4.7-9 中。可以看到式(4.7.67)中实数部分在 $\alpha_R = -\pi/2$ 和 $\alpha_I \to +\infty$;以及 $\alpha_R = \pi/2$ 和 $\alpha_I \to -\infty$ 时,其值趋于 $-\infty$,因此积分收敛。第二类汉开尔的定义与第一类相同,只是积分路径 Γ_2 不同,即

$$H_\nu^{(2)}(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{\Gamma_2} d\alpha\, e^{i(\xi\cos\alpha + \nu\alpha - \nu\pi/2)} \tag{4.7.69}$$

积分路径 Γ_2 也示于图 4.7-9 中。

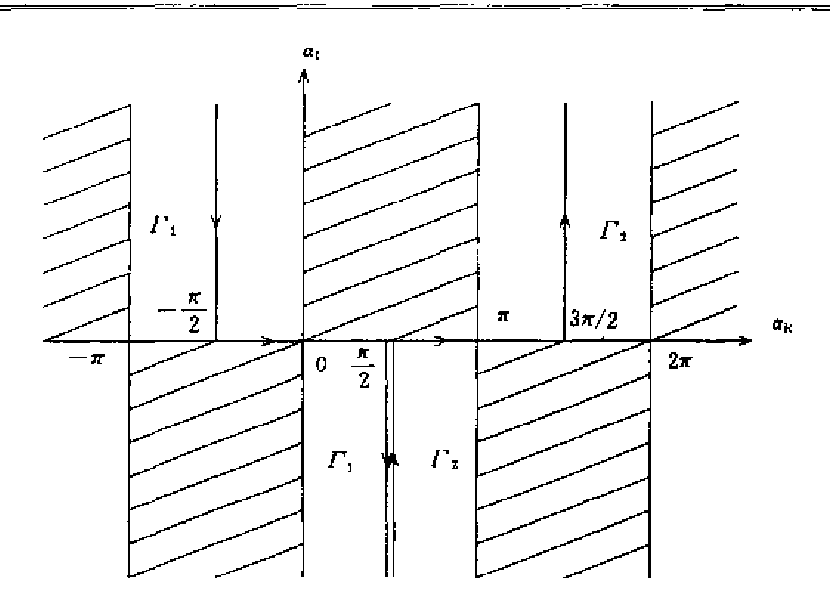


图 4.7-9 汉开尔函数的不同积分路径

现在用鞍点法来确定当 $\xi\to\infty$ 时 $H_n^{(1)}(\xi)$ 的渐近值。在 $\xi\to\infty$ 的极限情况下，积分值主要由指数项 $e^{i\xi\cos\alpha}$ 确定。鞍点 $\alpha=n\pi, n=0,\pm1,\pm2,\cdots$，由下式

$$\frac{d}{d\alpha}(\xi\cos\alpha)=0$$

得到。因此，对位于 $-\pi/2\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$ 之间的第一类汉开尔函数，鞍点发生于 $\alpha=0$ 处。对第二类汉开尔函数，鞍点则发生于 $\alpha=\pi$ 处。注意到当离开鞍点时，积分值将上升至阴影区中或下降至非阴影区中。由于积分可以被视为求曲线下的面积，因此可以寻找另外一条通过鞍点的路径，使得其对被积函数的主要贡献来自于鞍点附近的很少一部分。由柯西(Cauchy)定理，可以将原来的积分路径 Γ_1 改为一个新的路径。

鞍点法中的第二步就是确定新的积分路径，令指数项中的虚部 $i\xi\cos\alpha=i\xi\cos\alpha_R\cosh\alpha_I+\xi\sin\alpha_R\sinh\alpha_I$ 为常数并等于其在鞍点处的值。可得到

$$\cos\alpha_R\cosh\alpha_I=1 \tag{4.7.70}$$

这样的路径避免了由于指数项中的虚部 $e^{i\xi\cos\alpha}$ 带来的振荡效应。指数项中的实部在鞍点处取最大值，并沿路径迅速衰减。因此积分的主要贡献来自于鞍点附近的区域。新的积分路径称为最速下降路径(Steepest Descent Path, SDP)。由式(4.7.70)可见，当 $\alpha_I\to\pm\infty$，$\alpha_R\to\mp\pi/2$ 时，SDP 的端点最终与 Γ_1 重合，如图 4.7.10 所示。在靠近鞍点附近时，可将式(4.7-10)在 $\alpha=0$ 处展开，得到

$$\left(1-\frac{1}{2}\alpha_R^2+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{2}\alpha_I^2+\cdots\right)=1$$

此式给出了 $\alpha_R\approx\pm\alpha_I$。取其中负号，得到 $\alpha_R=-\alpha_I$。这样，最速下降曲线对 α_R 轴而言将在 $-\pi/4$ 处经过鞍点，如图 4.7-10 所示。

第三步是将原来的积分路径变形为新的积分路径。对第一类汉开尔函数 $H_\nu^{(1)}(\xi)$，在曲线的变形过程中不会遇到奇点。为估计鞍点在积分中的贡献，令

$$-s^2=i(\cos\alpha-1) \tag{4.7.71}$$

使得在 $\alpha=0$ 处，$s=0$。沿 SDP，$-s^2=\sin\alpha_R\sinh\alpha_I$ 永远为负实数。积分(4.7.68)变为

$$H_\nu^{(1)}(\xi)=\frac{1}{\pi}e^{i(\xi-\nu\pi/2)}\int_{-\infty}^{\infty}ds\,\frac{d\alpha}{ds}e^{i\nu\alpha}e^{-\xi s^2}$$

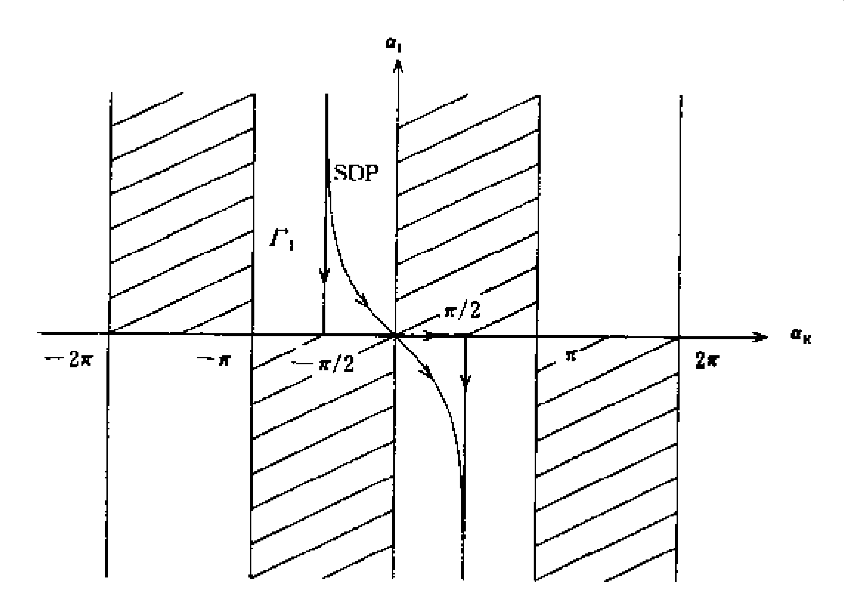


图 4.7-10 在 α 平面上的积分路径

由于主要的贡献来自于鞍点附近的区域,可以将式(4.7.71)在 $\alpha=0$ 展开,从而得到 $s^2=\mathrm{i}\alpha^2/2$ 及

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$$

其中,s 为一个实变量。在 $\alpha\approx0$ 附近积分变为

$$H_\nu^{(1)}(\xi)\approx\frac{\sqrt{2}}{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi-\nu\pi/2)}\int_{-\delta}^{\delta}\mathrm{d}s\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\mathrm{e}^{-\xi s^2}$$

其中,δ 是一个数值很小的数。由于离开 $\alpha=0$, $\mathrm{e}^{-\xi s^2}$下降很快,可以用∞代替 δ 并利用公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}s\mathrm{e}^{-\xi s^2}=\sqrt{\frac{\pi}{\xi}}$$

由此得到 $H_\nu^{(1)}(\xi)$的渐近值

$$H_\nu^{(1)}(\xi)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi\xi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi-\nu\pi/2-\pi/4)}\tag{4.7.72}$$

这个结果是 $\xi^{-1/2}$阶的。鞍点法还可以进一步用于求当 ξ 为指数时 $H_\nu^{(1)}(\xi)$的渐近值,以及当 ν 与 ξ 可比或大于 ξ 时的情况。

鞍点法

上节中叙述的鞍点法是针对 $H_\nu^{(1)}(\xi)$渐近解而推导的,它可以推广为求解下面形式的积分渐近值的一般方法

$$I(\xi)=\int_\Gamma\mathrm{d}\alpha F(\alpha)\mathrm{e}^{\xi f(\alpha)}\tag{4.7.73}$$

其中,ξ 为大的实数变量。令鞍点位于 $\alpha=\alpha_0$ 处,其位置由 $f'(\alpha)=0$ 求得。这里的撇号表示求导。

令 Γ 为由$f_{\mathrm{I}}(\alpha)=f_{\mathrm{I}}(\alpha_0)$确定的最速下降路径。其对鞍点贡献可用下式变换计算

$$-s^2=f(\alpha)-f(\alpha_0)\tag{4.7.74}$$

在 s 平面内,积分变为

$$I(\xi) = e^{\xi f(\alpha_0)}\int_{-\infty}^{\infty} ds\Phi(s)e^{-\xi s^2} \tag{4.7.75}$$

其中,

$$\Phi(s) = \frac{d\alpha}{ds}F[\alpha(s)] \tag{4.7.76}$$

其目的是想将 $\Phi(s)$ 在鞍点 $\alpha = \alpha_0$ 附近用泰勒(Talor)级数展开

$$\Phi(s) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m s^m \tag{4.7.77}$$

并应用公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds\, s^{2m+1}e^{-\xi s^2} = 0 \tag{4.7.78a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds\, s^{2m}e^{-\xi s^2} = \frac{(2m)!}{m!2^{2m}\xi^m}\sqrt{\frac{\pi}{\xi}} \tag{4.7.78b}$$

得到用 $\xi^{-1/2}$ 的负指数表示的 $I(\xi)$ 的渐近级数。

为了得到 A_n,首先将 α 和式(4.7.74)在鞍点 α_0 附近展开,

$$\alpha(s) - \alpha_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n \tag{4.7.79}$$

$$\begin{aligned}
-s^2 &= \frac{1}{2!}f''(\alpha_0)(\alpha-\alpha_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(\alpha_0)(\alpha-\alpha_0)^3 + \frac{1}{4!}f^{\mathrm{IV}}(\alpha_0)(\alpha-\alpha_0)^4 + \cdots \\
&= \frac{1}{2}f''(\alpha_0)(a_1^2s^2 + 2a_1a_2s^3 + (a_2^2 + 2a_1a_3)s^4 + \cdots) + \\
&\quad \frac{1}{6}f'''(\alpha_0)(a_1^3s^3 + 3a_1^2a_2s^4 + \cdots)\frac{1}{24}f^{\mathrm{IV}}(\alpha_0)(a_1^4s^4 + \cdots) + \cdots
\end{aligned}$$

式(4.7.79)中的参数 a_n 可通过比较 s^n 的系数确定,

$$a_1 = \sqrt{\frac{-2}{f''}} \tag{4.7.80a}$$

$$a_2 = -\frac{f'''}{6f''}a_1^2 \tag{4.7.80b}$$

$$a_3 = \frac{1}{24}\left[\frac{5}{3}\left(\frac{f'''}{f''}\right)^2 - \frac{f^{\mathrm{IV}}}{f''}\right]a_1^3 \tag{4.7.80c}$$

$$\vdots$$

现通过确定式(4.7.77)中的 A_n 参数来表示直至 $\xi^{-3/2}$ 阶的解。从式(4.7.76),可有

$$\begin{aligned}
\Phi(s) &= \frac{d\alpha}{ds}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}F^{(k)}(\alpha_0)(\alpha-\alpha_0)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}F^{(k)}(\alpha_0)\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_ns^n\right)^k\cdot\left(\sum_{m=1}^{\infty}ma_ms^{m-1}\right) \\
&= F(\alpha_0)(a_1 + 2a_2s + 3a_3s^2 + \cdots) + \\
&\quad F'(\alpha_0)(a_1s + a_2s^2 + \cdots)(a_1 + 2a_2s + \cdots) + \\
&\quad \frac{1}{2}F''(\alpha_0)(a_1^2s^2 + \cdots)(a_1 + \cdots) + \cdots
\end{aligned}$$

比较系数得到

$$A_0 = a_1 F(\alpha_0) \tag{4.7.81a}$$

$$A_2 = 3a_3 F(\alpha_0) + 3a_1 a_2 F'(\alpha_0) + \frac{1}{2} a_1^3 F''(\alpha_0) \tag{4.7.81b}$$

$$\vdots$$

无需去求参数 $A_1, A_3, \cdots$ 的值,因为有式(4.7.78a),所以其在最终解里都被消掉了。

将 a_n 由式(4.7.80)代入(4.7.81)且应用公式(4.7.78),式(4.7.75)中的积分变为

$$I(\xi) = F(\alpha_0) e^{\xi f(\alpha_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{-\xi f''}} \left\{ 1 + \frac{1}{2\xi f''} \left[\frac{f'''}{f''} \frac{F'}{F} + \frac{1}{4} \frac{f^{\mathrm{IV}}}{f''} - \frac{5}{12} \frac{(f''')^2}{(f'')^2} - \frac{F''}{F} \right] + \cdots \right\} \tag{4.7.82}$$

其实这里讲述的方法可以用来确定 a_n 和 A_n 直至任何阶数,且 $I(\xi)$ 可以展开为比 $\xi^{-1/2}$ 更为高阶的负指数级数。这样的渐近级数在任何固定的 ξ 都是发散的。除了其发散性以外,一个渐近级数是非常有用的。级数的前几项的和与其表述的函数已经很接近了,但是当更多的项加入后,级数将逐渐发散。前 n 项的和与其表述的函数之间的误差与第 $(n+1)$ 项同阶。当渐近级数的前几项已经收敛到函数的实际值后,其收敛的速度比用一个收敛级数将原函数展开后收敛得快。渐近级数的第一项可以被认为代表了积分的主要特性。一个积分的主要特性可以很容易地用鞍点法来考察。当一个积分可以在实轴或虚轴上描述,且其路径无需改变时,采用拉普拉斯驻相法也能很方便地求得其解。

举一个例子,当 $\xi \to \infty$ 时来看鞍点法对积分

$$I(\xi) = \int_\Gamma \mathrm{d}\alpha F(\alpha) e^{\mathrm{i}\xi\cos(\alpha - \alpha_0)} \tag{4.7.83}$$

的贡献。令

$$f(\alpha) = \mathrm{i}\cos(\alpha - \alpha_0)$$

且令鞍点位于 $\alpha = \alpha_0$。利用式(4.7.82),立即可以得到

$$I(\xi) = F(\alpha_0) e^{\mathrm{i}\xi} \sqrt{\frac{2\pi}{\mathrm{i}\xi}} \left[1 - \frac{\mathrm{i}}{2\xi} \left(\frac{1}{4} + \frac{F''}{F} \right) + \cdots \right] \tag{4.7.84}$$

需要注意,如果积分路径 Γ 不是最速下降路径,应利用 $\mathrm{Im}[f(\alpha)] = \mathrm{Im}[f(\alpha_0)]$ 将 Γ 变为 SDP,这时在新的路径与原来的路径之间可能会存在奇异点,这样的奇异点的贡献必须单独加以考虑。

作为另一个例子,当 ξ 和 ν 都很大时,我们求汉开尔函数 $H_\nu^{(1)}(\xi)$ 的主要特征。

$$H_\nu^{(1)}(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_1} \mathrm{d}\alpha\, e^{\mathrm{i}(\xi\cos\alpha + \nu\alpha - \nu\pi/2)} \tag{4.7.85}$$

鞍点由下式决定

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}(\xi\cos\alpha + \nu\alpha) = 0$$

由此得到

$$\sin\alpha = \frac{\nu}{\xi}$$

在 $-\pi/2$ 和 $3\pi/2$ 之间有两个鞍点。对 $\nu < \xi$,它们是

$$\begin{aligned} \alpha &= \arcsin\frac{\nu}{\xi} \\ \alpha &= \pi - \arcsin\frac{\nu}{\xi} \end{aligned} \tag{4.7.86}$$

其中,$0 \leqslant \arcsin(\nu/\xi) \leqslant \pi/2$。对 $\nu > \xi$,它们是

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\,\mathrm{arccosh}\,\frac{\nu}{\xi} \\
\alpha &= \frac{\pi}{2} - \mathrm{i}\,\mathrm{arccosh}\,\frac{\nu}{\xi}
\end{aligned}
\tag{4.7.87}
$$

考虑到由 $H_\nu^{(1)}(\xi)$定义的原路径,能够产生贡献的鞍点在 $\nu < \xi$ 处为 $\alpha = \arcsin(\nu/\xi)$,在 $\nu > \xi$ 处为 $\alpha = \pi/2 - \mathrm{i}\ \mathrm{arccosh}(\nu/\xi)$。

由于在 α 确定的复平面内没有其他奇点,可以改变路径为最速下降路径,并用鞍点法求得 $H_\nu^{(1)}(\xi)$的渐近级数。在建立了如下关系后,可以应用式(4.7.82)

$$
F(\alpha) = \frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi/2} \tag{4.7.88}
$$

$$
\xi f(\alpha) = \mathrm{i}\xi\cos\alpha + \mathrm{i}\nu\alpha \tag{4.7.89}
$$

渐近级数的主项对 $\nu < \xi$ 为

$$
H_\nu^{(1)}(\xi) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi(\xi^2 - \nu^2)^{1/2}}}\exp\left[\mathrm{i}\left(\sqrt{\xi^2 - \nu^2} - \nu\arccos\frac{\nu}{\xi} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{4.7.90}
$$

对 $\nu > \xi$ 为

$$
H_\nu^{(1)}(\xi) \approx -\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi(\nu^2 - \xi^2)^{1/2}}}\exp\left(-\sqrt{\nu^2 - \xi^2} + \nu\,\mathrm{arccosh}\,\frac{\nu}{\xi}\right) \tag{4.7.91}
$$

对 $\nu \approx \xi$ 的情况,两个做出贡献的鞍点将会重合为一个,而且需要分别考虑对其的贡献。可以容易地看出,当 $\nu \ll \xi$ 时,式(4.7.90)将会蜕变为式(4.7.72)。

例 4.7.1 Sommerfeld 等式。

在这个例子中,证明 Sommerfeld 等式

$$
\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r}}{r} = \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_\rho\,\frac{k_\rho}{k_z}H_0^{(1)}(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z|z|}
$$

其中,$k_z = \sqrt{k_0^2 - k_\rho^2}$。

将对$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r}}{r}$的积分表达式写为傅里叶变换的形式

$$
\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r}}{r} = \frac{1}{(2\pi)^2}\iiint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z g(k_x, k_y, k_z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x + \mathrm{i}k_y y + \mathrm{i}k_z z}
$$

因此有其反变换

$$
g(k_x, k_y, k_z) = \iiint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r - \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}{r}
$$

令 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = kr\cos\theta$,并替换积分变量,有

$$
g(k_x, k_y, k_z) = \int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi r^2\sin\theta\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r - \mathrm{i}kr\cos\theta}}{r}
$$

$$= 2\pi \int_0^\infty \mathrm{d}r \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r + \mathrm{i}kr} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{\mathrm{i}k}$$

$$= \frac{2\pi}{\mathrm{i}k} \int_0^\infty \mathrm{d}r [\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0+k)r} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0-k)r}]$$

为使得上面积分收敛,暂时假设 $k_0 = k_{0\mathrm{R}} + \mathrm{i}k_{0\mathrm{I}}$,可得到

$$g(k_x, k_y, k_z) = -\frac{2\pi}{\mathrm{i}k}\left[\frac{1}{\mathrm{i}(k_0 + k)} - \frac{1}{\mathrm{i}(k_0 - k)}\right] = -\frac{4\pi}{k_0^2 - k^2} = \frac{4\pi}{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2}$$

继续完成傅里叶变换,得到

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r}}{r} = g(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y \mathrm{d}k_z \frac{-1}{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x + \mathrm{i}k_y y + \mathrm{i}k_z z}$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y \mathrm{d}k_z \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x + \mathrm{i}k_y y + \mathrm{i}k_z z}}{\left(k_z + \sqrt{k_0^2 + k_x^2 + k_y^2}\right)\left(k_z - \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}\right)}$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y \frac{1}{k_z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x + \mathrm{i}k_y y + \mathrm{i}k_z |z|}$$

令

$$k_x = k_\rho \cos\alpha, \; k_y = k_\rho \sin\alpha$$
$$x = \rho\cos\phi, \; y = \rho\sin\phi$$

得到

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r}}{r} = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}k_\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\alpha \frac{k_\rho}{k_z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\rho \cos(\alpha - \phi) + \mathrm{i}k_z |z|} = \mathrm{i}\int_0^\infty \mathrm{d}k_\rho \frac{k_\rho}{k_z} J_0(k_\rho \rho) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z |z|}$$

考虑到其周期性,有贝塞尔函数

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\rho \rho\cos(\alpha - \phi)} = J_0(k_\rho \rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\alpha \mathrm{e}^{k_\rho \rho\cos\alpha}$$

利用 $J_0(k_\rho \rho) = \frac{1}{2}[H_0^{(1)}(k_\rho \rho) + H_0^{(2)}(k_\rho \rho)]$ 对积分

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\int_0^\infty \mathrm{d}k_\rho \frac{k_\rho}{k_{z0}} H_0^{(2)}(k_\rho \rho) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z |z|}$$

置换变量 $k_\rho = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi} k'_\rho$ 得到

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}k_\rho' \frac{k_\rho'}{k_z} H_0^{(1)}(k_\rho' \rho) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z |z|}$$

将其与

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\int_0^\infty \mathrm{d}k_\rho \frac{k_\rho}{k_z} H_0^{(1)}(k_\rho \rho) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z |z|}$$

合并得到 Sommerfeld 等式。因此证明了

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r}}{r} = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y \frac{1}{k_z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x + \mathrm{i}k_y y + \mathrm{i}k_z |z|}$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_\rho \frac{k_\rho}{k_z} H_0^{(1)}(k_\rho \rho) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z|z|}$$

式中，$k_z = \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}$。注意上式还同时表明，一个球面波可以展开许多平面的叠加，或许多柱面波的叠加。

例 4.7.2 变异的鞍点法。

变异的鞍点法用于处理鞍点附近的极点。假设经过变换，在 s 平面中积分为

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s F(s) \mathrm{e}^{-s^2}$$

在 $s = \pm s_p$ 处具有一对极点。令

$$F(s) = F_s(s) + \frac{2s_p C}{s^2 - s_p^2}$$

式中

$$C = \lim_{s \to s_p}\left[\frac{s^2 - s_p^2}{2s_p} F(s)\right]$$

由于 $F_s(s)$在附近没有极点，因此积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s F_s(s) \mathrm{e}^{-s^2}$ 可用常规的鞍点法来求解。

证明

$$I_p = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s \frac{2s_p C}{s^2 - s_p^2} \mathrm{e}^{-s^2} = \mathrm{i}2\pi C \mathrm{e}^{-s_p^2}[1 - \mathrm{erf}(-\mathrm{i}s_p)]$$

式中误差函数

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \mathrm{d}s \mathrm{e}^{-s^2}$$

解 积分 I_p 不能用无限远处的封闭积分曲线以及留数定理来求解，这是由于当 $s \to \mathrm{i}\infty$ 时积分不收敛。

首先定义一个函数

$$I(\lambda) = 2s_p C\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s \frac{\mathrm{e}^{-\lambda s^2}}{s^2 - s_p^2}$$

需要求解的积分则为 $I_p = I(1)$。函数 $I(\lambda)$满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}I(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} + s_p^2 I(\lambda) = -2s_p C\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

假设一特解的形式为

$$I(\lambda) = g(\lambda) \mathrm{e}^{-\lambda s_p^2}$$

将其代人微分方程，得到

$$g'(\lambda) = -2s_p C\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \mathrm{e}^{\lambda s_p^2}$$

将积分从 $\lambda = 0$ 积到 $\lambda = 1$，得到

$$g(1) = g(0) - 2s_p C\sqrt{\pi}\int_0^1 \mathrm{d}\lambda \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \mathrm{e}^{\lambda s_p^2}$$

令 $x=-\mathrm{i}s_p\sqrt{\lambda}$，有 $\mathrm{d}x=-\mathrm{i}s_p\mathrm{d}\lambda/2\sqrt{\lambda}$ 以及

$$g(1) = g(0) - \mathrm{i}\,4C\sqrt{\pi}\int_0^{-\mathrm{i}s_p} \mathrm{d}x\mathrm{e}^{-x^2} = g(0) - \mathrm{i}\,2\pi C\mathrm{erf}(-\mathrm{i}s_p)$$

注意，当 s_p 处于 s 平面的上半平面，且使得虚部为正值时，有

$$g(0) = I(0) = 2s_pC\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s\,\frac{1}{s^2-s_p^2} = \mathrm{i}\,2\pi C$$

由于 $I_p=I(1)=g(1)\mathrm{e}^{-s_p^2}$，因此有

$$I_p = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s\,\frac{2s_pC}{s^2-s_p^2}\mathrm{e}^{-s^2} = P[1-\mathrm{erf}(-\mathrm{i}s_p)]$$

其中，$P=\mathrm{i}\,2\pi C\mathrm{e}^{-s_p^2}$，这时的 P 就是 I_p 的被积函数在 $s=s_p$ 处的留数的精确值。

专题 4.7.A 双层介质上的振子天线

考虑一个位于双层介质表面上的垂直磁振子，表面上部的电磁场在 $\hat{z}$ 方向上应为 TM 波并由 H_z 分量来确定。

$$H_z = -\mathrm{i}\,\frac{IA}{8\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k_\rho\,\frac{k_\rho^3}{k_z}(1+R^{\mathrm{TE}})H_0^{(1)}(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_zz} \tag{4.7.92}$$

当底层介质为理想导体时，

$$1+R^{\mathrm{TE}} = (1+R_{01})\,\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k_{1z}d}}{1-R_{01}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k_{1z}d}} \tag{4.7.93}$$

其中，

$$R_{01} = \frac{k_z-k_{1z}}{k_z+k_{1z}}$$

发现，由于 $k_z=\sqrt{k^2-k_\rho^2}$ 为双值函数，所以在 $k_\rho=k$ 处有一个支点。然而，即使 $k_{1z}=\sqrt{k_1^2-k_\rho^2}$ 也是双值的，但 $k_\rho=k$ 却不是支点。这是由于当把 k_{1z} 置换为 $-k_{1z}$ 时，$1+R^{\mathrm{TE}}(-k_{1z})=1+R^{\mathrm{TE}}(k_{1z})$。由于 $(1+R^{\mathrm{TE}})$ 对 k_{1z} 是一个偶函数，因此，它不是双值的。

为求解积分(4.7.92)，应用鞍点法

$$H_z = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k_\rho\,F(k_\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\rho\rho+\mathrm{i}k_zz} \tag{4.7.94}$$

其中，

$$F(k_\rho) = -\mathrm{i}\,\frac{IA}{8\pi}\,\frac{k_\rho^3}{k_z}(1+R^{\mathrm{TE}})H_0^{(1)}(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\rho\rho} \tag{4.7.95}$$

可以看出式(4.7.94)中的函数 $F(k_\rho)$ 可能包含许多奇点。当将积分路径由沿实轴变为经过鞍点的最速下降路径时，这些奇点都会对结果做出贡献。

为考察 k_ρ 平面上的奇点，首先由支点 $k_\rho=k$ 出发做一个切分。令 $k_\rho=k_{\rho\mathrm{R}}+\mathrm{i}k_{\rho\mathrm{I}}$，其中 $k_{\rho\mathrm{R}}$ 和 $k_{\rho\mathrm{I}}$ 都为实数，可有

$$\begin{aligned} k_z &= \sqrt{k^2-(k_{\rho\mathrm{R}}+\mathrm{i}k_{\rho\mathrm{I}})^2} \\ &= \sqrt{k^2-k_{\rho\mathrm{R}}^2+k_{\rho\mathrm{I}}^2-\mathrm{i}2k_{\rho\mathrm{R}}k_{\rho\mathrm{I}}} \end{aligned} \tag{4.7.96}$$

Sommerfeld 支点切分定义为 $\text{Im}(k_z)=k_{zI}=0$。由式(4.7.96)得到 $k_{\rho R}k_{\rho I}=0$ 和 $k^2-k_{\rho R}^2+k_{\rho I}^2\geqslant 0$。图 4.7-11 给出了 Sommerfeld 支点切分。它以 k 为原点延伸至实轴 $0\leqslant k_\rho\leqslant k$ 的部分,并占有虚轴 k_ρ 的全部。我们要求在上 Riemann 层有 $k_{zI}\geqslant 0$,在下 Riemann 层有 $k_{zI}\leqslant 0$。如此选择的 Riemann 层保证了在上层中的所有奇点在 $z>0$ 处都是以指数形式衰减的波。

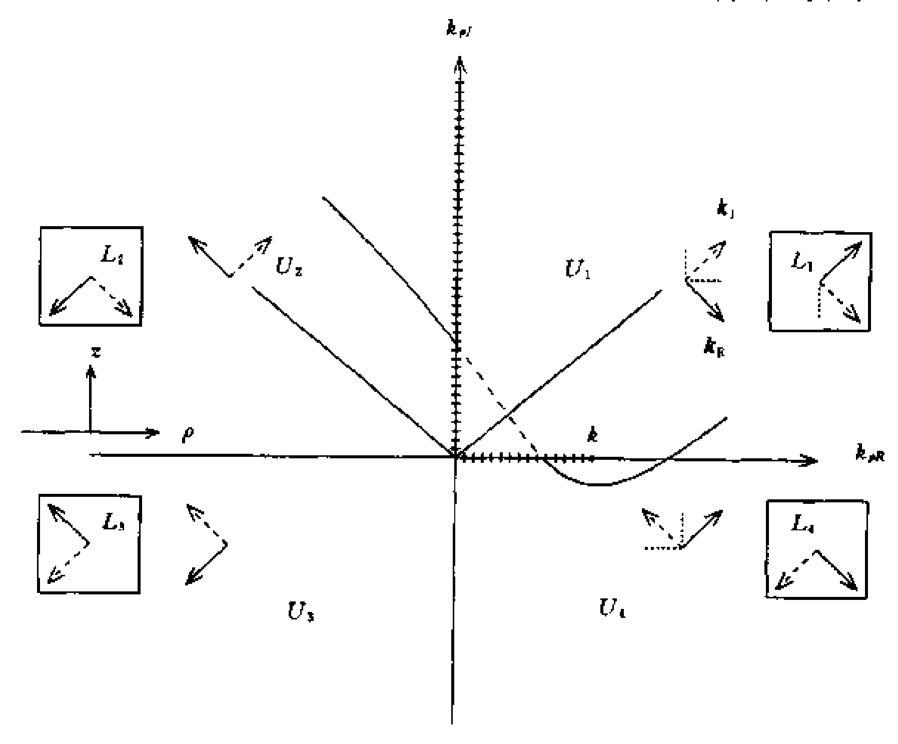


图 4.7-11 k_ρ 复平面

为考察包含奇点的上下 Riemann 层中波的特性,令,

$$\boldsymbol{k}=\hat{\boldsymbol{\rho}}k_\rho+\hat{\boldsymbol{z}}k_z=\boldsymbol{k}_R+\mathrm{i}\boldsymbol{k}_I \tag{4.7.97}$$

其中 $\boldsymbol{k}_R$ 和 $\boldsymbol{k}_I$ 都是实矢量,而 $\boldsymbol{k}$ 幅度为实数 $k=\omega(\mu\varepsilon)^{1/2}$的复矢量。有

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=k_R^2-k_I^2+\mathrm{i}2\boldsymbol{k}_R\cdot\boldsymbol{k}_I=\omega^2\mu\varepsilon$$

从而有

$$\boldsymbol{k}_R\cdot\boldsymbol{k}_I=0 \tag{4.7.98}$$

因此,矢量 $\boldsymbol{k}$ 的实部与虚部正交。

在图 4.7-11 中,用实线箭头表示 $\boldsymbol{k}_R$,用虚线箭头表示 $\boldsymbol{k}_I$。比如,在上 Riemann 层的第一象限,有 $k_{\rho I}>0$ 及 $k_{zI}\geqslant 0$,虚线的箭头指向右上方,表明波以指数规律衰减的方向。还知道,在第一象限中,$k_{\rho R}>0$。由 $\boldsymbol{k}_I\cdot\boldsymbol{k}_R=0$ 的事实,可以确定,$\boldsymbol{k}_R$ 指向右下方表示波的传播方向。对包含奇点的下 Riemann 层中的波的特性,用方框中的箭头来表示。

可确定积分(4.7.94)的鞍点和最速下降路径。首先做下列变换

$$k_\rho=k\sin\alpha \tag{4.7.99a}$$

$$k_z=k\cos\alpha \tag{4.7.99b}$$

$$\rho=r\sin\theta \tag{4.7.100a}$$

$$z=r\cos\theta \tag{4.7.100b}$$

其中,$r=(\rho^2+z^2)^{1/2}$为振子到观察点的距离,θ 为观察点到 z 轴的夹角,α 为 $\boldsymbol{k}$ 矢量与 z 轴的夹

角。积分后为

$$H_z = \int_{\Gamma} \mathrm{d}\alpha \bar{F}(\alpha) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos(\alpha-\theta)} \tag{4.7.101}$$

由实轴 k_ρ 变换后的积分路径 Γ 示于图 4.7-12 中。用下式可以更好地说明变换的作用

$$\begin{aligned} k_\rho &= k_{\rho\mathrm{R}} + \mathrm{i}k_{\rho\mathrm{I}} \\ &= k \sin \alpha_{\mathrm{R}} \cosh \alpha_{\mathrm{I}} + \mathrm{i}k \cos \alpha_{\mathrm{R}} \sinh \alpha_{\mathrm{I}} \end{aligned} \tag{4.7.102}$$

k_ρ 的实轴，即 $k_{\rho\mathrm{I}} = k \cos \alpha_{\mathrm{R}} \sinh \alpha_{\mathrm{I}} = 0$ 被映射到 $\alpha_{\mathrm{I}} = 0$ 和 $\alpha_{\mathrm{R}} = \pm\pi/2$，$k_\rho$ 的虚轴，即 $k_{\rho\mathrm{R}} = \sin \alpha_{\mathrm{R}} \cosh \alpha_{\mathrm{I}} = 0$ 被映射到 $\alpha_{\mathrm{R}} = 0$ 和 $\alpha_{\mathrm{R}} = \pm\pi$。

特别值得注意的是，映射将 k_ρ 平面中的两个 Riemann 层展开，且 $k_z = k\cos\alpha$ 不再成为支点。

$$\begin{aligned} k_z &= k_{z\mathrm{R}} + \mathrm{i}k_{z\mathrm{I}} \\ &= k \cos \alpha_{\mathrm{R}} \cosh \alpha_{\mathrm{I}} - \mathrm{i}k \sin \alpha_{\mathrm{R}} \sinh \alpha_{\mathrm{I}} \end{aligned} \tag{4.7.103}$$

对 k_ρ 平面中的上 Riemann 层，$k_{z\mathrm{I}} \geqslant 0$，有 $\sin\alpha_{\mathrm{R}}\sin\alpha_{\mathrm{I}} < 0$，其对应于：(1) $\alpha_{\mathrm{I}} > 0$ 和 $-\pi < \alpha_{\mathrm{R}} < 0$，(2) $\alpha_{\mathrm{I}} < 0$ 和 $0 < \alpha_{\mathrm{R}} < \pi$。对 $k_{z\mathrm{I}} < 0$，我们有：(1) $\alpha_{\mathrm{I}} > 0$ 和 $0 < \alpha_{\mathrm{R}} < \pi$；(2) $\alpha_{\mathrm{I}} < 0$ 和 $-\pi < \alpha_{\mathrm{R}} < 0$。上下 Riemann 层由 U 和 L 表示，被映射到一个 α 平面上，且没有支点。

与图 4.7-11 类似，在图 4.7-12 中，仍以实线的箭头表示波传播矢量的实部 $\boldsymbol{k}_{\mathrm{R}}$，以虚线的箭头表示虚部 $\boldsymbol{k}_{\mathrm{I}}$。比如，在 L_1 区域中，$0 \leqslant \alpha_{\mathrm{R}} \leqslant \pi/2$ 波由一个指向右上方的实矢量表示。根据式(4.7.102)，$k_{\rho\mathrm{I}} \geqslant 0$ 且虚线矢量必须指出右下方，使得 $\boldsymbol{k}_{\mathrm{R}} \cdot \boldsymbol{k}_{\mathrm{I}} = 0$。这个例子也示于图 4.7-11 的右上方。

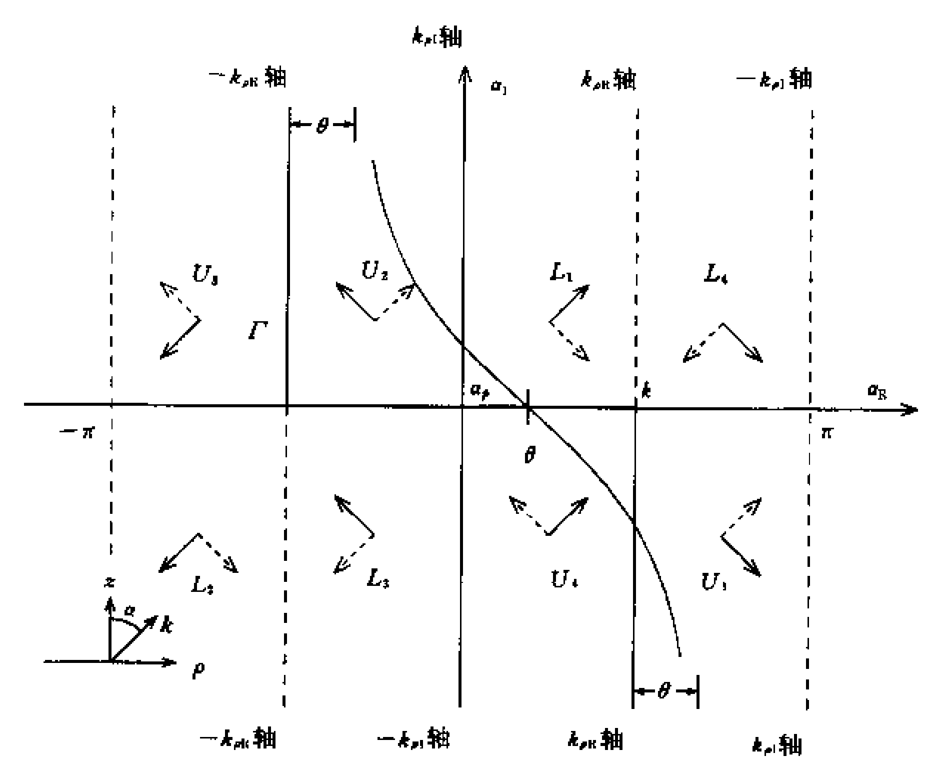


图 4.7-12 α 复平面

鞍点法是应用于远场 $kr \gg 1$ 的观察点，其鞍点由式(4.7.101)中的指数决定，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \cos(\alpha - \theta) = 0$$

由其得到 $\alpha = \theta$。

鞍点对积分的贡献可以通过计算得到

$$H_z = \tilde{F}(\theta)\sqrt{\frac{2\pi}{\mathrm{i}kr}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} \tag{4.7.104}$$

可见这是一个由振子到观察点的直射波。

最速下降路径(SDP)可以通过令指数部分的虚部等于常数并等于鞍点值得到,例如,

$$\mathrm{Im}\{\mathrm{i}\cos(\alpha - \theta)\} = \cos(\alpha_{\mathrm{R}} - \theta)\cosh\alpha_{\mathrm{I}} = 1 \tag{4.7.105}$$

最速下降路径(SDP)通过点 $\alpha_{\mathrm{R}} = \theta$ 且当 $\alpha_{\mathrm{I}} \to \infty$ 时,渐近地靠近 $\alpha_{\mathrm{R}} = \theta - \pi/2$。在 k_ρ 平面上,最速下降路径示于图 4.7-11 中,其既可以由积分(4.7.94)得到,也可以由 α 平面通过变换得到。

由图 4.7-12 可见,在原积分路径 Γ 和最速下降路径 SDP 之间的所有奇点,对积分都有贡献。在 U_2, U_4 和 U_1 中的所有奇点,都表示离开表面后沿 $\hat{z}$ 方向指数衰减的波。然而在 L_1 中的奇点,表示沿 $\hat{z}$ 方向指数增加的波,称其为漏波模。考虑在 $\alpha = \alpha_p$ 处有一漏波,其复波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的实部和虚部 $\boldsymbol{k}_{\mathrm{R}}$ 和 $\boldsymbol{k}_{\mathrm{I}}$ 示于图 4.7-13。漏波沿着 $\boldsymbol{k}_{\mathrm{R}}$方向传播并沿着指向 $-\hat{z}$ 和 $+\hat{\boldsymbol{\rho}}$ 方向的 $\boldsymbol{k}_{\mathrm{I}}$ 衰减。然而,这些奇点的漏波模只能在 θ 大于 α_{R} 时才能被激励起来。如图 4.7-13 所示,尽管波的幅度在离开表面时沿 z 方向以指数规律增长,其沿 $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ 方向仍然以指数规律衰减,这样波的幅度将决不会发散。在 L_4 中的波沿 $+\hat{\boldsymbol{\rho}}$ 和 $+\hat{z}$ 方向同时以指数规律增长,但是这一模式不可能被激励起来。这是因为,观察角 θ 在介质 0 中总是小于 $\pi/2$。上述对积分值进行评估的方法,因为每一个极点对应一个正交模,故称之为正交模法。

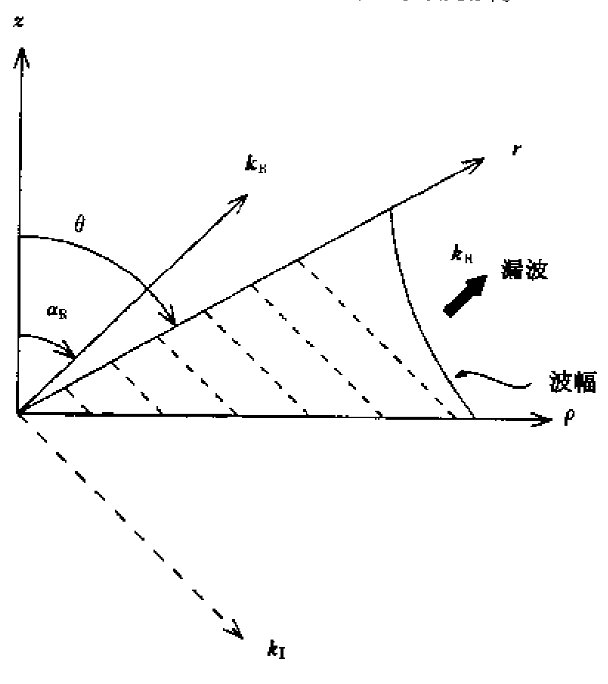


图 4.7-13 漏波模式

另一求解(4.7.94)积分的方法为一种几何光学的方法。由于 R_{01}的幅度比 1 小,可以将分子$(1 + R^{\mathrm{TE}})$展开

$$1 + R^{\mathrm{TE}} = (1 + R_{01}) - (1 - R_{01}^2)\sum_{m=1}^{\infty} R_{01}^{m-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2mk_{1z}d} \tag{4.7.106}$$

将式(4.7.106)代入式(4.7.92),并对第一项及求和项分别求解。其中第一项代表半空间中的解,求和项表示下表面层的贡献。

第一项可以容易地由鞍点法得到。使用式(4.7.99)和(4.7.100)中的变换,以及渐近公式

$H_0^{(1)}(\xi)e^{-ik_\rho\rho}\approx(2/i\pi k_\rho\rho)^{\frac{1}{2}}$，可得到

$$\begin{aligned}H_z &= -\frac{iIA}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk_\rho(1+R_{01})\frac{k_\rho^3}{k_z}[H_0^{(1)}(k_\rho\rho)e^{-ik_\rho\rho}]e^{ik_\rho\rho+ik_zz}\\ &= -\frac{IAe^{ikr}}{2\pi r}\frac{k^2\sin^2\theta\cos\theta}{\cos\theta+\sqrt{k_1^2/k^2-\sin^2\theta}}\end{aligned}\tag{4.7.107}$$

这就是一个位于具有介电常数 ϵ_1 介质层上半空间中的垂直磁偶极子(VMD)的解。

为了求解将式(4.7.106)代入(4.7.92)后得到的求和项，考虑观察点位于表面上方 $z=0$ 处的情况。对式(4.7.106)中的第 m 项

$$H_z^{(m)} = \frac{iIA}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk_\rho(1-R_{01}^2)R_{01}^{m-1}\frac{k_\rho^3}{k_z}[H_0^{(1)}(k_\rho\rho)e^{-ik_\rho\rho}]e^{ik_\rho\rho+i2mk_{1z}d}\tag{4.7.108}$$

可采用如下变换：

$$k_\rho = k_1\sin\alpha\tag{4.7.109a}$$

$$k_{1z} = k_1\cos\alpha\tag{4.7.109b}$$

$$\rho = R_m\sin\alpha_m\tag{4.7.110a}$$

$$2md = R_m\cos\alpha_m\tag{4.7.110b}$$

其中，

$$R_m = \sqrt{\rho^2+(2md)^2}\tag{4.7.110c}$$

有了式(4.7.109)和(4.7.110)的变换，就可将式(4.7.108)表示为

$$H_z^{(m)} = \int d\alpha G_m(\alpha)e^{ik_1R_m\cos(\alpha-\alpha_m)}\tag{4.7.111}$$

其中，

$$G_m(\alpha) = -i\frac{IA}{8\pi}(1-R_{01}^2)R_{01}^{m-1}\frac{k_1^3\sin^3\alpha\ \cos\alpha}{\sqrt{k^2/k_1^2-\sin^2\alpha}}\cdot\sqrt{\frac{2}{i\pi k_1R_m\sin\alpha\sin\alpha_m}}\tag{4.7.112}$$

使用了渐近公式汉开尔函数 $H_0^{(1)}(k_\rho\rho)$。可以看出，在 $\alpha=\alpha_m$ 有一个鞍点。对 $k_1R_m\gg1$，在计算鞍点的贡献时可以只考虑第一项，即 $e^{ik_1R_m}/R_m$。

式(4.7.109)的变换与式(4.7.99)的变换不同，在式(4.7.99)中有 $k_\rho=k\sin\alpha$，$k_z=k\cos\alpha$。如图4.7-14所示，k_ρ 平面被映射到了 α 平面。应该注意的是在式(4.7.99)的变换中，支点 $k_\rho=k$ 被移走，而在式(4.7.109)的变换中，支点 $k_\rho=k$ 仍然存在，这也在图4.7-14中表示了出来。

我们假设 k_1 的虚部很小。变换式(4.7.110a)

$$k_\rho = (k_{1R}+ik_{1I})(\sin\alpha_R\cosh\alpha_I+i\cos\alpha_R\sinh\alpha_I)$$

将复平面 k_ρ 和 α 联系了起来。在 $k_{\rho I}=0$ 的 k_ρ 实轴上，有 $k_{1R}\cos\alpha_R\sinh\alpha_I+k_{1I}\sin\alpha_R\cosh\alpha_I=0$。令 $\delta=\arctan(k_{1I}/k_{1R})$，则当 $\alpha_I\to+\infty$ 时，$\alpha_R\to\text{arccot}(-k_{1I}/k_{1R})=\delta-\pi/2$；当 $\alpha_I\to-\infty$ 时，$\alpha_R\to-\delta+\pi/2$。变换后的 $k_{\rho R}$ 轴记为原积分路径。

最速下降路径(SDP)是通过令原积分路径 $\text{Im}\{ik_1\cos(\alpha-\alpha_m)\}=k_{1R}$，或

$$\cos(\alpha_R-\alpha_m)\cosh\alpha_I+\frac{k_{1I}}{k_{1R}}\sin(\alpha_R-\alpha_m)\sinh\alpha_I = 1$$

得到的。在 $\alpha=\alpha_m$ 附近，有 $\alpha_I\approx-(k_{1I}\pm|k_1|)(\alpha_R-\alpha_m)/k_{1R}$。式中必须选正号，这样就可回到 $k_{1I}=0$ 的情况，路径就会更倾向纵坐标。当 $\alpha_I\to\pm\infty$，就有 $\alpha_R-\alpha_m\to\pm(\delta-\pi/2)$，最速下降路径示于图4.7-14中。

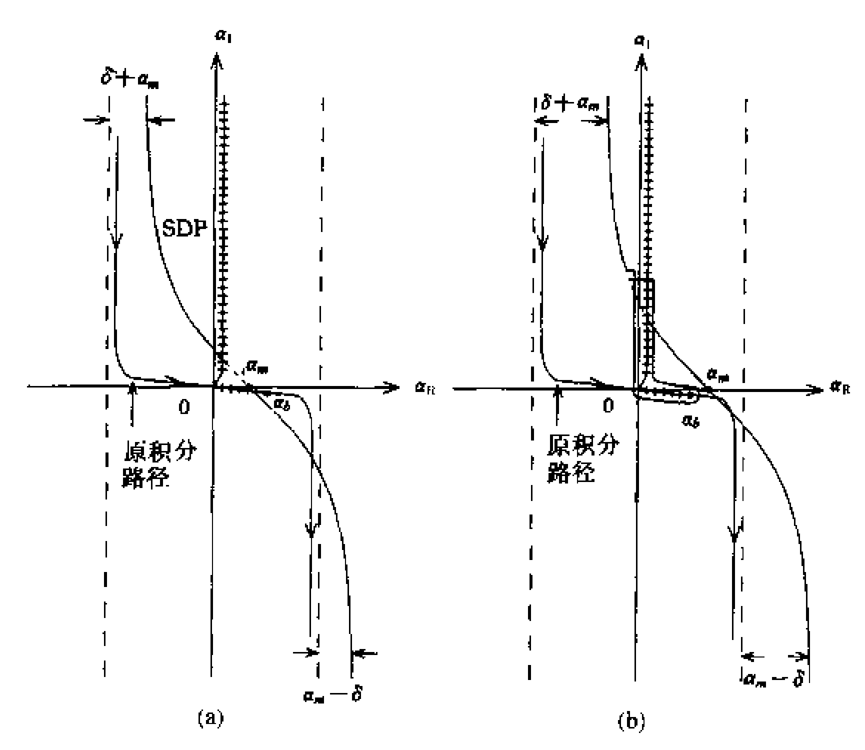


图 4.7-14 (a)最速下降路径在支点的左边且鞍点 α_m 位于 $k_{z1}<0$ 的下 Riemann 层

(b)最速下降路径在支点的右边且鞍点 α_m 位于 $k_{z1}>0$ 的上 Riemann 层

在将原积分路径改为最速下降路径的过程中,路径必须与源于支点的支点分割线 $k_\rho=k$ 交叉。如果 SDP 经过的鞍点 α_m 位于支点的左面,此处 $k=k_1\sin\alpha_b$ 或 $\alpha_b=\arcsin(k/k_1)$ 交叉就会发生两次。在这种情况下,鞍点位于下 Riemann 层,对应于 $k_{z1}<0$ 且产生漏波。当 SDP 在支点 α_b 右边经过,经过支点分割时将使得 SDP 的两端都位于上 Riemann 层,即 $k_{z1}>0$。支点分割的贡献应该加以考虑,可以证明其数量级为 $1/R_m^2$。

从物理上解释,在应用鞍点法之后的求和式中的每一项,都对应于在观察点 $R_m=[\rho^2+(2md)^2]^{1/2}$处接收到的、由振子源发出的一种辐射场。这里的源也包括位于表面以下 $2md$ 处的振子的镜像,以及由于第二边界反射 m 次产生的反射场(见图 4.7-15)。临界角发生在 $\alpha_b=\arcsin(k/k_1)$处,此为 α 平面中的支点。当鞍点 $\alpha_m=\arcsin(\rho/R_m)$位于 α_b 的左面,反射角比临界角要小,发现其具有漏波特性。当鞍点位于 α_b 的右面,反射角比临界角大,波呈现出导波的基本特性。由于 $k_{zl}>0$,因此波在离开表面时将衰减。除了鞍点的贡献以外,支点分割的贡献是其产生表面波。在图 4.7-15 中,令 $z=0$ 并给出了不同波的分量。在这一几何光学方法中,当介质层较厚且损耗较大时,求和级数中各项收敛较快。当介质厚度减少,将需要较多的项数,因此采用留数的正交模方法效率较高。

半空间介质中的垂直磁振子

考虑一个垂直磁振子(VMD),位于一层具有磁导率 μ 和介电常数 ϵ_1 的介质(半空间)表面。一个观察者位于 $\mu_0=\mu,\epsilon_0=\epsilon$ 的区域 0 中,测量得到垂直磁场分量 H_z 取如下形式,

$$H_z=-\mathrm{i}\frac{IA}{8\pi}\int_{\mathrm{SIP}}\mathrm{d}k_\rho\frac{k_\rho^3}{k_z}(1+R_{01}^{\mathrm{TE}})H_0^{(1)}(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}$$

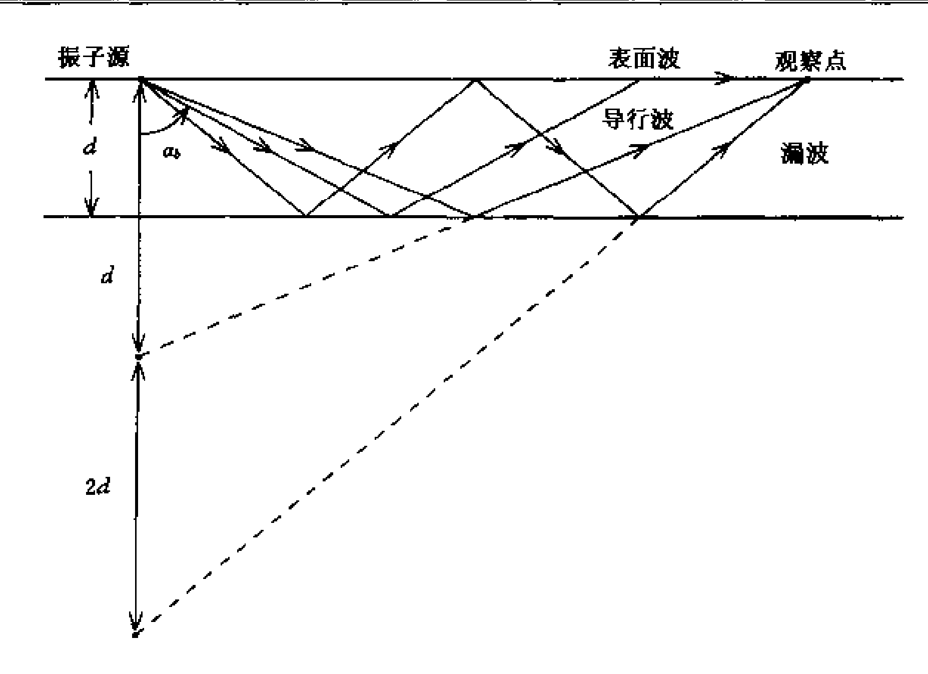


图 4.7-15 观察点得到的所有波等于半空间中的解和镜像解

$$1 + R_{01}^{\mathrm{TE}} = \frac{2k_z}{k_z + k_{1z}}$$

其中,

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_\rho^2}$$

$$k_{1z} = \sqrt{k_1^2 - k_\rho^2}$$

$$k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$$

$$k_1^2 = \omega^2\mu\varepsilon_1$$

Sommerfeld 积分路径(SIP)从 $-\infty$ 到 $+\infty$,它紧贴 $k_{\rho\mathrm{R}}$负实轴 $-\infty < k_{\rho\mathrm{R}} \leqslant 0$ 之上,然后紧贴 $k_{\rho\mathrm{R}}$正实轴 $0 < k_{\rho\mathrm{R}} < \infty$ 之下。

应用鞍点法,利用汉开尔函数的渐近公式可得到当观察点距离 ρ 和 z 很远时,$\rho = r\sin\theta$, $z = r\cos\theta$,鞍点为

$$k_\rho = k\sin\theta$$

垂直磁场分量中的主项为

$$H_z = -\frac{IA\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{2\pi r}\frac{k^2\sin^2\theta\cos\theta}{\cos\theta + \sqrt{k_1^2/k^2 - \sin^2\theta}}$$

当观察点位于平面上 $\theta = \pi/2$,鞍点贡献的主项消失,我们不得不计算积分中的二阶项$(1/r)^2$。与此同时,源于支点的支点分割 $k_\rho = k_1$ 的贡献变为主要部分。经过重新选择积分路径,并选择如图 4.7-16 的支点分割,得到垂直磁场分量

$$H_z = \mathrm{i}\frac{IA}{2\pi(k_1^2 - k^2)\rho^2}(k^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho} - k_1^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1\rho})$$

例 4.7.3 半空间上 VMD 的精确解。

利用 Sommerfeld 恒等式,半空间上 VMD 的磁场 H_z 的精确解为

$$H_z = -\frac{Ia}{2\pi(k_t^2 - k^2)}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{k_t^2}{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_t\rho} - \frac{k^2}{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho}\right) + \right.$$

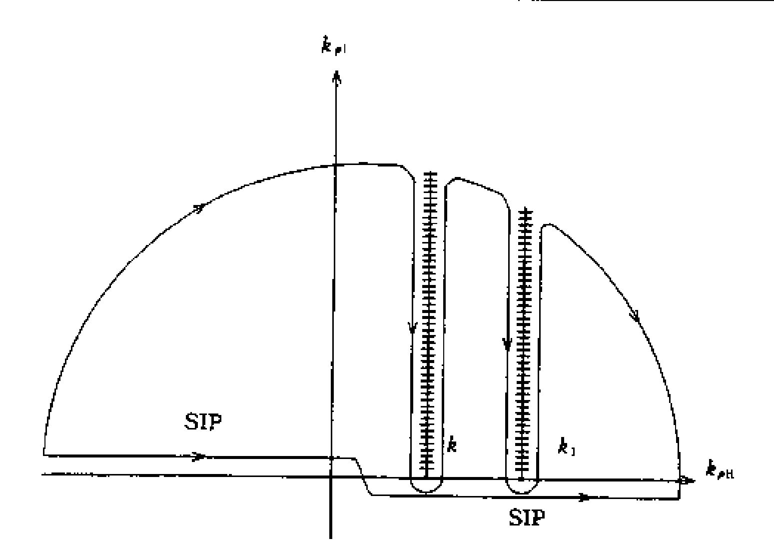


图 4.7-16 支点分割

$$\frac{3}{\rho}\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\left(\frac{1}{\rho^2}e^{ik_t\rho}-\frac{1}{\rho^2}e^{ik\rho}\right)\Big]$$

这个解是 Van der pol 得到的(Banos,1966)。

解

$$H_z=-\mathrm{i}\frac{Ia}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_\rho k_\rho^3\frac{k_z-k_{tz}}{(k_z+k_{tz})(k_z-k_{tz})}H_0^{(1)}(k_\rho\rho)e^{ik_z z}$$

由于

$$k_z^2-k_{tz}^2=k^2-k_t^2$$

因此,在 $z=0$ 处,

$$H_z=\frac{\mathrm{i}Ia}{4\pi(k_t^2-k^2)}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_\rho k_\rho^3(k_z-k_{tz})H_0^{(1)}(k_\rho\rho)$$

利用 Sommerfeld 恒等式和贝塞尔函数的递推公式,可得到

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial z^2\partial\rho^2}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right]_{z=0}=\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}H_0^{(1)}(k_\rho\rho)k_\rho^3k_z\mathrm{d}k_\rho-\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\rho}H_1^{(1)}(k_\rho\rho)k_\rho^2k_z\mathrm{d}k_\rho$$

和

$$\left[\frac{\partial^3}{\partial z^2\partial\rho}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right]_{z=0}=\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_\rho k_\rho^2k_zH_1^{(1)}(k_\rho\rho)$$

$$H_z=\frac{Ia}{2\pi(k_t^2-k^2)}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{e^{ikr}}{r}-\frac{e^{ik_tr}}{r}\right)\right]_{z=0}$$

将其代入 H_z 得到微分形式并令 $z=0$,我们有

$$H_z=\frac{\mathrm{i}Ia}{2\pi(k_t^2-k^2)}\left[\frac{e^{ik_t\rho}}{\rho^2}\left(k_t^3+\frac{4\mathrm{i}k_t}{\rho}-\frac{9k_t}{\rho^2}-\frac{9\mathrm{i}}{\rho^3}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{e^{ik\rho}}{\rho^2}\left(k^3+\frac{4\mathrm{i}k^2}{\rho}-\frac{9k}{\rho^2}-\frac{9\mathrm{i}}{\rho^3}\right)\right]$$

$$=\mathrm{i}\frac{Ia}{2\pi(k_t^2-k^2)\rho^2}\left[k^3e^{ik\rho}-k_t^3e^{ik_t\rho}\right]$$

半空间介质中的垂直电振子

考虑一个垂直电振子(VED),位于具有电导率 ε_1 和磁导率 μ 的介质(半空间)表面。在区域 0 中,电导率为 ε,磁导率为 μ。垂直电场分量 E_z 为,

$$E_z = -\frac{Il}{8\pi\omega\epsilon}\int \mathrm{d}k_\rho \frac{k_\rho^3}{k_z}(1 + R_{01}^{\mathrm{TM}})H_0^{(1)}((k_\rho \rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}$$

其中,

$$1 + R_{01}^{\mathrm{TM}} = \frac{2\varepsilon_1 k_z}{\varepsilon_1 k_z + \varepsilon k_{1z}} = \frac{2\varepsilon_1\sqrt{k^2 - k_\rho^2}}{\varepsilon_1\sqrt{k^2 - k_\rho^2} + \varepsilon\sqrt{k_1^2 - k_\rho^2}}$$

$k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$ 以及 $k_1^2 = \omega^2\mu\varepsilon_1$。与半空间介质中的垂直磁振子积分中没有极点的情况不同,对 VED 有极点。

(1)令被积函数等于 0,得到

$$k_1^4(k^2 - k_\rho^2) = k^4(k_1^2 - k_\rho^2)$$

因此,两个简单极点发生在

$$k_p = \pm\frac{kk_1}{\sqrt{k^2 + k_1^2}}$$

这些被称为 Sommerfeld 极点。当 k 和 k_1 的实部和虚部都为正数时,极点中为正的一个将位于 k_ρ 平面的第一象限,另一个将位于第三象限。

(2)进一步考察积分中的分母发现,Riemann 层中的在 $k_p = k_\rho$ 处的极点 k_z 和 k_{1z}的符号相反。在极点处,

$$k_z = \pm\sqrt{k^2 - k_p^2} = \pm\frac{k_p k}{k_1}$$

$$k_{1z} = \pm\sqrt{k_1^2 - k_p^2} = \pm\frac{k_p k_1}{k}$$

为了确定一个极点位于哪一个 Riemann 层,必须求得变量 k_z 和 k_{1z},考查在 Riemann 层它们需要添加正号还是负号。

(3)考虑在第一象限中的 Sommerfeld 极点。令 k 和 k_1 都具有正的虚部,即有

$$k = |k|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}$$
$$k_1 = |k_1|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_1}$$

并令 δ 和 δ_1 都为正数,对应有损介质。确定 k_p 的幅度和相位如下,

$$\begin{aligned} k_p &= \frac{|k|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}}{[1 + A^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2(\delta-\delta_1)}]^{1/2}} \\ &= |k_p|\exp\left[\mathrm{i}\delta - \frac{\mathrm{i}}{2}\arctan\frac{A^2\sin 2(\delta - \delta_1)}{1 + A^2\cos 2(\delta - \delta_1)}\right] \end{aligned}$$

其中,$A = |k|/|k_1|$,$|k_p| = |k|[1 + 2A^2\cos 2(\delta - \delta_1) + A^4]^{-1/4}$,变量 k_z 和 k_{1z}由此确定为

$$k_z(k_p) = \pm\frac{|k_p||k|}{|k_1|}\exp\left[\mathrm{i}2\delta - \mathrm{i}\delta_1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\arctan\frac{A^2\sin 2(\delta - \delta_1)}{1 + A^2\cos 2(\delta - \delta_1)}\right]$$

$$k_{1z}(k_p) = \pm\frac{|k_p||k_1|}{|k_1|}\exp\left[\mathrm{i}\delta - \frac{\mathrm{i}}{2}\arctan\frac{A^2\sin 2(\delta - \delta_1)}{1 + A^2\cos 2(\delta - \delta_1)}\right]$$

(4)当区域0是自由空间,区域1是只有轻微损耗的介质,则令 $\delta=0,\delta_1\ll 1$,以及 $A^2\ll 1$,得到

$$k_z(k_\rho)=\pm\frac{|k_\rho||k|}{|k_1|}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\delta_1}{1+A^2}\right)$$

$$k_{1z}(k_\rho)=\pm\frac{|k_\rho||k_1|}{|k|}\exp\left(\mathrm{i}\delta_1\frac{1+2A^2}{1+A^2}\right)$$

(5)当区域0是自由空间,区域1是具有高度导电性的介质,即 $k_1\approx(\mathrm{i}\omega\mu\sigma)^{1/2}$,可令 $\delta=0$,$\delta_1=\pi/4$,以及 $A^2\ll 1$,可得到

$$k_z(k_\rho)=\pm\frac{|k_\rho||k|}{|k_1|}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}+\frac{\mathrm{i}}{2}\arctan A^2\right)$$

$$k_{1z}(k_\rho)=\pm\frac{|k_\rho||k_1|}{|k|}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{4}+\frac{\mathrm{i}}{2}\arctan A^2\right)$$

为了求得 $k_z(k_\rho)$和 $k_{1z}(k_\rho)$,需要知道它们相位的取值范围,因为这些相位在对应的 Riemann 层中能分别确定支点切分的选择。

(6)为了研究源于 k 和 k_1 的各种支点切分的选择,可令 k 为复数,如

$$k=k_\mathrm{R}+\mathrm{i}k_\mathrm{I}=|k|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}$$

其中,$k_\mathrm{I}\geqslant 0$ 对应导电介质,表示为

$$\begin{aligned}k_z&=\sqrt{k^2-k_\rho^2}=|k_z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa}\\&=\sqrt{(k_\mathrm{R}^2-k_{\rho\mathrm{R}}^2)-[(k_\mathrm{I}^2-k_{\rho\mathrm{I}}^2+\mathrm{i}2(k_\mathrm{R}k_\mathrm{I}-k_{\rho\mathrm{R}}k_{\rho\mathrm{I}})]}\end{aligned}$$

设根号下的虚部等于0,就可以得到一条使 k_z 要么为实数,要么为纯虚数的曲线。这条曲线就是一条由下式确定的双曲线

$$k_{\rho\mathrm{R}}k_{\rho\mathrm{I}}=k_\mathrm{R}k_\mathrm{I}$$

这条双曲线在 $k_\rho=k_1$ 处的切线的斜率为

$$\frac{\mathrm{d}k_{\rho\mathrm{I}}}{\mathrm{d}k_{\rho\mathrm{R}}}=-\frac{k_\mathrm{I}}{k_\mathrm{R}}=-\tan\delta$$

对 k 左面的双曲线部分,其对应 $k_{z\mathrm{I}}=0$。对 k 右面的双曲线部分,其对应 $k_{z\mathrm{R}}=0$(见图4.7-17)。

(7)围绕支点 k,令 η 是一个很小的数,且

$$k_\rho=k+\eta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$$

忽略 η^2 项得到

$$k_z=|k_z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa}\approx\sqrt{2\eta|k|\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\delta+\beta+(2n+1)\pi]}}$$

这样对 $n=0$,当 β 的值沿逆时针方向由 $-\pi-\delta$ 增至 $\pi-\delta$ 时,κ 的值从0增加到 π。

假设 k 和 k_1 均为复数,考虑源于支点 k 和 k_1 的支点切分。令两个切分都是沿垂直方向的,如图4.7-18所示。由 κ 和 κ_1 表示的 k_z 和 k_{1z}的相位值的变化,在最上面的 Riemann 层中是由围绕 k 和 k_1 的两个圆圈确定的。如果 $k_z(k_\rho)$和 $k_{1z}(k_\rho)$都取正数,使得 κ 和 κ_1 的相位处于 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$,极点就不存在了。

(8)令两条支点切分都沿等相位路径方向延伸,如图4.7-19所示,那么 $k_z(k_\rho)$取负号以使

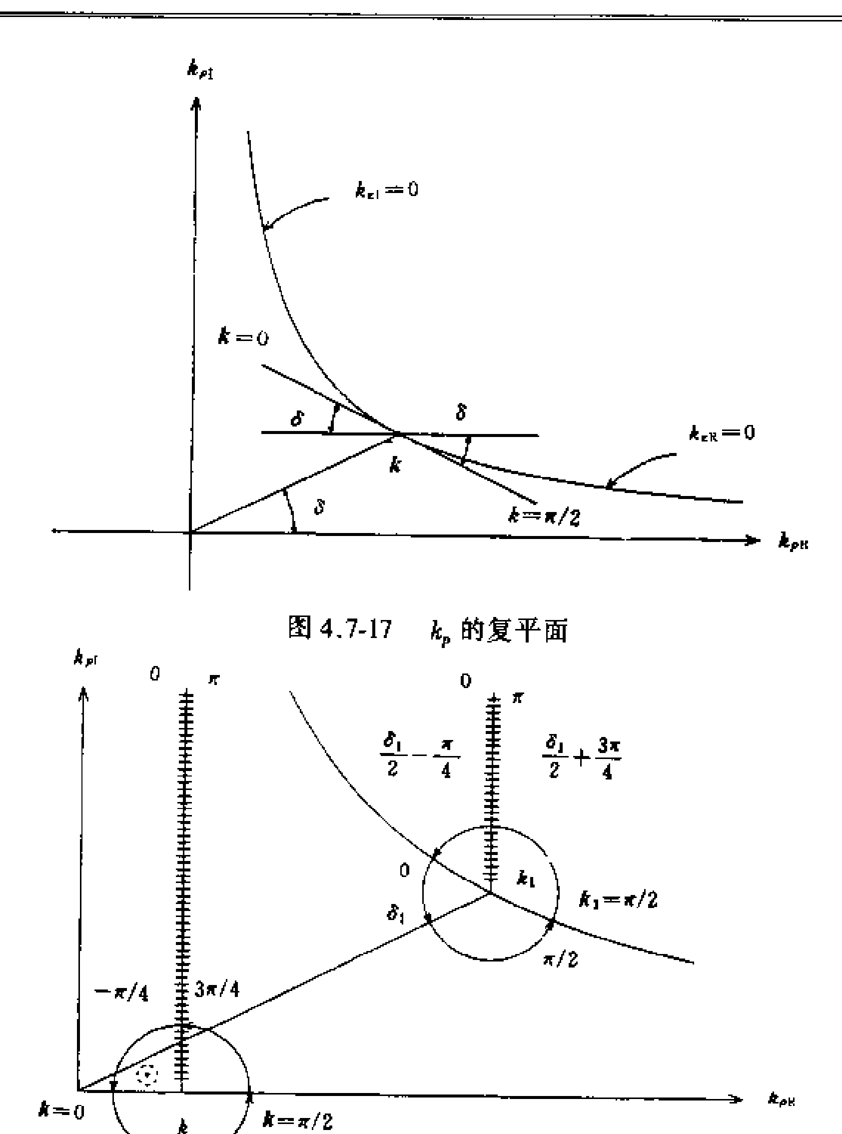


图 4.7-17 k_ρ 的复平面

图 4.7-18 k_ρ 的复平面

得 $\pi/2<\kappa<\pi$；$k_{1z}(k_\rho)$取正号以使得 $0<\kappa_1<\pi/2$，这样极点就又重现。

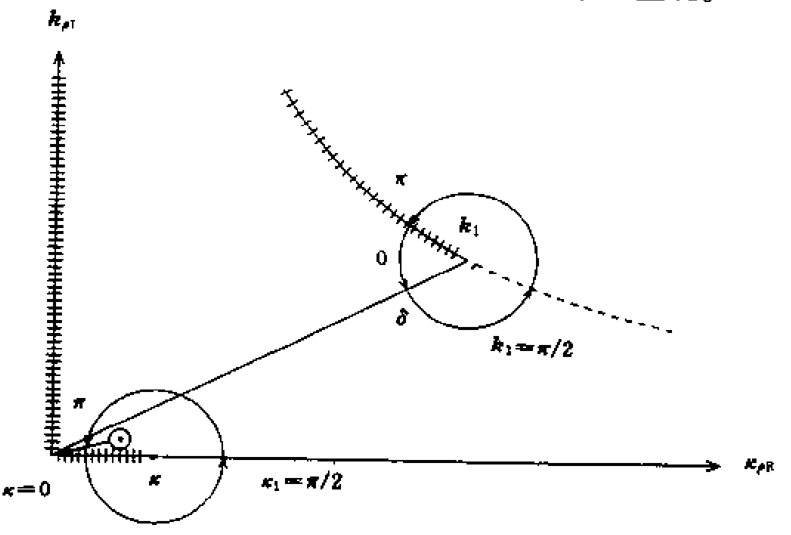


图 4.7-19 k_ρ 的复平面

(9)如图 4.7-20 所示，令源于 $k_\rho=k$ 的支点切分沿着 $k_{zI}=0$ 的路径，源于 $k_\rho=k_1$ 的支点切

分沿着 $k_{1zR}=0$ 的路径，则 $k_z(k_p)$ 就取负号，$k_{1z}(k_p)$ 就取正号，使得极点存在。

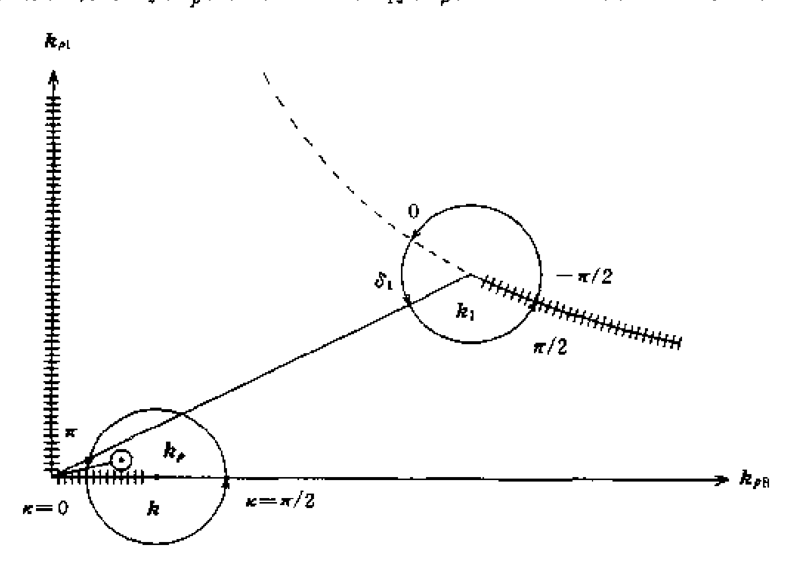


图 4.7-20 k_ρ 的复平面

习题

4.7.1 对较大的 n，从积分定义式

$$n! \approx (2\pi)^{1/2} n^{n+1/2} e^{-n}, \qquad n! = \int_0^\infty dx x^n e^{-x}$$

用拉普拉斯方法，推导出 Stirling 公式。

4.7.2 如果定义在区间 D 上的一个函数 $f(\alpha)$ 的导数 $f'(\alpha)$ 在区间 D 中存在，证明 $f(\alpha)=\alpha^3$ 在各处解析，而 $f(\alpha)=\alpha^*$ 在各处不解析，其中 * 号表示 α 的复数共扼。在证明中可以利用导数的定义

$$f'(\alpha) = \lim_{\Delta\alpha\to 0} \frac{(\alpha+\Delta\alpha)^* - \alpha^*}{\Delta\alpha}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta\alpha_R\to 0\\ \Delta\alpha_I\to 0}} \frac{\Delta\alpha_R - i\Delta\alpha_I}{\Delta\alpha_R + i\Delta\alpha_I}$$

如果 $\Delta\alpha\to 0$ 的极限方式受到限制，导数 $f'(\alpha)$ 不存在。求在趋于 $\alpha=0$ 时沿实轴和沿虚轴两种情况下 $f'(\alpha)$ 的极限。问 $f'(\alpha)$ 是否存在，这个函数是否满足解析 Cauchy-Riemanna 的条件。

4.7.3 利用 Cauchy-Riemann 公式和格林定理

$$\oint_C d\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{A} = \iint_D d\boldsymbol{S}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

证明柯西定理，即如果一个函数 $f(\alpha)$ 在区间 D 上解析，则在沿区间 D 的边界 C 上有

$$\oint_C d\alpha f(\alpha) = 0$$

4.7.4 证明 Jordan 引理，其陈述如下，对 $\alpha>0$，如果

$$\lim_{R\to\infty} Rf(Re^{i\phi}) = 0$$

则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} d\alpha f(\alpha) = 0$$

此外，如果

$$\lim_{R\to\infty} f(Re^{i\phi}) = 0$$

还有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \mathrm{d}\alpha f(\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} = 0$$

其中，C_R 是一个位于上半 α 平面的、半径为 R 的半圆。

4.7.5 应用柯西(Cauchy)定理证明

$$\int_0^\infty \sin\alpha^2 \mathrm{d}\alpha = \int_0^\infty \cos\alpha^2 \mathrm{d}\alpha = \sqrt{\pi/8}$$

考虑

$$\int_0^\infty \cos\alpha^2 \mathrm{d}\alpha + \mathrm{i}\int_0^\infty \sin\alpha^2 \mathrm{d}\alpha = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha^2}\mathrm{d}\alpha$$

并选择如图 4.7-21 所示的路径 C。令 $\theta_0 = \pi/4$ 和 $\alpha = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$，辅助完成证明。

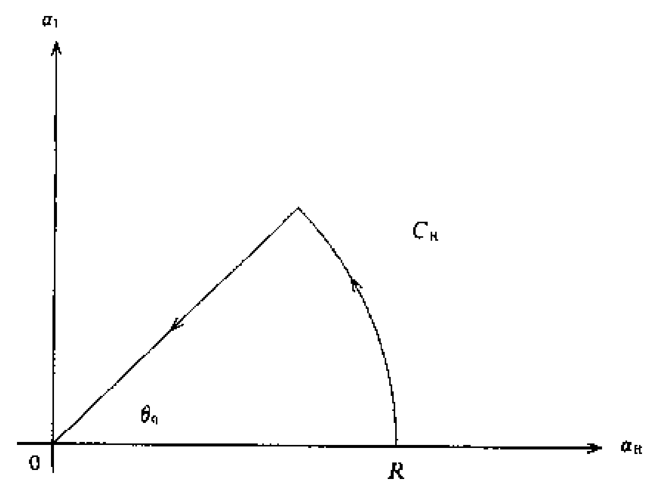


图 4.7-21　路径 C

4.7.6

(1)证明如果 $f(\alpha)$在区域 D 中解析，则 f_R 和 f_I 都满足 Cauchy-Riemann 公式，

$$\frac{\partial f_R}{\partial \alpha_R} = \frac{\partial f_I}{\partial \alpha_I}, \qquad \frac{\partial f_R}{\partial \alpha_I} = -\frac{\partial f_I}{\partial \alpha_R}$$

交叉换位成立的条件是偏微分在整个区域 D 中连续。

(2)找到一个满足 f_R 和 f_I 条件的偏微分方程。

4.7.7 通过选择积分路径，如图 4.7-22 所示，证明

$$I = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}\alpha \frac{\mathrm{e}^{\alpha t}}{\sqrt{\alpha+1}} = \sqrt{\frac{1}{\pi t}}\mathrm{e}^{-t}$$

4.7.8 拉普拉斯方法对分析一个沿实轴的积分的渐近表达式非常有用。求积分

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \mathrm{d}y \frac{y^\alpha \mathrm{e}^{-y}}{1+y}, \qquad \alpha \to \infty$$

4.7.9 驻相法在分析快速振荡的积分渐近解中非常有用。考虑贝塞尔函数的积分的主项特性

$$J_n(\rho) = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho\sin x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x\right\}, \qquad \rho \to \infty$$

当 $\rho\to\infty$ 时，指数项 $\exp(\mathrm{i}\rho\sin x)$快速振荡且在振荡最慢的驻相点 $x = \pi/2$ 附近抵消函数的所有正负值。驻相法表明对积分最大的贡献来自于驻相点 $x = \pi/2$ 附近。将指数项中的 $\sin x$ 函数在 $\pi/2 - \varepsilon \leqslant x \leqslant \pi/2 + \varepsilon$ 附近展开，其中 ε 为一个很小的数，

$$J_n(\rho) \simeq \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\rho - n\pi/2)}\int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2+\varepsilon} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\rho/2)(x-\pi/2)^2}\mathrm{d}x\right\}$$

$$\simeq \mathrm{Re}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\rho-n\pi/2)}\sqrt{\frac{2}{\mathrm{i}\pi\rho}}\right\} = \sqrt{2/\pi\rho}\cos(\rho - n\pi/2 - \pi/4)$$

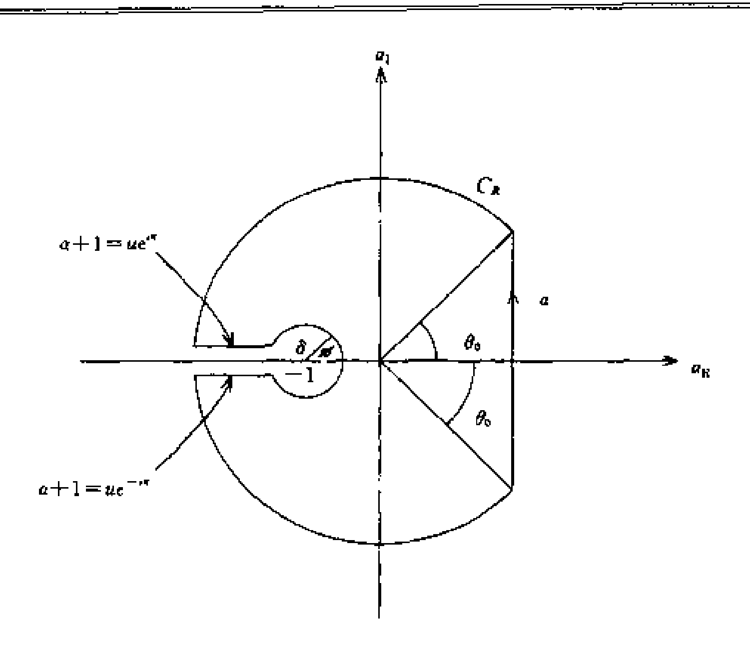


图 4.7-22

4.7.10 对一个线性、时间色散并具有电导率 σ 的介质,有

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0\left[1 + \frac{\mathrm{i}\sigma}{\omega\epsilon_0} + \int_0^\infty \mathrm{d}\tau\xi_e(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\right]$$

(1)积分 $\oint_C \mathrm{d}\alpha[\epsilon(\alpha) - \epsilon_\infty]/(\alpha - \omega)$ 的路径沿实轴上面的半径为无限大的半圆,其直边在实轴上,但是在 $\alpha=\omega$ 和 $\alpha=0$ 两点处内凹。证明 Kramers-Kronig 关系式

$$\epsilon_R(\omega) - \epsilon_\infty = \frac{1}{\pi}\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\alpha\,\frac{\epsilon_I(\alpha)}{\alpha-\omega}$$

$$\epsilon_I(\omega) = -\frac{1}{\pi}\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\alpha\,\frac{\epsilon_R(\alpha) - \epsilon_\infty}{\alpha-\omega} + \frac{\sigma}{\omega}$$

(2)证明上述结果与积分路径在 $\alpha=\omega$ 和 $\alpha=0$ 两奇点处是向内凹还是向外凹无关。

4.7.11 当 $\xi\to\infty$ 时,应用鞍点法求下面积分的渐近值

$$I(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\alpha-\alpha^2}$$

证明渐近级数中的主项即为积分的精确解,而高阶项为渐近级数的误差项。

4.7.12 在 $r\to\infty$ 的极限中,考虑如下积分的渐近特征,

$$I(r) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_\rho A(k_\rho)\frac{k_\rho}{k_z}H_0^{(1)}(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}$$

注意:$k^2 = k_\rho^2 + k_z^2$ 和 $r^2 = \rho^2 + z^2$,另外可用如下变换:

$$k_\rho = k\sin\theta,\qquad \rho = r\sin\theta_0$$

$$k_z = k\cos\theta,\qquad z = r\cos\theta_0$$

(1)证明当计及 $1/r$ 的二阶项时,应用鞍点法 $I(r)$ 的渐近形式为

$$I(r) = \frac{2}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\left\{A(\theta_0) - \frac{\mathrm{i}}{2kr}[A''(\theta_0) + A'(\theta_0)\cot\theta_0]\right\}$$

(2)当 $A(\theta)$ 为常数时,从上述结果中推导出有用的恒等式

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} = \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_\rho\,\frac{k_\rho}{k_z}H_0^{(1)}(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}$$

(3)此外,还可以考虑用对 z 的傅里叶变换求解两个二维和三维格林函数的微分方程,证明

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} = \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_z H_0^{(1)}(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}$$

和

$$H_0^{(1)}(k_\rho) = \frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{r} dz$$

通过改变 k_z 平面上的积分路径，并将第一项积分中的变量改变为 k_ρ，就会重新获得(2)中的恒等式。

4.7.13　在处理形如 Sommerfeld 的积分的时候，通常使用角变量 α，如

$$k_\rho = k\sin\alpha$$

令 k 为正实数，且

$$x = k_{\rho R}/k = \sin\alpha_R \cosh\alpha_I$$

$$y = k_{\rho I}/k = \cos\alpha_R \sinh\alpha_I$$

(1)证明 α 平面中的垂线(α_R = 常数)在映射到 k_ρ 复平面后成为一族共焦点的双曲线，其焦点位于 $x = \pm 1$ 和 $y = 0$。

(2)证明 α 平面中的水平线(α_I = 常数)在映射到 k_ρ 复平面后成为一族共焦点的椭圆，其焦点位于 $x = \pm 1$ 和 $y = 0$。

(3)证明上述椭圆和双曲线相互正交，且整个映射图像 $\{-\pi/2 \leqslant \alpha_R \leqslant \pi/2, -\infty \leqslant \alpha_I \leqslant \infty\}$ 组成完整的 k_ρ 平面。

(4)采用如下定义的椭圆坐标系

$$x = h\cosh\xi\cos\eta$$

$$y = h\sinh\xi\cos\eta$$

求(ξ, η)和(α_R, α_I)的关系。

4.7.14　求解一个位于介电常数为 ϵ_t 的半空间介质上的水平电偶极子的电场。绘出介质中偶极子在平行和垂直于偶极子方向上的辐射方向图。证明：最大的增益在垂直于偶极子且包含其在内的平面内的临界角方向上，并等于 $\arcsin[2/(1+\epsilon_t/\epsilon)]^{1/2}$。

4.7.15　位于涂有介质的理想导体表面的垂直磁偶极子的瞬时磁场 $H_z(\tau)$ 为

$$H_z(\tau) = -\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Re}\left\{ i\int_{-\infty}^{\infty} dk_0 e^{-ik_0\tau} I(k_0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dk_\rho \frac{k_\rho^3}{k_z}(1 + R^{TE}) H_0^{(1)}(k_\rho \rho)\right\}$$

图 4.7-23

其中，

$$1 + R^{\mathrm{TE}} = \frac{(1 + R_{01})(1 - e^{i2k_{1z}d})}{1 - R_{01}e^{i2k_{1z}d}}$$

(1)证明 k_ρ 的积分可以通过 $k_\rho = k_0 + iq$ 将 Sommerfeld 积分路径(SIP)变为最速下降积分路径(SDP),并得到

$$\begin{aligned}H_z(\tau) = & -\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Re}\left\{i\int dk_0 e^{-ik_0\tau}I(k_0)\sum_{\mathrm{Res}}^{k_{z1}\geq 0}\left[\frac{k_\rho^3}{k_z}(1 + R^{\mathrm{TE}})H_0^{(1)}(k_\rho\rho)\right]\right\} - \\ & \frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Re}\left\{i\int dk_0 e^{-ik_0\tau}I(k_0)\sum_{\mathrm{Res}}^{k_{z1}\leq 0}\left[\frac{k_\rho^3}{k_z}(1 + R^{\mathrm{TE}})H_0^{(1)}(k_\rho\rho)\right]\right\} - \\ & \frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Re}\left\{i\int dk_0 e^{-ik_0\tau}I(k_0)\int_0^\infty dq\,\frac{k_\rho^3}{k_z}H_0^{(1)}(k_\rho\rho)\cdot\frac{(1 + R_{01})^2(1 - e^{i2k_{1z}d})^2}{(1 - R_{01}e^{i2k_{1z}d})(R_{01} - e^{i2k_{1z}d})}\right\}\end{aligned}$$

其中 $k_{z1}\geq 0$ 处的留数对应于导波模式,而 $k_{z1}\leq 0$ 处的留数对应于漏波模式。

(2)上面(1)中的二重积分可以通过改变 k_0 平面中的最速下降路径得到,

$$\begin{aligned}H_z(\tau) = & -\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Re}\left\{i\int dk_0 e^{-ik_0\tau}I(k_0)\sum_{\mathrm{Res}}^{k_{z1}\geq 0}\left[\frac{k_\rho^3}{k_z}(1 + R^{\mathrm{TE}})H_0^{(1)}(k_\rho\rho)\right]\right\} - \\ & \frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Re}\left\{i\int dk_0 e^{-ik_0\tau}I(k_0)\sum_{\mathrm{Res}}^{k_{z1}\leq 0}\left[\frac{k_\rho^3}{k_z}(1 + R^{\mathrm{TE}})H_0^{(1)}(k_\rho\rho)\right]\right\} - \\ & \frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Re}\left\{\int dq\sum_{\mathrm{Res}}^{k_{z1}\geq 0}\left[k_0 e^{-ik_0\tau}I(k_0)\,\frac{k_\rho^3}{k_z}(1 + R^{\mathrm{TE}})H_0^{(1)}(k_\rho\rho)\right]\right\} - \\ & \frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Re}\left\{\int dq\sum_{\mathrm{Res}}^{k_{z1}\leq 0}\left[k_0 e^{-ik_0\tau}I(k_0)\,\frac{k_\rho^3}{k_z}(1 + R^{\mathrm{TE}})H_0^{(1)}(k_\rho\rho)\right]\right\} - \\ & \frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Re}\left\{i\int dp\,p e^{-p\tau}I(ip)\int dq\,\frac{k_\rho^3}{k_z}H_0^{(1)}(k_\rho\rho)\cdot\frac{(1 + R_{01})^2(1 - e^{i2k_{1z}d})^2}{(1 - R_{01}e^{i2k_{1z}d})(R_{01} - e^{i2k_{1z}d})}\right\}\end{aligned}$$

其中,$k_\rho = i(q - p)$。证明对 $\tau < \rho$,第一项和第三项互相抵消,第二项和第四项互相抵消,且最后一项等于零。这样 $H_z(\tau) = 0$,得到因果关系。

部分习题答案

4.2.1 $C = i/2k$.

4.3.1

(1)求由 $\boldsymbol{J}_1 = \hat{x}Il\,\delta(\boldsymbol{r})$ 和 $\boldsymbol{J}_2 = \hat{y}iIl\,\delta(\boldsymbol{r})$ 产生的 $\boldsymbol{E}$ 场:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= i\omega\mu\left[\boldsymbol{I} + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right]\cdot\iiint dV'\,\frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}(\hat{x} + i\hat{y})Il\,\delta(\boldsymbol{r}') \\ &= i\omega\mu Il\left[(\hat{x} + i\hat{y}) + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot(\hat{x} + i\hat{y})\right]\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \\ &= i\omega\mu\frac{Il}{4\pi}\left[(\hat{x} + i\hat{y}) + \frac{1}{k^2}\nabla\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\frac{e^{ikr}}{r}\end{aligned}$$

在球坐标系中,矢量 $(\hat{x} + i\hat{y})$ 为

$$\begin{aligned}\hat{x} + i\hat{y} &= \hat{r}\sin\theta(\cos\phi + i\sin\phi) + \hat{\phi}(i\cos\phi - \sin\phi) + \hat{\theta}(\cos\phi + i\sin\phi)\cos\theta \\ &= \hat{r}e^{i\phi}\sin\theta + \hat{\theta}e^{i\phi}\cos\theta + \hat{\phi}ie^{i\phi}\end{aligned}$$

一些关于 (e^{ikr}/r) 的算子

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) = \sin\theta\cos\phi\left(ik - \frac{1}{r}\right)\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$i\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) = i\sin\theta\sin\phi\left(ik - \frac{1}{r}\right)\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) = e^{i\phi}\sin\theta\left(ik - \frac{1}{r}\right)\frac{e^{ikr}}{r}$$

电场 $\boldsymbol{E}$ 为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \mathrm{i}\omega\mu Il\left\{\hat{\boldsymbol{r}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sin\theta + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sin\theta\,\frac{1}{k^2}\left(-k^2 - \frac{2\mathrm{i}k}{r} + \frac{2}{r^2}\right)\right] + \right.\\ &\left.\hat{\boldsymbol{\theta}}\left[1 + \frac{\mathrm{i}}{kr} - \frac{1}{k^2r^2}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\cos\theta + \mathrm{i}\hat{\boldsymbol{\phi}}\left[1 + \frac{\mathrm{i}k}{kr} - \frac{1}{k^2r^2}\right]\right\}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\\ &= -\eta\,\frac{\mathrm{i}kIl\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\left\{\hat{\boldsymbol{r}}\left[\frac{\mathrm{i}}{kr} + \left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^2\right]2\sin\theta - \right.\\ &\left.\hat{\boldsymbol{\theta}}\left[1 + \frac{\mathrm{i}}{kr} + \left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^2\right]\cos\theta - \hat{\boldsymbol{\phi}}\mathrm{i}\left[1 + \frac{\mathrm{i}}{kr} + \left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^2\right]\right\}\end{aligned}$$

(2)在 x-y 平面($\theta = \pi/2$)的远场中,公式将上式变为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \eta\,\frac{\mathrm{i}kIl\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}(\hat{\boldsymbol{\phi}}i) = -\hat{\boldsymbol{\phi}}\eta kIl\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$$

在 x-y 平面中,$\boldsymbol{k} = k_\rho\hat{\rho}$(径向方向)且 $r = \rho$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = Re\left\{-\hat{\boldsymbol{\phi}}\,\frac{\eta k_\rho Il}{4\pi\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\rho\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right\} = -\hat{\boldsymbol{\phi}}\,\frac{\eta k_\rho Il}{4\pi\rho}\cos(\omega t - \phi - k_\rho\rho)$$

这样 $\boldsymbol{E}$ 就是线极化的。

(3)在 x-y 平面($\theta = \pi/2$)的远场中,

$$\langle \boldsymbol{S}\rangle_\rho = \frac{\eta}{2}\left(\frac{kIl}{4\pi r}\right)^2$$

这样,在 x-y 平面中的辐射方向图就是一个圆。

(4)对 $\theta = 0°$并在远场中

$$\boldsymbol{E} = \eta\,\frac{\mathrm{i}kIl\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}(\hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathrm{i}\hat{\boldsymbol{\phi}})$$

这样,电场 $\boldsymbol{E}$ 就是右旋圆极化的。

(5)

$$\langle \boldsymbol{S}\rangle_z = \hat{z}2\,\frac{\eta}{2}\left(\frac{kIl}{4\pi r}\right)^2$$

这样,在 z 方向上的辐射功率密度是 x 方向上的两倍。

4.3.2

(1) $\boldsymbol{B}_0 = \hat{z}\omega/\gamma$。

(2) $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{k^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\left[\boldsymbol{M}\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{kr} - \frac{1}{k^2r^2}\right)\right]$。

(3) $V = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B}(z = d, t) = \frac{\omega k^2\mu M_0 A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{kr} - \frac{1}{k^2r^2}\right)\sin\omega t$。

由于 $\omega = \gamma B_0$,感应电压直接与所提供的直流电压成正比。

4.3.3

(2) $U(\omega) = \omega\mu M_0 R^2/2(d^2 + R^2)$。由于 $\omega = \gamma B_0$,需要一个较大的 B_0 用来产生较大的电压。

(3) $\Delta B_0 = \Delta\omega/\gamma$。

(4) $\delta = \Delta\omega/b_1\gamma$。

(5) $\Delta\omega = b_1\delta\gamma = 1.0\times0.5\times10^{-3}\times2.7\times10^8 = 1.35\times10^5$ rad/s = 21.5 kHz。

4.4.1

边射方向 $\alpha = 0$, 20dB 副瓣电平,$R = 10$。$b = \cosh(1/6\mathrm{arccosh}\ 10)$,激励参数为:

$$a_3 = b^6/2,\ a_2 = 3b^4(b^2 - 1),\ a_1 = (3/2)b^2(5b^2 - 3)(b^2 - 1)$$

$T_6(x)$的零点在 $x_1 = \cos(\pi/12) = 0.966$,第一零点瓣宽为(BW) = 40.2°,且增益系数 $D = 6.66$;对 $d = \lambda/4$,(BW) = 87°,$D = 3.3871$。

4.4.2

(1)波束宽度 = $2(\psi_0 - 90°) = 75°$。

(2) $a_0 = 3b^4 - 4b^2 + 1 = 10.552$,

$a_1 = 2b^4 - 2b^2 = 8.0825$; $a_2 = b^4/2 = 3.3064$。

(3) $d = \lambda/3, kd = 2\pi/3, b = 1.6036, \psi_0 = \arccos(u_0/kd) = 23.98°$,波束宽度 $= 2\times(\psi_0 - 90°) = 132°$。

(4) 波束宽度 $= 2(90° - \psi_0) = 111°$。不存在比可视区中第一个副瓣更高的副瓣,因为没有另外的局部最大值,且可视区边缘为 $|P_4(0.74715)| = 0.7888 < 0.9979$。

波束宽度小于 Dolph-Tchebyscheff 的波束宽度(132°)。当 $d < \lambda/2$ 时 Dolph-Tchebyscheff 阵列并不是最优的,这是因为 $T_4(n)$的可视区的全部区域并没有被充分利用。激励参数为:$a_0 = 10.5625$; $a_1 = 6.9624$; $a_2 = 4.4251$。

(5)激励参数为:$a_2 = b^2/2 = 5.8783$; $a_1 = 2bc = 4.8992$, $a_0 = 2c^2 + b^2 - 1 = 11.7775$。波束宽度 $= 2(\psi_0 - 90°) = 97.4°$。

	单元数	副瓣电平	波束宽度
Dolph-Tchebyscheff 阵列	5	−30.4	132°
P_4 阵列	5	−30.4	111°
Riblet-Tchebyscheff 阵列	5	−30.4	97°

4.4.3

(1) $|\bar{F}(0)| = \left|\cot\dfrac{\pi}{2(N-1)}\right| \simeq \dfrac{2}{\pi}(N-1),\ N\to\infty$

(2)

	副瓣	位置(u)	副瓣	电平(dB)
N	准确值	近似值	准确值	近似值
6	2.449	2.374	−18.46	−23.00
10	1.330	1.319	−21.70	−23.00
15	0.851	0.848	−22.47	−23.00
50	0.242	0.242	−22.96	−23.00

(3)对所有 α, $D = 3.789$。

4.4.4

(1)

$$\begin{aligned}P(\xi) &= |\bar{F}(u)|^2\\ &= |0.492\,999\,0 + 0.448\,914e^{-iu} + 0.138\,187e^{-i2u} - 0.0630\,965e^{-i3u}|^2\\ &= |-0.063\,096\,5 + 0.138\,187e^{-iu} + 0.448\,914e^{-i2u} + 0.492\,999\,0e^{-i3u}|^2\\ &= |-0.115\,204\,6 + 0.361\,175e^{-iu} + 0.501\,022e^{-i2u} + 0.270\,011e^{-i3u}|^2\\ &= |0.270\,011 + 0.501\,022e^{-iu} + 0.361\,175e^{-i2u} - 0.115\,204\,6e^{-i3u}|^2\end{aligned}$$

(2) $\epsilon_{max} \leqslant \dfrac{1}{4!}\cdot\dfrac{4!}{1\cdot3\cdot5\cdot7}\cdot 12 = 0.1143$。

$\epsilon_{max} = 0.04189$ 发生在可视区的边界上($x = -1$)。实际最大误差为 $\epsilon(0) = |L(0) - G(0)| \approx 0.0203$。

4.4.5

$$\begin{aligned}P(\xi) &= |\bar{F}(u)|^2\\ &= |0.436\,065 + 0.502\,108e^{-iu} + 0.131\,602\,7e^{-i2u} - 0.069\,775\,3e^{-i3u}|^2\\ &= |-0.069\,775\,3 + 0.131\,602\,7e^{-iu} + 0.502\,108e^{-i2u} + 0.436\,065e^{-i3u}|^2\\ &= |-0.107\,769\,9 + 0.285\,339e^{-iu} + 0.540\,102e^{-i2u} + 0.282\,329e^{-i3u}|^2\\ &= |0.282\,329 + 0.540\,102e^{-iu} + 0.285\,339e^{-i2u} - 0.107\,769\,9e^{-i3u}|^2\end{aligned}$$

4.4.6

$$G(u) \simeq D(\xi_0 - \xi)(\xi + \xi_1)(\xi + \xi_2) \triangleq P(\xi)$$

$$D = 0.006\,794\,01$$

$$\xi_0 = 8.483\,269$$

$$\xi_1 = 3.431\,809$$

$$\xi_2 = 2.179\,603$$

4.5.1

(1)在远场条件的假设下

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \approx \frac{I_0 k_\rho}{4\omega\epsilon}\sqrt{\frac{2}{\pi k_\rho \rho}}[\hat{\boldsymbol{\rho}}k_z - \hat{\boldsymbol{z}}k_\rho]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k_\rho\rho + k_z z - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \approx \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{I_0 k_\rho}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi k_\rho \rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k_\rho\rho + k_z z - \frac{\pi}{4}\right)}$$

(2)远场中的坡印廷矢量为

$$\boldsymbol{S} \approx \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^* = \frac{I_0^2 \mid k_\rho \mid^2}{16\omega\epsilon}\left(\frac{2}{\pi k_\rho \rho}\right)(\hat{\boldsymbol{z}}k_z + \hat{\boldsymbol{\rho}}k_\rho)$$

如果 $k_\rho^2 = k^2 - k_z^2$, $k_z > k$ 它将变为纯虚数,没有径向功率传输。

(3)当 $k_z > k$ 时,等相位面的方程为

$$k_\rho \rho + k_z z = \text{常数}$$

当 $k_z > k$ 时,等相位面的方程变为 $k_z z = \mathrm{const}$(常数)或 $z = \mathrm{const}$。它是一个垂直于电流的平面。

4.5.2

$\boldsymbol{E} = -\hat{\boldsymbol{\theta}}\dfrac{\mathrm{i}\omega\mu 2 I_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi kr\sin\theta}[\cos(kl\cos\theta) - \cos(kl)]$。在 $\theta = 0$ 时 $E = 0$,π 由 L'Hopital 定律得到。对 $kl = 3\pi/2$,在 $\cos\theta = \pm 1/3$ 处, $kl = 3\pi/2$,零点发生在 $\cos\theta = \pm 1/3$。

4.5.3

$R_r \approx 60\left\{\gamma + \ln 2 + \dfrac{\gamma}{2}\cos(2kl) - \dfrac{\pi}{4}\sin(2kl) + \left[1 + \dfrac{1}{2}\cos(2kl)\right]\ln(kl)\right\}$。

4.5.4

(1)$R_r = 73\Omega$。

(2)当 $kl \to 0$, $R_r \approx 5(kl)^2$。

4.6.1

$u \approx \dfrac{m\pi}{\dfrac{\pi}{2} - \theta_0} - \dfrac{1}{2}$, $\theta_0 \to \dfrac{\pi}{2}$。

4.6.2

(2)径向方向每一单位距离上的电容 $C = \dfrac{q}{V} = \dfrac{2\pi\epsilon}{\ln\left[\dfrac{\cot(\theta_0/2)}{\cot\dfrac{\pi - \theta_1}{2}}\right]}$。

径向方向每一单位距离上的电感 $L = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\left[\dfrac{\cot(\theta_0/2)}{\cot\left(\dfrac{\pi - \theta_1}{2}\right)}\right]$。

4.7.2

如果 $\Delta\alpha$ 从实轴趋向于 0,则 $\Delta\alpha_I = 0$,且 $f'(\alpha) = 1$。如果 $\Delta\alpha$ 从虚轴趋向于 0,则 $\Delta\alpha_R = 0$,且 $f'(\alpha) = -1$。这两个结果是不同的,因此 $f'(\alpha)$不存在。对解析函数的 Cauchy-Riemann 条件不能满足。

4.7.6

f_R 和 f_I 都满足拉普拉斯方程: $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial\alpha_R^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial\alpha_I^2}\right)\begin{bmatrix} f_R(\alpha_R, \alpha_I) \\ f_I(\alpha_R, \alpha_I) \end{bmatrix} = 0$。

4.7.10

(1)

$$\epsilon_R(\omega)-\epsilon_\infty=\frac{1}{\pi}\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\alpha\,\frac{\epsilon_I(\alpha)}{\alpha-\omega}。$$

$$\epsilon_I(\omega)=-\frac{1}{\pi}\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\alpha\,\frac{\epsilon_R(\alpha)-\epsilon_\infty}{\alpha-\omega}+\frac{\sigma}{\omega}。$$

(2)将积分路径选在实轴 α 上并在 $\alpha=0$ 处向下凹,在 $\alpha=w$ 处向上凹。留数的计算同(1)。然而,在 $\alpha=0$ 处的留数应该乘以 πi 而不是 $-\pi$i。此外,在 $\alpha=0$ 处的留数还应该乘以 2πi 因为积分路径现在包括了极点 $\alpha=0$。在相互抵消以后,我们得到同样的结果。类似地,如果路径包括了 $\alpha=\omega$,不包括 $\alpha=0$,或即包括 $\alpha=\omega$ 又包括 $\alpha=0$,我们也可以得到同样的结果。

4.7.11

令 $F(\alpha)=1$ 以及 $F(\alpha)=\mathrm{i}\alpha-\alpha^2/\xi$,鞍点位于 $\alpha_0=\mathrm{i}\xi/2$。因此有

$$I(\xi)=F(\alpha_0)\mathrm{e}^{\xi f(\alpha_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{-\xi f''}}=\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{\frac{-\xi^2}{4}}$$

变化积分的变量为 $u=\alpha-\mathrm{i}\xi/2$,可以得到精确的解。

4.7.12

(1)为了得到 $I(r)$ 的 $1/r$ 的二阶项,我们需要达到 $\rho^{-3/2}$ 阶的 $H_0^{(1)}(k_\rho\rho)$ 的近似解。由于

$$\begin{aligned}I(\xi)&=\int_\Gamma\mathrm{d}\alpha F(\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cos(\alpha-\alpha_0)}\\&=F(\alpha_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}\sqrt{\frac{2\pi}{\mathrm{i}\xi}}\left[1-\frac{\mathrm{i}}{2\xi}\left(\frac{1}{4}+\frac{F''}{F}\right)+\cdots\right]\end{aligned}$$

首先,我们得到 $H_0^{(1)}(k_\rho\rho)$

$$H_0^{(1)}(k_\rho\rho)\approx\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\rho\rho}\sqrt{\frac{2}{\mathrm{i}\pi k_\rho\rho}}\left(1-\frac{\mathrm{i}}{8k_\rho\rho}\right)+O(\rho^{-5/2})$$

现有

$$I(r)=\int_\Gamma\mathrm{d}\theta F(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos(\theta-\theta_0)}$$

$$F(\theta)\approx A(\theta)\sqrt{k\sin\theta}\sqrt{\frac{2}{\mathrm{i}\pi r\sin\theta_0}}\left(1-\frac{i}{8kr\sin\theta\sin\theta_0}\right)+O(r^{-5/2})$$

我们得到

$$\frac{F''}{F}\approx\frac{A''}{A}+\frac{A'\cot\theta}{A}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cot^2\theta+O(r^{-1})$$

$$\frac{1}{4}+\frac{F''}{F}\approx\frac{A''}{A}+\frac{A'}{A}\cot\theta-\frac{1}{4}\csc^2\theta+O(r^{-1})$$

以及

$$\begin{aligned}I(r)&\approx\left[A(\theta_0)\sqrt{\frac{2k}{\mathrm{i}\pi r}}\left(1-\frac{\mathrm{i}}{8kr\sin^2\theta_0}\right)+O(r^{-5/2})\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\sqrt{\frac{2\pi}{\mathrm{i}kr}}\cdot\\&\quad\left\{1-\frac{\mathrm{i}}{2kr}\left[\frac{A''(\theta_0)}{A(\theta_0)}+\frac{A'(\theta_0)}{A(\theta_0)}\cot\theta_0-\frac{1}{4\sin^2\theta_0}+O(r^{-1})\right]\right\}\\&\approx\sqrt{\frac{2}{\mathrm{i}}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\left\{A(\theta_0)-\frac{\mathrm{i}}{2kr}[A''(\theta_0)+A'(\theta_0)\cot\theta_0]\right\}+O(r^{-3})\end{aligned}$$

对 $1/r^2$ 阶近似,可以写出

$$I(r)=\frac{2}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\left\{A(\theta_0)-\frac{\mathrm{i}}{2kr}[A''(\theta_0)+A'(\theta_0)\cot\theta_0]\right\}$$

(2)令 $A(\theta)\equiv 1$,则所有高阶项消失。有

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dk_\rho \frac{k_\rho}{k_z} H_0^{(1)}(k_\rho \rho) e^{ik_z z}$$

(3)在圆柱坐标系中

$$\begin{cases} \nabla^2 = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho}\rho\dfrac{\partial}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \delta(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\delta(\rho)}{2\pi\rho}\delta(z) \end{cases}$$

对 z 的傅里叶变换定义为

$$\tilde{f}(k_z) = \int_{-\infty}^{\infty} dz f(z) e^{-ik_z z}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \to -k_z^2$$

$$\nabla^2 + k^2 \to \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\rho\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + k_\rho^2$$

$$\delta(z) \to 1$$

在傅里叶变换以后,我们有

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\rho\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + k_\rho^2\right]\tilde{g}(k_z,\rho,\phi) = -\frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho}$$

没有与 f 相关的部分是由于其轴对称性,由此发现

$$\tilde{g}(k_z,\rho) \equiv \frac{i}{4}H_0^{(1)}(k_\rho \rho)$$

解 $g(\boldsymbol{r})$可以通过傅里叶反变换得到

$$g(\boldsymbol{r}) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_\rho \rho) e^{ik_z z}$$

由此得到

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dk_z H_0^{(1)}(k_\rho \rho) e^{ik_z z}$$

从另一个角度看,

$$\tilde{g}(k_z,\rho) = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(k_\rho \rho) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik_z z}$$

利用 $k_z = 0$, $k_\rho \to k$,有

$$H_0^{(1)}(k\rho) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{ikr}}{r}$$

为了获得(2)中的 Sommerfeld 恒等式,可改变 k_z 平面上,由 $\mathrm{Im}(k_\rho)$确定的在 Sommerfeld 支点切分附近的 $g(\boldsymbol{r})$ 的积分路径,使其落在实数的 kz 的方向上。其 Sommerfeld 支点切分 $\mathrm{Im}(k_\rho) = 0 \Rightarrow k_{zR}k_{zI} = 0$ 和 $k^2 - k_{zR}^2 + k_{zI}^2 > 0$。做变量代换 $k_\rho = \sqrt{k^2 - k_z^2} \Rightarrow dk_\rho = -\frac{k_z}{k_\rho}dk_z$。有

$$k_\rho^2 = (k^2 - k_{zR}^2 + k_{zI}^2) - 2ik_{zR}k_{zI}$$

因此,在 k_z 平面上 Riemann 层中,Sommerfeld 支点切分对应着 k_ρ 的实轴,从 $k_\rho \to -\infty$ 到 $k_\rho \to +\infty$。

路径 L 对应 k_ρ 平面中的实轴。

点 A 对应的 $k_\rho \to +\infty$。

点 B 对应的 $k_\rho \to -\infty$。

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dk_z H_0^{(1)}(k_\rho \rho) e^{ik_z z}$$

$$\frac{i}{2}\left(\int_{R_1} + \int_{R_2} + \int_L\right) dk_z H_0^{(1)}(k_\rho \rho) e^{ik_z z}$$

注意,根据收敛条件,上述变化的路径是在 $z>0$ 条件下的。根据 Jordan 引理

$$\left(\int_{R_1}+\int_{R_2}\right)\mathrm{d}k_z H_0^{(1)}(k_\rho \rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}=0$$

现在可以考虑沿路径 L 的积分,做下面变量代换 $k_\rho=\sqrt{k^2-k_z^2}\Rightarrow \mathrm{d}k_\rho=-\dfrac{k_z}{k_\rho}\mathrm{d}k_z$。有

$$k_\rho^2=(k^2-k_{zR}^2+k_{zI}^2)-2\mathrm{i}k_{zR}k_{zI}$$

利用变量代换,得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}&=\frac{\mathrm{i}}{2}\int_L \mathrm{d}zH_0^{(1)}(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}\\&=\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{\infty}^{-\infty}-\frac{k_\rho}{k_z}\mathrm{d}k_\rho H_0^{(1)}(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z})\\&=\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_\rho\frac{k_\rho}{k_z}H_0^{(1)}(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}\end{aligned}$$

对 $z<0$,可用相似的方法以及适当的收敛条件证明恒等式。

4.7.13

(1) 当 α_R 为常数,我们求得

$$\frac{k_\rho^2R}{(k\sin\alpha_R)^2}-\frac{k_{\rho I}^2}{(k\cos\alpha_R)^2}=1$$

这是一个共焦点的双曲线族,$\sin^2\alpha_R+\cos^2\alpha_R=1$。

(2) 当 α_I 为常数,我们求得

$$\frac{k_{\rho R}^2}{(k\cosh\alpha_I)^2}+\frac{k_{\rho I}^2}{(k\sinh\alpha_I)^2}=1$$

这是一个共焦点的椭圆族 $\cosh^2\alpha_R-\sinh^2\alpha_R=1$。

(3) 从椭圆和双曲线在任意一点(x_0,y_0)的切线方程,可以容易地证明它们相互正交。因为 α 平面的集合可以映射为 $-\infty<k_{\rho R}<\infty$, $-\infty<k_{\rho I}<\infty$ 整个区域。因此,它是整个 k_ρ 平面的映射。

第 5 章　关于波和介质的定理

5.1　等效原理

当只研究一个有限的空间区域时，可以应用等效源来置换此空间以外不感兴趣的全部区域。这时既可以把等效源放置在不感兴趣的区域内，也可以把等效源放置在感兴趣区域的边界上。这样的等效源不是惟一的，而有很多不同的构成方法。需要确保的是使全部边界条件都得到满足，并使感兴趣区域内原来的场和源保持不变。如果两种不同性质的源能在所研究的区域内给出同样的解（在这个区域之外肯定会给出不同的解），则称它们是等效的。

5.1.1　电偶极子和磁偶极子

一个小电流环（见图 5.1-1a），只要它被一个小体积包围，而且我们对此体积的内部不感兴趣，就可以看做是一个磁偶极子（见图 5.1-1b）。小电流环和磁偶极子在包围它们的小体积外相同，只有在深入到源的内部时，小电流环与磁偶极子才会有区别——小环内部的磁场指向与磁偶极子的指向相反。如同电偶极子是构成电流源的基本单元，磁偶极子也是构成磁流源的基本单元。我们用双箭头表示磁偶极子（见图 5.1-1c），用单箭头表示电偶极子（见图 5.1-1d）。

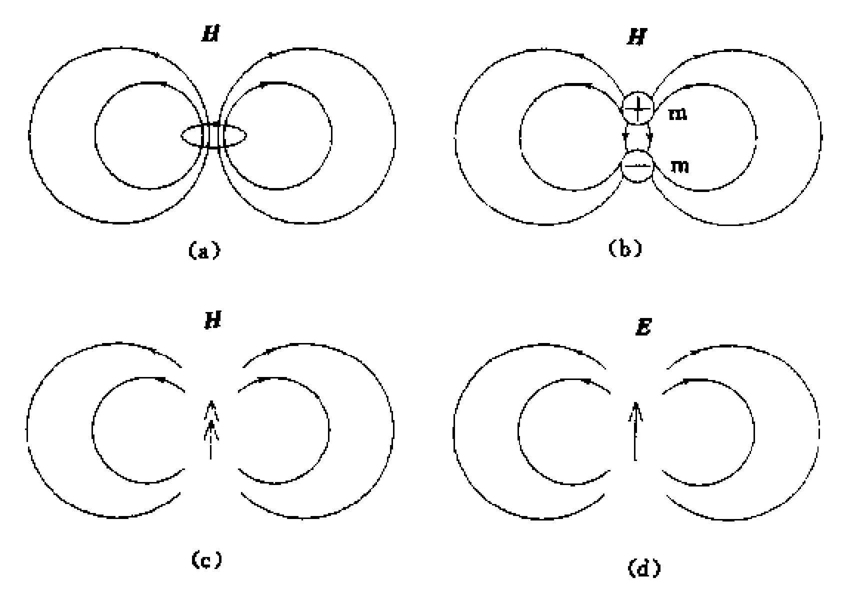


图 5.1-1　相互等效的一个小电流环(a)和一个磁偶极子(b)。一个用双箭头表示的磁偶极子(c)，一个用单箭头表示的电偶极子(d)

5.1.2　镜像源

考虑如图 5.1-2(a)所示放在理想导体前的基本偶极子。欲求导体前半空间内的解，可以

用偶极子的镜像代替平面导体。镜像源必须满足导电表面上切向电场为零的边界条件。对电偶极子的镜像,用起始于负电荷,终止于正电荷的单箭头表示,正电荷的镜像为负电荷。反之也是如此。对代表电流环的磁偶极子,一个运动的正电荷的镜像,为一运动的负电荷。图 5.1-2(a)中的 4 种偶极子,其镜像均示于图 5.1-2(b)。注意借助于镜像源所得到的解,只在感兴趣的区域内有效,镜像区内无效。因为镜像区为理想导体,那里的解应为零。

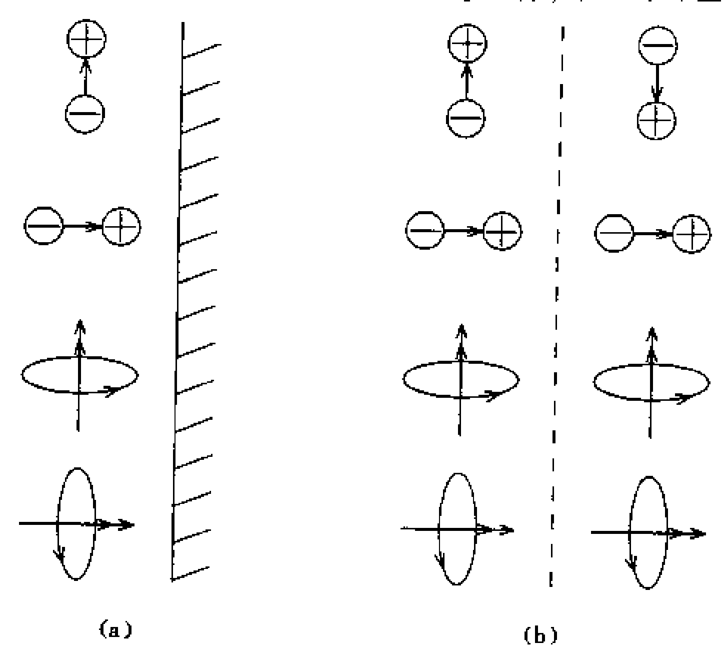


图 5.1-2 (a)导电体前的偶极子源,(b)真实源及其镜像源

作为对偶情况,可定义一切向磁场趋于零的导磁表面。图 5.1-3(a)中用扭动线表示导磁体,其基本偶极子源的镜像示于图 5.1-3(b)。

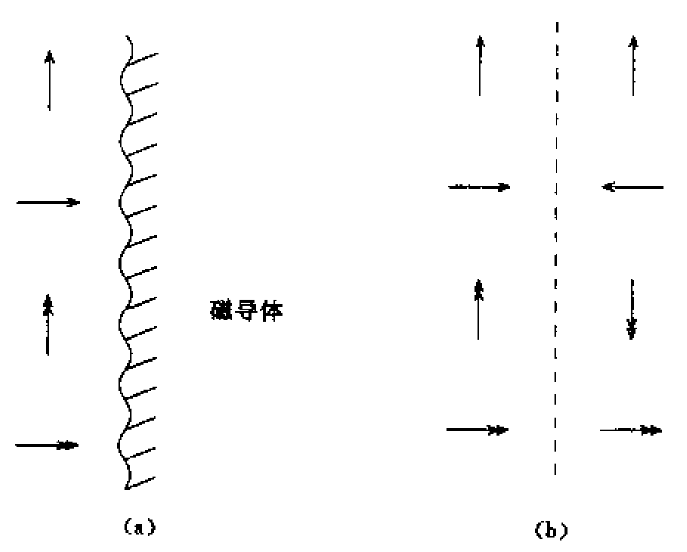


图 5.1-3 (a)导磁体前的偶极子源,(b)真实源及其镜像源

作为镜像法的最后一个例子,考虑如图 5.1-4(a)所示的放置于一对平行导电板之间的电偶极子。为满足两导电板表面的边界条件,必须有如图 5.1-4(b)所示的多重镜像源。由此所得的解仅在两板间的区域内有效。

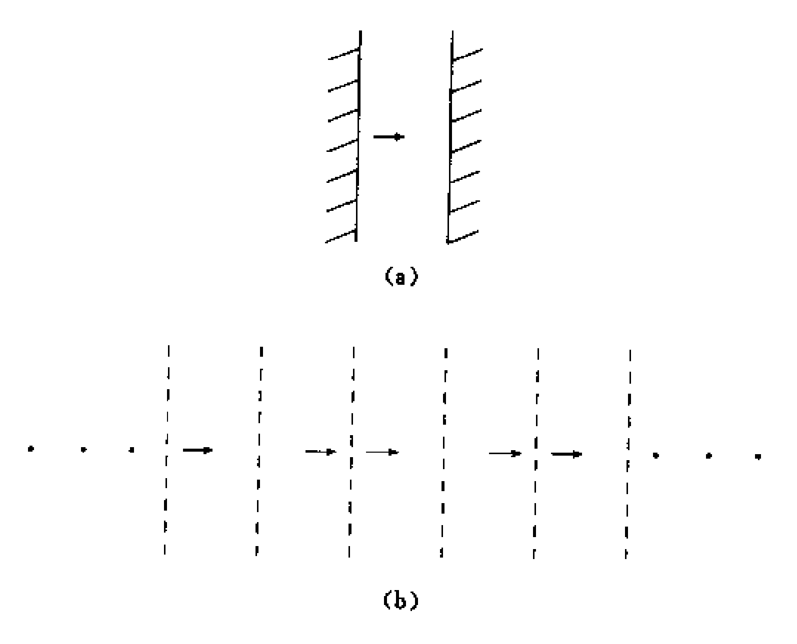


图 5.1-4　(a)两导电体间的偶极子,(b)真实源及其镜像源

5.1.3　面电流和面磁流

当应用等效源代替边界面时,就需要同时有面电流和面磁流。面电流 $\boldsymbol{J}_s$ 由边界上切向磁场分量的不连续性引起

$$\boldsymbol{J}_s = \hat{\boldsymbol{n}} \times \delta \boldsymbol{H}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 是表面的法向(单位矢量),$\delta \boldsymbol{H}$ 是边界上两磁场分量之差。面磁流 $\boldsymbol{M}_s$ 由边界上切向电场分量的不连续性引起

$$\boldsymbol{M}_s = -\hat{\boldsymbol{n}} \times \delta \boldsymbol{E}$$

注意, 由 $\boldsymbol{M}_s$ 的定义可知,绕磁流元 $\boldsymbol{M}_s$ 的电场环路方向服从左手定则,而绕电流元 $\boldsymbol{J}_s$ 的磁场环路方向则服从右手定则。

考虑面电流在 $z=0$(见图 5.1-5a)处的密度 $\boldsymbol{J}_s = -\hat{x}J_s$。这个面电流在正负 $\hat{z}$ 两个方向上产生的平面波为

$$\boldsymbol{E} = \hat{x}\frac{\eta}{2}J_s e^{ikz}, \qquad \boldsymbol{H} = \hat{y}\frac{1}{2}J_s e^{ikz}, \qquad z > 0$$

$$\boldsymbol{E} = \hat{x}\frac{\eta}{2}J_s e^{-ikz}, \qquad \boldsymbol{H} = -\hat{y}\frac{1}{2}J_s e^{-ikz}, \qquad z < 0$$

由图 5.1-5 可见,在 $z=0$ 处切向电场连续,而切向磁场在边界两侧的不连续性等于而电流的密度 $\hat{\boldsymbol{n}} \times \delta \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_s$,于是,全部边界条件均得到满足。

作为对偶情况,考虑一面磁流,它在 $z=0$(图 5.1-5b)处的面电流密度 $\boldsymbol{M}_s = -\hat{y}M_s$。此时边界条件要求边界上切向磁场连续,面切向电场的不连续性等于而磁流的密度 $-\hat{\boldsymbol{n}} \times \delta \boldsymbol{E} = \boldsymbol{M}_s$,其解如下。

$$\boldsymbol{E} = \hat{x}\frac{M_s}{2}e^{ikz}, \qquad \boldsymbol{H} = \hat{y}\frac{M_s}{2\eta}e^{ikz} \qquad z > 0$$

$$\boldsymbol{E} = -\hat{x}\frac{M_s}{2}e^{-ikz}, \qquad \boldsymbol{H} = \hat{y}\frac{M_s}{2\eta}e^{-ikz} \qquad z < 0$$

平面波向正、负 $\hat{z}$ 两个方向辐射。注意,若适当选择面电流的相位,可在任一方向上产生平面

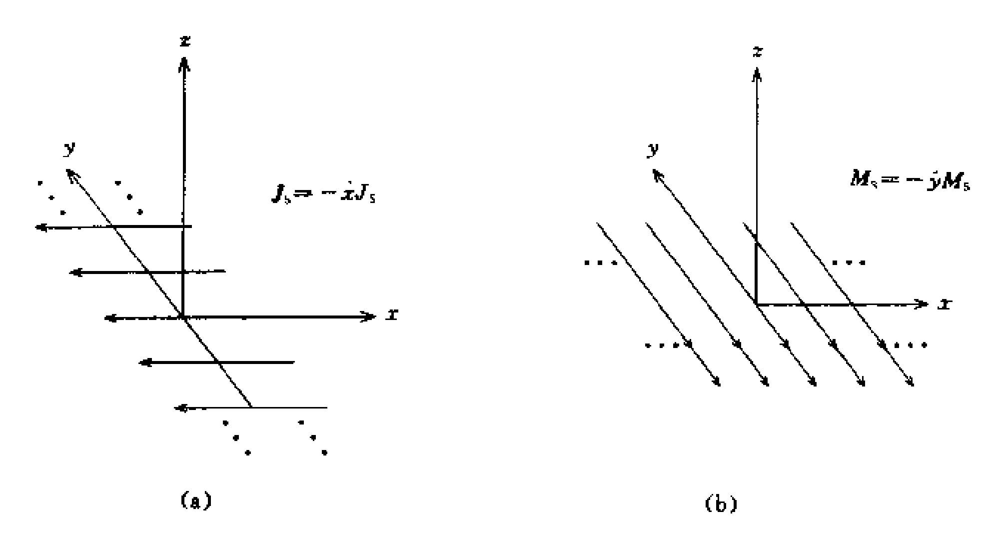


图 5.1-5 (a)面电流，(b)面磁流

波。例如，$J_s=\hat{x}J_s e^{ik_y y}$，将产生 k 矢量为 $k=\hat{y}k_y+\hat{z}k_z$ 和 $k=\hat{y}k_y-\hat{z}k_z$ 的两个平面波。若 $k_y>k$，则 $\hat{z}$ 向的波将消失。类似的论证也适用于面磁流。

5.1.4 外加的和感应的面电流

区分外加的和感应的面电流这两个概念是很重要的。物体表面的感应面电流是物体表面的带电质点的传导，而外加面电流则是外部因素的传导。当沿着物体表面外加一层电荷或电流时，物体表面就同时产生感应面电荷或面电流，以使边界条件得到满足。

例 5.1.1 考虑一平面波垂直入射至理想导体的半空间(见图 5.1-6a)。令电场为 $E=\hat{x}E_0e^{ikz}$，于是导体表面感应有面电流 $J_s=\hat{x}2E_0/\eta$。这个感应面电流将代替导体(见图 5.1-6b)，并同时向 $z>0$ 和 $z<0$ 两个半空间辐射。这个感应电流会产生一反射波 $E=-\hat{x}E_0e^{ikz}$，因而使边界面上总电场为零。它还在 $z>0$ 的区域产生一平面波 $E=-\hat{x}E_0e^{ikz}$，并与入射波结合使导体内的场为零。

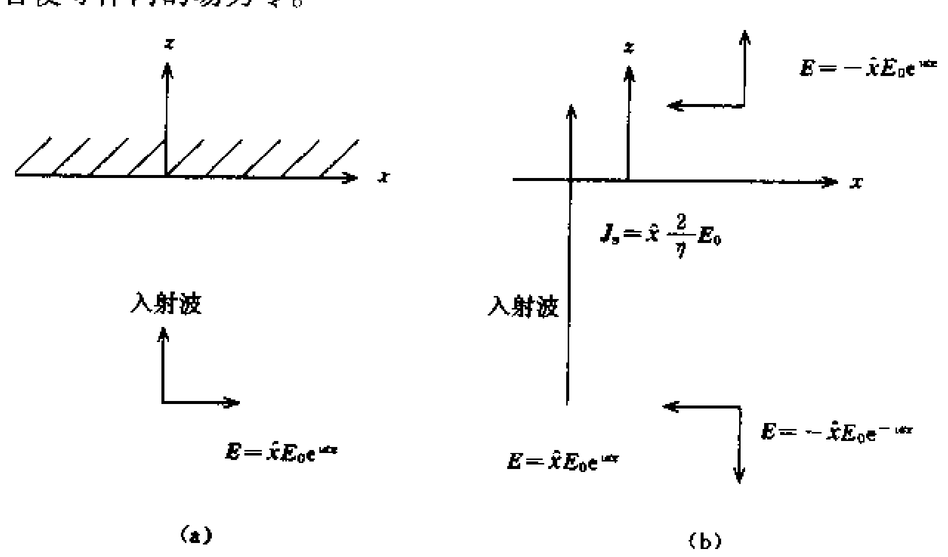


图 5.1-6 (a)平面波入射至理想导体上，(b)放置于 $z=0$ 的等效面电流

在讨论等效源之后，必须承认“磁源”是一个很有用的概念，尽管实际上它并不存在。在法拉第定律里加进一等效磁源，并以 $\boldsymbol{M}$ 表示

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{D}+\boldsymbol{J} \tag{5.1.1}$$

$$-\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{B}+\boldsymbol{M} \tag{5.1.2}$$

与切向磁场的边界条件 $\hat{\boldsymbol{n}}\times\delta\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_s$ 相类似，切向电场的边界条件为 $-\hat{\boldsymbol{n}}\times\delta\boldsymbol{E}=\boldsymbol{M}_s$。

例 5.1.2 现在应用等效面电流的概念来说明平面波在 z 轴方向传播时的几种情况。令电场在 $\hat{x}$ 方向，并研究 $z>0$ 的区域

$$\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{x}}E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz},\qquad \boldsymbol{H}=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{1}{\eta}E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}$$

等效问题 1

在 $z=0$ 处放置一强度为 $\boldsymbol{J}_s=-\hat{\boldsymbol{x}}E_0/\eta$ 的面电流和强度为 $\boldsymbol{M}_s=-\hat{\boldsymbol{y}}E_0$ 的面磁流，则可在 $z>0$ 处产生同样的场，而在 $z<0$ 处没有场。

等效问题 2

在 $z=0$ 处放置一强度为 $\boldsymbol{J}_s=-\hat{\boldsymbol{x}}2E_0/\eta$ 的面电流，则可在 $z>0$ 处产生同样的场，而在 $-\hat{z}$ 方向，有场强为 $\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{x}}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}$的平面波。

等效问题 3

在 $z=0$ 处放置一强度为 $\boldsymbol{M}_s=-\hat{\boldsymbol{y}}2E_0$ 的面磁流，则可在 $z>0$ 处产生同样的场，而在 $-\hat{z}$ 方向，有 $\boldsymbol{H}=\hat{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{E}_0/\eta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}$的平面波传播。

等效问题 4

以理想导体代替 $z<0$ 区域。在导电体前放置一 $\boldsymbol{J}_s=-\hat{\boldsymbol{x}}E_0/\eta$ 的面电流和一 $\boldsymbol{M}_s=-\hat{\boldsymbol{y}}E_0$ 的面磁流。在 $z>0$ 区域，面电流将不产生任何场，因为导体表面将感应有等幅而反相的面电流，它抵消了外加的 $\boldsymbol{J}_s$。面磁流则将产生相同的场。

等效问题 5

作为等效问题 4 的对偶情况，如在导磁体前放置同上的面电流和面磁流，按类似的道理，在 $z>0$ 区域，面磁流将不产生任何场。面电流将产生相同的场。

从上述对等效原理的讨论，可得出以下结论。(1)在不感兴趣的区域里，等效问题的解是无意义的。如图 5.1-1 所示，在包围电流环和磁偶极子的小体积内的 $\boldsymbol{H}$ 场就是一个例子。(2)关于镜像法，我们把“存在有导体时偶极子的辐射”这样一个未解的问题，转化为另外一个未解的“偶极子阵列”的问题。当在所研究的边界上放置等效面电流和面磁流时，在原始问题未完全解出前其强度 $-\hat{\boldsymbol{n}}\times\delta\boldsymbol{E}$ 和 $\hat{\boldsymbol{n}}\times\delta\boldsymbol{H}$ 均为未知。那么等效原理到底有何用呢？其用途至少有两个方面。首先，它使我们在应用镜像法时能重新建立公式；其次，也是最重要的，它为我们提供了一种由所研究区域表面上近似的源分布来获得近似解的方法。例如，可以利用图 5.1-2～5.1-4所示的镜像源，或者在导体表面放置等效的面电流。下一节将讨论惟一性定理，该定理将保证解的惟一性，或至少在所研究的区域以内解是惟一的。

例 5.1.3 零消定理。

考虑一平面波，它从介电系数为 ϵ_0，磁导率为 μ_0 的区域 0，垂直投射至介电系数为 ϵ，磁导率为 μ 的介质半空间。边界面在 $z=0$ 上，入射场为

$$E_x=E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}$$

$$H_y=-\frac{1}{\eta}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}$$

(1)求 0 和 1 两个区域内总的电场和磁场。确定与 $z=0^+$ 和 $z=0^-$ 处的场相应的面电流和面磁流的大小。

(2)把求得的面电流和面磁流都放置于 $z=0^+$,求区域 0 的总电场。在区域 1 内,证明由面电流和面磁流所产生的场与人射场相加后为零。

(3)把求得的面电流和面磁流置于 $z=0^-$,求区域 0 和 1 内的总电场。证明由面电流和面磁流在区域 0 内产生的场为零。

$z=0^+$ 处的面电流和面磁流使区域 0 内的场消失,$z=0^-$ 处的面电流和面磁流使区域 1 内的场消失,均是零消定理的结果。这也是通常称之为扩展边界条件下的面电流和面磁流的解。

解 (1)区域 0 内的场

$$E_y = E_0(e^{-ikz} + Re^{ikz})$$

$$H_x = \frac{E_0}{\eta}(e^{-ikz} - Re^{ikz})$$

区域 1 内的场

$$E_y = E_0(1 + R)e^{-ikz}$$

$$H_x = \frac{E_0}{\eta_t}(1 + R)e^{-ikz}$$

其中,$R=(\eta_t-\eta)/(\eta_t+\eta)$,$\eta=\sqrt{\mu/\varepsilon}$,$\eta_t=\sqrt{\mu_t/\varepsilon_1}$。$z=0^+$ 处的面电流和面磁流由区域 0 内的场求得:

$$J_{sy} = \frac{E_0}{\eta}(1 - R)$$

$$M_{sx} = E_0(1 + R)$$

$z=0^-$ 处的面电流和面磁流由区域 1 内的场求得:

$$J_{sy} = -\frac{E_0}{\eta_t}(1 + R)$$

$$M_{sx} = -E_0(1 + R)$$

(2)在区域 0 内的场

$$\begin{aligned} E_y &= E_0e^{-ikz} + E_0\left[\frac{1}{2}(1 + R) - \frac{1}{2}(1 - R)\right]e^{ikz} \\ &= E_0e^{-ikz} + RE_0e^{ikz} \\ H_x &= \frac{E_0}{\eta}e^{-ikz} + \frac{E_0}{\eta}\left[-\frac{1}{2}(1 + R) + \frac{1}{2}(1 - R)E_0\right]e^{ikz} \\ &= \frac{1}{\eta}E_0e^{-ikz} - \frac{1}{\eta}RE_0e^{ikz} \end{aligned}$$

在区域 1 内的场

$$E_x = E_0e^{-ikz} + E_0\left[-\frac{1}{2}(1 + R) - \frac{1}{2}(1 - R)\right]e^{-ikz} = 0$$

$$H_y = \frac{1}{\eta}E_0e^{-ikz} + \frac{E_0}{\eta}\left[-\frac{1}{2}(1 + R) - \frac{1}{2}(1 - R)\right]e^{-ikz} = 0$$

(3)在区域 0 内的场

$$E_y = E_0\left[\frac{1}{2}(1 + R) - \frac{1}{2}(1 + R)\right]e^{ikz} = 0$$

$$H_x = \frac{E_0}{\eta}\left[-\frac{1}{2}(1+R)+\frac{1}{2}(1+R)E_0\right]e^{ikz} = 0$$

在区域 1 内的场

$$E_x = E_0\left[\frac{1}{2}(1+R)+\frac{1}{2}(1+R)\right]e^{-ik_tz} = E_0(1+R)e^{-ik_tz}$$

$$H_y = \frac{E_0}{\eta_t}\left[\frac{1}{2}(1+R)+\frac{1}{2}(1+R)\right]e^{-ik_tz} = \frac{E_0}{\eta_t}(1+R)e^{-ik_tz}$$

例 5.1.4　海伦(Hällén)积分方程。

下面我们将得到细直线偶极天线的海伦(Hällén)积分方程,并证明天线上的电流近似为正弦分布。首先,要建立一个在封闭表面 S 内 $\boldsymbol{E}=0,\boldsymbol{H}=0$ 的等效问题(见图 5.1-7)。S 面与天线导体的表面完全重合,S 外的 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 与原始问题里的相同。在等效问题里没有导体。为了适应 S 上 $\boldsymbol{H}_t$ 的不连续性,必须在假想的 S 上外加以面电流 $\boldsymbol{J}_s$。这个面电流与原始问题中的感应面电流相同,因为两段圆柱形偶极子之间的缝宽 δ 很小,沿 z 轴的电场趋于

$$\boldsymbol{E} \to \hat{z}V_0\delta(z), \qquad |a| < l/2$$

$|z| < l/2$ 时 z 轴上的电场由下式给出。

$$\begin{aligned} E_z(z)\,|_{\rho=0} &= V_0\delta(z) \\ &= \mathrm{i}\omega\mu\hat{z}\cdot\left(\boldsymbol{I}+\frac{\nabla\nabla}{k^2}\right)\int_{-l/2}^{l/2}\mathrm{d}z'\cdot\int_0^{2\pi}a\,\mathrm{d}\phi'\,\frac{e^{ik\sqrt{(z-z')^2+a^2}}}{4\pi\sqrt{(z-z')^2+a^2}}\boldsymbol{J}_s(z') \end{aligned}$$

在求解最终结果时,只要 $a\ll\lambda$ 和 $a\ll l$,圆柱两端帽上的电流贡献就可以忽略。此外,也有理由假设 $\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}')$ 是沿 z 轴方向且不随 ϕ 变化的。由此得出 $I(z')=2\pi aJ_s(z')$。

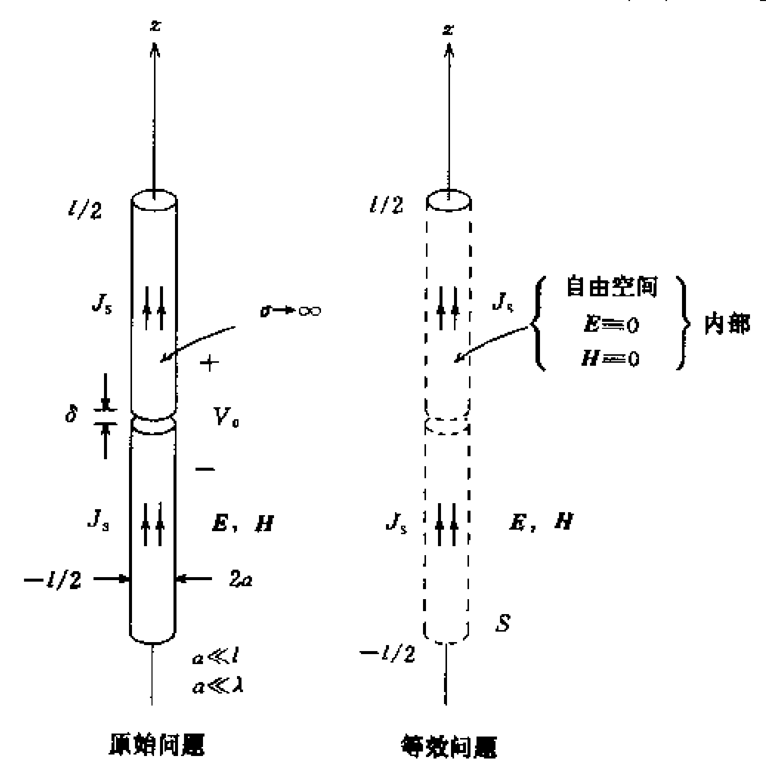


图 5.1-7　由海伦积分方程推导用的直线偶极天线

由上面的简化,可得

$$E_z = V_0\delta(z) = \frac{i\omega\mu}{k^2}\left(k^2 + \frac{d^2}{dz^2}\right)\int_{-l/2}^{l/2}dz'\ \frac{e^{ik\sqrt{(z-z')^2+a^2}}}{4\pi\sqrt{(z-z')^2+a^2}}I(z')$$

令

$$A_z(z) = \int_{-l/2}^{l/2}dz'\ \frac{e^{ik\sqrt{(z-z')^2+a^2}}}{[(z-z')^2+a^2]^{1/2}}I(z')$$

则可得到如下形式的常微分方程

$$\left(\frac{k^2V_0}{i\omega\mu}\right)\delta(z) = \left(k^2 + \frac{d^2}{dz^2}\right)A_z(z)$$

解此微分方程可得

$$\frac{i\omega\mu}{k^2}\int_{-l/2}^{l/2}dz'\ \frac{e^{ik\sqrt{(z-z')^2+a^2}}}{4\pi\sqrt{(z-z')^2+a^2}}I(z') = V_0[g(z) + C_1\cos kz + C_2\sin kz]$$

其中，

$$g(z) = \frac{1}{2ik}e^{ik|z|}$$

是一维亥姆霍兹方程的标量格林函数，该方程为

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2\right)g(z) = \delta(z)$$

当为对称激励时，$I(z)=I(-z)$及$C_2=0$，可以得到海伦(Hällén)(1938)积分方程

$$\int_{-l/2}^{l/2}dz'K(z,z')I(z') = \frac{4\pi k^2}{i\omega\mu}V_0\left(\frac{e^{ik|z|}}{2ik} + C_1\cos kz\right)$$

其中，

$$K(z,z') = \frac{e^{ik\sqrt{(z-z')^2+a^2}}}{\sqrt{(z-z')^2+a^2}}$$

如$a\ll l$，被积函数$K(z,z')$在$z=z'$处有尖峰。对积分的主要贡献来自于z靠近z'一带。因此，积分值大致与$I(z)$成正比。

$$\frac{4\pi k^2}{i\omega\mu}V_0\left(\frac{e^{ik|z|}}{2ik} + C_1\cos kz\right) = I(z)\int_{-l/2}^{l/2}dz'K(z,-z') + \int_{-l/2}^{l/2}dz'K(z-z')[I(z') - I(z)]$$

上式右端第二个积分可以忽略。所以

$$I(z)f(z) \simeq \frac{4\pi k^2}{i\omega\mu}V_0\left(\frac{e^{ik|z|}}{2ik} + C_1\cos kz\right)$$

其中，

$$f(z) \equiv \int_{-l/2}^{l/2}dz'K(z-z') = \int_{-l/2}^{l/2}dz'\ \frac{e^{ik\sqrt{(z-z')^2+a^2}}}{|(z-z')^2+a^2|^{1/2}}$$

可以看出，若$a\ll l$，则$|K(z,z')|$在$z=z'$有尖峰。函数$f(z)$变化不剧烈，不同z处曲线下的面积互相接近，因为大部分面积都在尖峰值下面。因而，$f(z_1)\simeq f(z_2)\simeq f(0)$，除了在两端之外，它是$z$很平缓的函数。如假设$f(z)$是常数，具有良好的近似性。

$$f(z)I(z) \simeq f(0)I(z)$$

观察可见，$\lim_{z\to\pm l/2}f(z)\neq 0$，但当$z\to\pm l/2$时$f(z)I(z)\to 0$。欲计算$C_1$，必须要加入

$I(\pm l/2)=0$ 这一条件。

$$I\left(\pm\frac{l}{2}\right)=0\Rightarrow C_1-\frac{e^{ikl/2}}{2ik\cos\left(\frac{kl}{2}\right)}$$

现在可以将 $I(z)$ 重新安排为下列形式：

$$I(z)\simeq\frac{2kV_0}{i\omega\mu}\frac{\sin(k|z|-kl/2)}{f(0)\cos(kl/2)}$$

这就是海伦(Hällén)积分方程的零阶近似解。更加精确的解,请参阅文献(King,1956)。

专题 5.1.A　惟一性定理

当物理状态给定时总能导出一个,而且只有一个物理解。但是,在对数学条件进行公式化时,如果处理不当,有可能因边界条件描述不清导出多个解,或因边界条件描述过分而完全没有解。惟一性定理将指明如何正确地建立数学模型,以实现只有一个解。对电磁场问题,惟一性定理指出,当给定区域中的源和整个边界面上的切向电场或磁场都已确定时,此区域内的解就将惟一。因此,惟一性定理是最有效的定理,它使我们能够利用任何合适的方法去求解。它是等效原理、惠更斯原理、镜像定理、感应定理、Babinet 原理及几乎电磁学中所有常用方法的基础。

欲证明惟一性定理,可假设某一组给定的源有两个不同的解。设这二组解分别用 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{H}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{H}_2$ 表示,它们的差为

$$\delta\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2$$

$$\delta\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2$$

因两解均对相同的源满足麦克斯韦方程组,它们的差就应满足无源麦克斯韦方程组,即

$$\nabla\times\delta\boldsymbol{E}=i\omega\mu\delta\boldsymbol{H}\tag{5.1.3a}$$

$$\nabla\times\delta\boldsymbol{H}=-i\omega\varepsilon\delta\boldsymbol{E}\tag{5.1.3b}$$

定理证明的关键是要假设介质的介电系数 ε 和磁导率 μ 都有一个小的虚部,又假设介质有小量的损耗,即 μ 和 ε 有一小的正虚部,

$$\epsilon=\epsilon_R+i\epsilon_I$$

$$\mu=\mu_R+i\mu_I$$

其中,$\epsilon_R,\epsilon_I,\mu_R$ 和 μ_I 均为实数。当两者的虚部均为负时,证明也能成立。

将式(5.1.3a)点乘以 $\delta\boldsymbol{H}^*$,式(5.1.3b)点乘以 $\delta\boldsymbol{E}$,二者相减可得

$$\nabla\cdot(\delta\boldsymbol{E}\times\delta\boldsymbol{H}^*)=i\omega\mu|\delta\boldsymbol{H}|^2-i\omega\epsilon^*|\delta\boldsymbol{E}|^2\tag{5.1.4}$$

上式的复数共轭为

$$\nabla\cdot(\delta\boldsymbol{E}^*\times\delta\boldsymbol{H})=-i\omega\mu^*|\delta\boldsymbol{H}|^2+i\omega\epsilon|\delta\boldsymbol{E}|^2\tag{5.1.5}$$

将式(5.1.4)与式(5.1.5)相加,并在 S 表面所包围的体积 V 内积分,则可得

$$\oiint_S d\boldsymbol{S}\cdot(\delta\boldsymbol{E}\times\delta\boldsymbol{H}^*+\delta\boldsymbol{E}^*\times\delta\boldsymbol{H})$$

$$=-2\omega\iiint_V dV(\mu_I|\delta\boldsymbol{H}|^2+\varepsilon_I|\delta\boldsymbol{E}|^2)\tag{5.1.6}$$

式(5.1.6)的右端为一负数。只有在区域 V 中的 $\delta\boldsymbol{H}$ 和 $\delta\boldsymbol{E}$ 同为零时,右端为零。

式(5.1.6)左端为零时,将有

$$\oint\!\!\!\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\delta\boldsymbol{E}\times\delta\boldsymbol{H}^* + \delta\boldsymbol{E}^*\times\delta\boldsymbol{H}) = 0$$

则解惟一,且有 $\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_2$ 和 $\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{H}_2$。由此,可得结论,如闭合面 S 上的 $\delta\boldsymbol{E}$ 或 $\delta\boldsymbol{H}$ 为零,则解将惟一,于是,边界条件可用以下几种方式规定。①整个 S 表面上的切向电场。②整个 S 表面上的切向磁场。③S 表面一部分的切向电场和 S 表面其余部分的切向磁场。如果对 S 表面任一部分上的切向电场和磁场两者都作了规定,则它们必须是互相兼容的。

专题 5.1.B 对偶性和互补性

对相应于安培定律中的电流 $\boldsymbol{J}$,在法拉第定律中可以加上磁流 $-\boldsymbol{M}$。同时带有电流和磁流项的麦克斯韦方程组可写为

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = -\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \tag{5.1.7}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = \mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H} - \boldsymbol{M} \tag{5.1.8}$$

引入磁流 $\boldsymbol{M}$ 的合理性已经由等效原理证实,并重申如下:首先,在时谐激励情况下式(5.1.7)和(5.1.8)支配着宏观的电磁场。从宏观的角度看,小电流环的作用如同磁偶极子。只要限制不深入到环的内部,则环所包围体积之外的场与小电偶极子的场精确对偶。磁偶极子的场可以用与电偶极子一样的方法,略去 $\boldsymbol{J}$ 保留 $\boldsymbol{M}$ 后,精确解得。其次,当应用式(5.1.7)和(5.1.8)于有限空间区域时,可以认为包围区域的表面是由切向磁场的不连续引起的表面电流和由切向电场的不连续引起的表面磁流所支持。实际上,在前面讨论电偶极子源时,就是限制在偶极子所占体积之外的空间。如果假设式(5.1.7)和(5.1.8)在全空间内有效,则隐含磁单极子的存在。

现在,式(5.1.7)和(5.1.8)互为对偶。如作下述置换

$$\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{H} \qquad \varepsilon\to\mu$$

$$\boldsymbol{H}\to-\boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{J}\to\boldsymbol{M}$$

$$\mu\to\varepsilon \qquad \boldsymbol{M}\to-\boldsymbol{J}$$

则式(5.1.7)变为式(5.1.8),式(5.1.8)变为式(5.1.7)。如使上述置换式箭头左端与右端在数字上相等,则可使符号的置换进一步量化。但是,建立这样的等量关系后,对偶的自由空间变成磁导率为 $4\pi\times10^{-7}$F/m 和介电常数为 8.854×10^{-12} H/m 的介质,这是研究天线问题时不希望出现的情况。

用下列等式建立的自由空间中的对偶性原理,适用于天线和辐射问题:

$$\boldsymbol{E} = \eta\boldsymbol{H} \tag{5.1.9}$$

$$\boldsymbol{H} = -\boldsymbol{E}/\eta \tag{5.1.10}$$

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{M}/\eta \tag{5.1.11}$$

$$\boldsymbol{M} = -\eta\boldsymbol{J} \tag{5.1.12}$$

其中,$\eta=(\mu/\varepsilon)^{1/2}$。显然,由这样的置换,式(5.1.7)变为式(5.1.8),式(5.1.8)变为式(5.1.7),没有必要用不同的介质来替换。注意,这一种对偶形式不适用于各向异性和双各向异性介质之类的复杂介质。

作为对偶性原理的应用举例,我们将寻求互补的金属天线和口径天线阻抗之间的关系。考虑如图(5.1-8)所示的由平面导体切割面成互补的金属天线和口径天线。图 5.1-8(a)中金属天线的输入阻抗为

$$Z_{\mathrm{m}} = \frac{-\int_b^a \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}}{\oint_{cd} \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}} = \frac{-\int_b^a \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}}{2\int_c^d \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}} \tag{5.1.13}$$

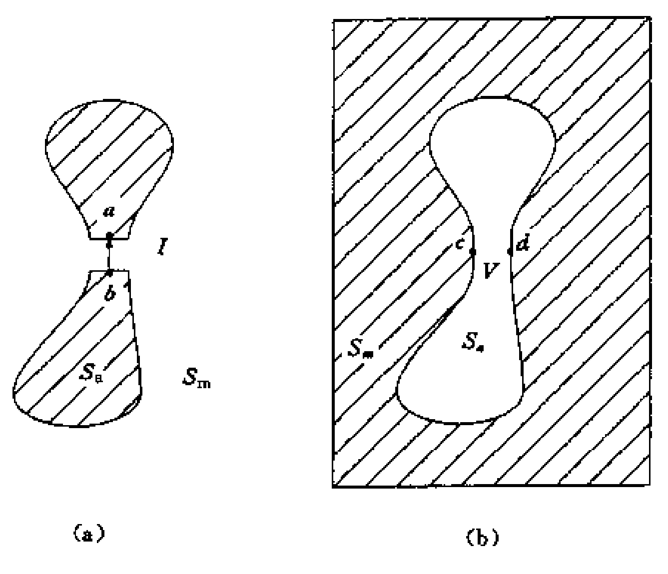


图 5.1-8　(a)金属天线,(b)口径天线,两者形状互补

我们已假设其中的 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}$ 从 a 指向 b,$\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}$ 从 c 指向 d。等式的第二部分来自于路径 cd 两侧的切向磁场大小相等方向相反。

与之相似,口径在天线的输入阻抗为

$$Z_{\mathrm{a}} = \frac{-\int_c^d \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{a}}}{\oint_{ab} \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{H}_{\mathrm{a}}} = \frac{\int_c^d \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{a}}}{2\int_b^a \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{H}_{\mathrm{a}}} \tag{5.1.14}$$

其中,有已假设的对偶情况,即 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{a}}$ 由 a 指向 b,$\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}}$ 由 d 指向 c。

两个阻抗以麦克斯韦方程的对偶特性互相关联。对金属天线,其边值问题需求解

$$(\nabla^2 + \omega^2\mu\varepsilon)\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}} = 0 \tag{5.1.15}$$

有关的边界条件是

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}_{\mathrm{m}} &= 0, \qquad \text{在 } S_{\mathrm{a}} \text{ 上} \\ \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_{\mathrm{m}} &= 0, \qquad \text{在 } S_{\mathrm{m}} \text{ 上} \end{aligned} \tag{5.1.16}$$

其中,

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu} \nabla \times \boldsymbol{E}_{\mathrm{m}} \tag{5.1.17}$$

$\hat{\boldsymbol{n}}$ 垂直于平面导体。注意,式(5.1.16)中第二个边界条件可理解为:金属上的面电流由基本的电流源组成,该电流源只与垂直于 S_{m} 的磁场分量有关。

对口径天线问题需求解

$$(\nabla^2 + \omega^2\mu\varepsilon)\boldsymbol{H}_{\mathrm{a}} = 0 \tag{5.1.18}$$

有关的边界条件

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_{\mathrm{a}} &= 0, \qquad \text{在 } S_{\mathrm{a}} \text{ 上} \\ \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}_{\mathrm{a}} &= 0, \qquad \text{在 } S_{\mathrm{m}} \text{ 上} \end{aligned} \tag{5.1.19}$$

其中

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}} = -\frac{1}{\mathrm{i}\omega\epsilon}\nabla\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{a}} \tag{5.1.20}$$

上述两问题在数学上以下列置换式对偶：

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}} = \eta\boldsymbol{H}_{\mathrm{a}} \tag{5.1.21}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}} = -\frac{1}{\eta}\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}} \tag{5.1.22}$$

由式(5.1.13)和式(5.1.14)可求得

$$Z_{\mathrm{m}}Z_{\mathrm{a}} = \left(\frac{-\int_b^a \eta\boldsymbol{H}_{\mathrm{a}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{-2\int_c^d \frac{1}{\eta}\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}\right)\left(\frac{\int_c^d \boldsymbol{E}_{\mathrm{a}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{2\int_b^a \boldsymbol{H}_{\mathrm{a}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}\right) = \frac{\eta^2}{4} \tag{5.1.23}$$

因此，两互补天线的输入阻抗的乘积为自由空间特性阻抗平方值的1/4。

作为例子，考虑图5.1-9所示结构，该结构与其互补部分相同。可以得知此天线的输入阻抗为 $\eta/2 = 188.5\ \Omega$。由于输入阻抗与频率无关，这样的天线是理想的宽带天线。图5.1-10所示为一种自补天线。金属片的四条边缘由 $\rho_1 = \rho_0 e^{a\phi}$，$\rho_2 = \rho_0 e^{a(\phi-\pi/2)}$，$\rho_3 = \rho_0 e^{a(\phi-\pi)}$，$\rho_4 = \rho_0 e^{a(\phi-3\pi/2)}$ 表示，其中 a 是螺线的展开率。这种结构称之为平面等角螺旋天线。

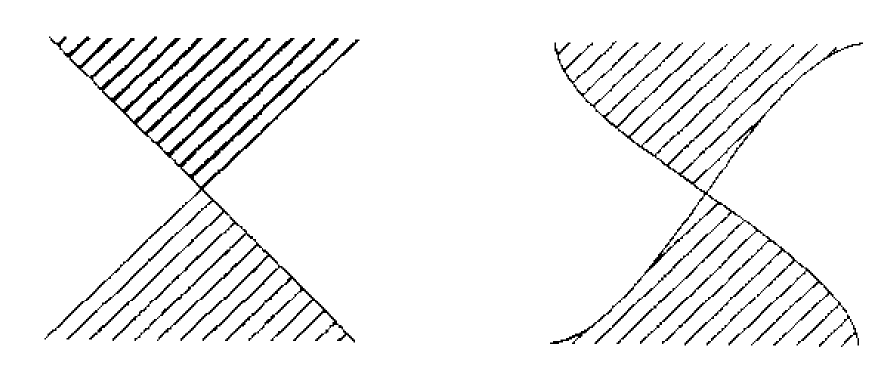


图5.1-9 宽带结构

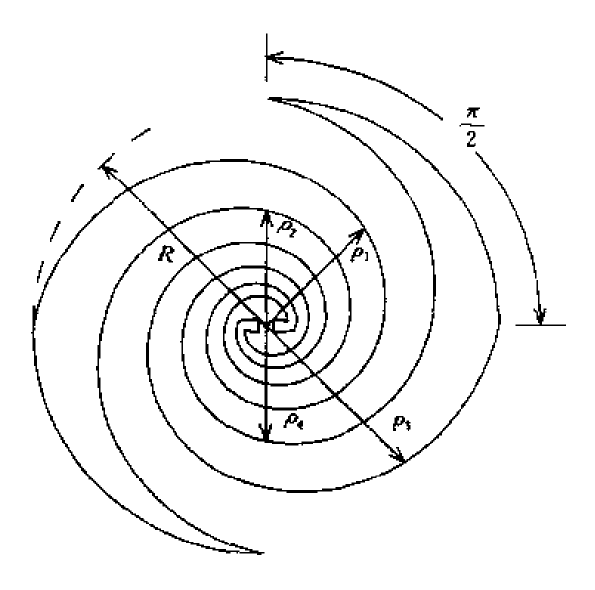


图5.1-10 平面等角螺旋天线

例 5.1.5　Babinet 原理。

Babinet 原理是对偶性和互补性的另一个例子，此原理把平面口径本身的绕射问题与其互补结构的散射问题联系起来。考虑如图 5.1-11(a)所示带有孔径 S_a的无限大平面导体，及图 5.1-11(b)所示该平面导体的互补结构。设上述两图的左侧有对偶的场源。无金属屏时，它们产生入射场

$$\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{i}} = \eta \boldsymbol{H}_1^{\mathrm{i}} \tag{5.1.24a}$$

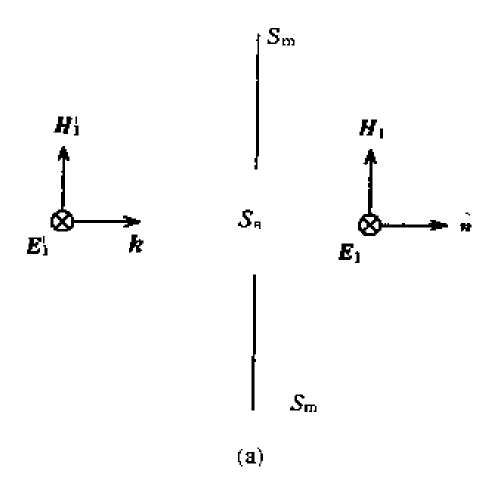
$$\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{i}} = -\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{i}}/\eta \tag{5.1.24b}$$

注意，当存在屏时，场源位于屏的左侧。

现在我们为屏右侧的场列出方程。对图 5.1-11(a)所示的问题，场满足麦克斯韦方程

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_1 = \mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}_1 \tag{5.1.25a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_1 = -\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_1 \tag{5.1.25b}$$



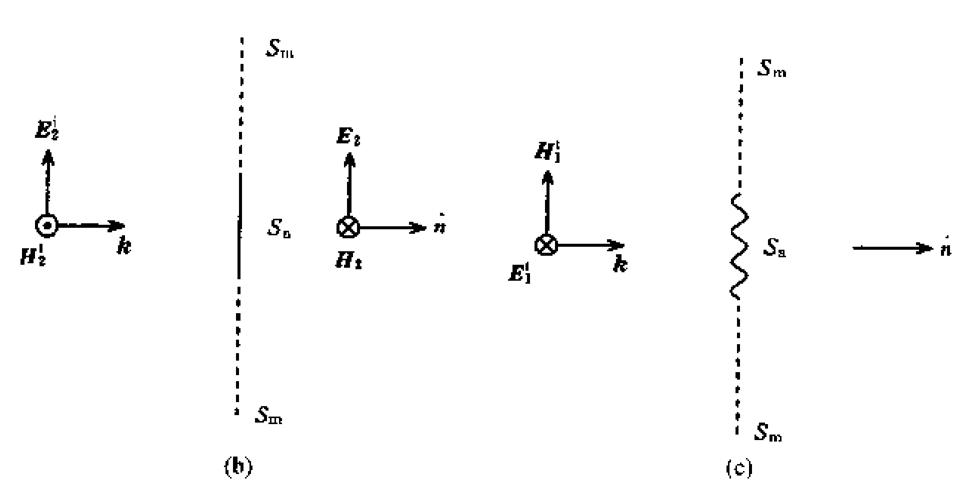


图 5.1-11　Babinet 原理的互补性和对偶性

从属的边界条件

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_1 = 0,\qquad 在\ S_m\ 上 \tag{5.1.26a}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_1 = \hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{i}},\qquad 在\ S_a\ 上 \tag{5.1.26b}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 是平面的法向。第一个边界条件保证导体表面的切向电场为零。第二个边界条件保证金属面上的感应面电流不在口径空间产生切向磁场分量。金属屏右侧的场是由 S_a 上的等效面电流源产生的。

对图 5.1-11(b)所示的问题,图中右侧的场满足麦克斯韦方程

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_2 = \mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}_2 \tag{5.1.27a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_2 = -\mathrm{i}\omega\epsilon\boldsymbol{E}_2 \tag{5.1.27b}$$

从属的边界条件

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_2 = \hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{i}}, \quad \text{在 } S_{\mathrm{m}} \text{ 上} \tag{5.1.28a}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_2 = 0, \quad \text{在 } S_{\mathrm{a}} \text{ 上} \tag{5.1.28b}$$

总的场强 $\boldsymbol{E}_2$ 和 $\boldsymbol{H}_2$ 是两个场解的叠加。

(1)没有金属屏时的入射场 $\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{i}},\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{i}}$。对右半空间,它们满足无源情况的麦克斯韦方程。

(2)由金属屏上的感应电流产生的散射场用 $\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{s}},\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{s}}$ 表示。

用 $\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{s}}=\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{i}}$ 和 $\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{s}}=\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{i}}$ 两式表示的散射场满足

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{s}} = \mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{s}} \tag{5.1.29a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{s}} = -\mathrm{i}\omega\epsilon\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{s}} \tag{5.1.29b}$$

从属的边界条件

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{s}} = 0, \quad \text{在 } S_{\mathrm{m}} \text{ 上} \tag{5.1.30a}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{s}} = -\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{i}} = -\hat{\boldsymbol{n}}\times\eta\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{i}}, \quad \text{在 } S_{\mathrm{a}} \text{ 上} \tag{5.1.30b}$$

将式(5.1.29)与式(5.1.25)比较,式(5.1.30)与式(5.1.26)比较,可出现两个问题在数学上以如下置换关系对偶

$$\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{s}} = \boldsymbol{E}_1\eta \tag{5.1.31a}$$

$$\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{s}} = -\eta\boldsymbol{H}_1 \tag{5.1.31b}$$

总的场强可表示为

$$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E}_2^{\mathrm{s}} + \boldsymbol{E}_2^{\mathrm{i}} = \eta(-\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_1^{\mathrm{i}}) \tag{5.1.32a}$$

$$\boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{H}_2^{\mathrm{s}} + \boldsymbol{H}_2^{\mathrm{i}} = \frac{1}{\eta}(\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_1^{\mathrm{i}}) \tag{5.1.32b}$$

这就称为 Babinet 原理。图 5.1-11(a)的一个特殊情况是没有金属屏,此时 $\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{i}},\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{i}}$。其互补情况是有一完全的金属屏,结果为 $\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{H}_2=0$。考虑其他的极端情况,当图 5.1-11(a)是无孔径的全金属时,$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{H}_1=0$。那么,图 5.1-11(b)变为 $\boldsymbol{E}_2=\eta\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{i}}$ 和 $\boldsymbol{H}_2=-\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{i}}/\eta$,此结果正好是由对偶源所产生的场强。

要进一步检验 Babinet 原理的含义,考虑图 5.1-11(b)的对偶问题,以图 5.1-11(c)具体说明。现在,把金属孔径 S_{a} 替换为导磁体,场源与图 5.1-11(c)的对偶正好与图 5.1-11(a)的相同。导磁体右侧的边值问题变为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{d}} = \mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}} \tag{5.1.33a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}} = -\mathrm{i}\omega\epsilon\boldsymbol{E}_{\mathrm{d}} \tag{5.1.33b}$$

所属的边界条件

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{d}} = \hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{i}}, \quad \text{在 } S_{\mathrm{m}} \text{ 上} \tag{5.1.34a}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}} = 0, \quad \text{在 } S_{\mathrm{a}} \text{ 上} \tag{5.1.34b}$$

其中,$\boldsymbol{E}_{\mathrm{d}},\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}$ 表示图 5.1-11(c)的场。由式(5.1.25)、(5.1.26)和式(5.1.33)、(5.1.34)可见,场强的和 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_{\mathrm{d}}$ 及 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}$ 适宜于如下边值问题

$$\nabla\times(\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_{\mathrm{d}}) = \mathrm{i}\omega\mu(\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}) \tag{5.1.35a}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}) = -\mathrm{i}\omega\mu\epsilon(\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_{\mathrm{d}}) \tag{5.1.35b}$$

相应的边界条件

$$\hat{\boldsymbol{n}} \times (\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_d) = \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}_1^i, \quad 在 S_m 上 \tag{5.1.36a}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}} \times (\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_d) = \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_1^i, \quad 在 S_a 上 \tag{5.1.36b}$$

于是，S_m 和 S_a 上的切向场与 $\boldsymbol{E}_1^i$ 及 $\boldsymbol{H}_1^i$ 切向场相同，由惟一性定理，可得

$$\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_d = \boldsymbol{E}_1^i \tag{5.1.37a}$$

$$\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_d = \boldsymbol{H}_1^i \tag{5.1.37b}$$

上式和式(5.1.32)都是按对偶性原理所要求的置换关系 $\boldsymbol{E}_2 = \eta \boldsymbol{H}_d$ 和 $\boldsymbol{H}_2 = -\boldsymbol{E}_d/\eta$，由 Babinet 原理引出。

专题 5.1.C 惠更斯原理的数学公式

惠更斯原理说明含辐射源的区域 V' 所产生的场，完全由包围 V' 的表面 S'（图 5.1-12）上的切向场决定，它用数学术语以边界面上的场表达任一观察点上的场。在包围辐射源的 S' 表面外，其电场和磁场可证明为下列形式：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \oint\!\!\!\oint_{S'} \mathrm{d}S' \{ \mathrm{i}\omega\mu \boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot [\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}') + \nabla] \times \boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot [\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')] \} \tag{5.1.38}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \oint\!\!\!\oint_{S'} \mathrm{d}S' \{ -\mathrm{i}\omega\epsilon \boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot [\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') + \nabla] \times \boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot [\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')] \} \tag{5.1.39}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 是表面 S' 的外向法线，并矢格林函数 $\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 由下式给出

$$\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \left(\boldsymbol{II} + \frac{1}{k^2} \nabla\nabla \right) g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{5.1.40}$$

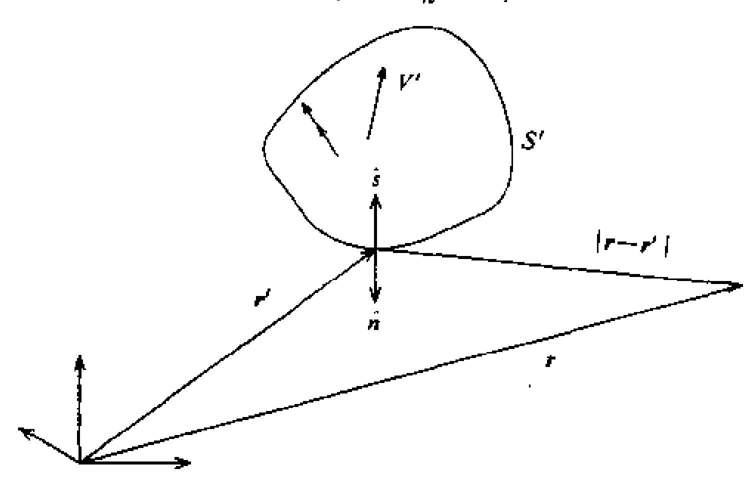


图 5.1-12 包含辐射源的体积 V'

标量格林函数 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 满足亥姆霍兹方程

$$(\nabla^2 + k^2) g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{5.1.41}$$

对各向同性介质中的三维问题，标量格林函数以球坐标形式写出，为

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{e^{ik|(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')|}}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \tag{5.1.42}$$

对各向同性介质中的二维问题，标量格林函数以柱坐标形式写出，为

$$g(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}') = \frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(k|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|) \tag{5.1.43}$$

其中,$H_0^{(1)}$ 是第一类零阶汉开尔函数。

例 5.1.6 公式推导。

当有给定电流源 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$时,支配电场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$的麦克斯韦方程由下式给出

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - k^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \tag{5.1.44}$$

用 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$表示的 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$的解,可以用并矢格林函数 $\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$表示

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}\omega\mu\iiint \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \tag{5.1.45}$$

注意,借助于三维 δ 函数$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$,可写出

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = \iiint \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\boldsymbol{II}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \tag{5.1.46}$$

其中,$\boldsymbol{II}$ 是单位并矢。把式(5.1.45)和(5.1.46)代入式(5.1.44),则可得到决定并矢格林函数 $\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$的方程

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - k^2\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{II}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{5.1.47}$$

并矢形式惠更斯原理的推导需要用到如下矢量恒等式

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}\cdot[\nabla\times\nabla\times(\boldsymbol{GG}\cdot\boldsymbol{a})] - (\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot(\boldsymbol{GG}\cdot\boldsymbol{a})\\&= -\nabla\cdot[\boldsymbol{E}\times\nabla\times(\boldsymbol{GG}\cdot\boldsymbol{a}) + (\nabla\times\boldsymbol{E})\times(\boldsymbol{GG}\cdot\boldsymbol{a})]\end{aligned}$$

其中,$\boldsymbol{a}$ 是任意常数矢量。在没闭合表面 S' 和无穷远的表面所包围的体积 V 对上式取积分,可得

$$\begin{aligned}&\iiint_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot[\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{a}] - [\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})]\cdot\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{a}\}\\&= -\oiint_S \mathrm{d}S\{\hat{\boldsymbol{s}}\cdot[\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})]\times\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{a} + \hat{\boldsymbol{s}}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\times\nabla\times\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{a}\}\end{aligned}$$

在上式左端利用式(5.1.44)和式(5.1.45),并假设体积 V 内$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})=0$,则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{a} = -\oiint_S \mathrm{d}S\{&\hat{\boldsymbol{s}}\times[\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})]\cdot\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{a} +\\&[\hat{\boldsymbol{s}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})]\cdot\nabla\times\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{a}\}\end{aligned} \tag{5.1.48}$$

注意,在左端的积分式中 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'$都在体积 V 内。现在我们应用$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$式,并把带撇和不带撇的变量互换。因为 $\boldsymbol{a}$ 是一任意常数矢量,可以将它从等式的两端删去。于是有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\oiint_S \mathrm{d}S'\{&\mathrm{i}\omega\mu\,\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot[\hat{\boldsymbol{s}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')] +\\&\nabla\times\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot[\hat{\boldsymbol{s}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\}\end{aligned} \tag{5.1.49}$$

在等式的右端,积分量在 S' 面上是对$\boldsymbol{r}'$进行的。为得到式(5.1.49),还利用并矢格林函数的对称关系

$$\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = [\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})]^{\mathrm{T}} \tag{5.1.50}$$

和

$$\nabla\times\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = [\nabla\times\boldsymbol{GG}(r',r)]^{\mathrm{T}} \tag{5.1.51}$$

其中,上标 T 表示转置。由式(5.1.40)和(5.1.42)或式(5.1.43)各式来看,关系式(5.1.50)显

然是正确的。根据下列关系可知关系式(5.1.51)也是正确的。

$$
\begin{aligned}
[\nabla \times \boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]_{il} &= \varepsilon_{ijk}\partial_j\left(\delta_{kl} + \frac{1}{k^2}\partial_k\partial_l\right)g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \\
&= -\varepsilon_{ijl}\partial'_j g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \\
&= \varepsilon_{ljk}\partial'_j\delta_{ki}g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \\
&= [\nabla' \times \boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]_{li}
\end{aligned} \tag{5.1.52}
$$

上式中应用了关系式 $\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k = 0$ 和 $\partial_j g = -\partial'_j g$。还可以证明对满足规定的边界条件，一般的并矢格林函数，也保持式(5.1.50)和(5.1.51)的对称关系。

用公式表示的惠更斯原理是在无穷大半径球体和包含全部辐射源的表面 S'(图 5.1-12)之间的空间中证明的。然而在无穷远的表面对面积分没有贡献，这是由电磁场和并矢格林函数的辐射条件得出的：

$$\lim_{r\to\infty} r(\boldsymbol{H} - \hat{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{E}/\eta) = 0 \tag{5.1.53a}$$

$$\lim_{r\to\infty} \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{5.1.53b}$$

$$\lim_{r\to\infty} r(\nabla \times \boldsymbol{GG} - \mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{GG}) = 0 \tag{5.1.53c}$$

注意，式(5.1.49)中的 $\hat{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{s}}$，该式中 $\hat{\boldsymbol{s}} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')$ 项变为 $\hat{\boldsymbol{r}} \times (\hat{\boldsymbol{r}}' \times \boldsymbol{E}/\eta)$，被积函数变为 $(-\mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{GG} + \nabla \times \boldsymbol{GG}) \cdot (\hat{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{E})$，在无穷远的表面上这一项趋于零。对 $\boldsymbol{E}(r)$ 的贡献完全来自表面 S'(图 5.1-12)。因此，为求得式(5.1.38)和(5.1.39)应注意 $\hat{\boldsymbol{s}} = -\hat{\boldsymbol{n}}$，这两个公式都用边界面 S' 上的切向电场和磁场表示。

例 5.1.7 Stratton-Chu 公式。

惠更斯原理有多种不同的矢量形式。由式(5.1.38)和(5.1.39)可得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \oint\!\!\oint_{S'} \mathrm{d}S' \Big\{ & \mathrm{i}\omega\mu g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')[\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')] + \frac{\mathrm{i}\omega\mu}{k^2}\nabla\nabla g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot [\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')] + \\
& \nabla g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \times [\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')] \Big\}
\end{aligned} \tag{5.1.54}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \oint\!\!\oint_{S'} \mathrm{d}S' \Big\{ & -\mathrm{i}\omega\epsilon g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')[\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')] - \frac{\mathrm{i}\omega\epsilon}{k^2}\nabla\nabla g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot [\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')] + \\
& \nabla g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \times [\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')] \Big\}
\end{aligned} \tag{5.1.55}
$$

上述两式用 S_1 上的切向场分量和标量格林函数 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 表示。

Stratton-Chu 公式可以由(5.1.48)式面积分内的第一项导得

$$\hat{\boldsymbol{s}} \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{GG} \cdot \boldsymbol{a} = \hat{\boldsymbol{s}} \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot \left(g\boldsymbol{a} + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla \cdot g\boldsymbol{a}\right) \tag{5.1.56a}$$

$$= \hat{\boldsymbol{s}} \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot g\boldsymbol{a} + \frac{1}{k^2}\hat{\boldsymbol{s}} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) \times \nabla\nabla \cdot g\boldsymbol{a} \tag{5.1.56b}$$

$$= \hat{\boldsymbol{s}} \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot g\boldsymbol{a} + \frac{1}{k^2}\hat{\boldsymbol{s}} \cdot \{(\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E})\nabla \cdot g\boldsymbol{a} - \nabla \times [(\nabla \cdot g\boldsymbol{a})(\nabla \times \boldsymbol{E})]\} \tag{5.1.56c}$$

在上述推导中，式(5.1.56)是通过应用式(5.1.40)获得的。应用矢量恒等式 $(\nabla \times \boldsymbol{E}) \times \nabla\phi = \phi(\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}) - \nabla \times (\phi\nabla \times \boldsymbol{E})$，把式(5.1.56b)的第二项转变为式(5.1.56c)的第二项。把式

(5.1.56c)代入式(5.1.48)时需要注意,式(5.1.56c)中最后一项矢量旋度的面积分,根据高斯定理它等效于旋度的散度体积分,应该趋于零。还应指出$\nabla\times\boldsymbol{E}=\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}$,以及在$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})=0$时,有$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=k^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$。于是

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') = -\oiint \mathrm{d}S'\{\mathrm{i}\omega\mu[\hat{\boldsymbol{s}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})]g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + [\hat{\boldsymbol{s}}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})]\nabla g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + [\hat{\boldsymbol{s}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})]\times\nabla g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\} \tag{5.1.57}$$

利用$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$的对称特性,将带撇和不带撇的量互换,并将它用于图5.1-12中的S'面上,则可得到Stratton-Chu公式

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \oiint_{S'} \mathrm{d}S'\{\mathrm{i}\omega\mu[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + [\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\nabla' g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + [\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\times\nabla' g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\} \tag{5.1.58}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \oiint_{S'} \mathrm{d}S'\{-\mathrm{i}\omega\epsilon[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + [\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\nabla' g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + [\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\times\nabla' g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\} \tag{5.1.59}$$

应该指出Stratton-Chu公式中需要$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$在S'面上的法向分量。

例 5.1.8 弗朗兹(Franz)公式。

弗朗兹公式可由式(5.1.58)和(5.1.59)导出,并由它们在S'面上的切向分量来表示$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$和$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$。对式(5.7.59)取旋度,注意,其中$\nabla g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\nabla' g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$则有

$$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{i}\omega\epsilon\nabla\times\oiint_{S'}\mathrm{d}S'[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - \nabla\times\oiint_{S'}\mathrm{d}S'[\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\nabla g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + \nabla\times\oiint_{S'}\mathrm{d}S'\,\nabla\times[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{5.1.60}$$

式(5.1.60)右端第二项趋于零,第三项积分号内的旋度算符可提至积分式外。利用麦克斯韦方程$\nabla\times\boldsymbol{H}=-\mathrm{i}\omega\epsilon\boldsymbol{E}$则可得

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \nabla\times\oiint_{S'}\mathrm{d}S'[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + \frac{\mathrm{i}}{\omega\epsilon}\nabla\times\nabla\times\oiint_{S'}\mathrm{d}S'[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{5.1.61}$$

由对偶性

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \nabla\times\oiint_{S'}\mathrm{d}S'[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - \frac{\mathrm{i}}{\omega\mu}\nabla\times\nabla\times\oiint_{S'}\mathrm{d}S'[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{5.1.62}$$

现在,此两式均只与S'面上电场和磁场的切向分量有关。

例 5.1.9 用于绕射的基尔霍夫(Kirchhoff)标量公式。

用于绕射的基尔霍夫公式可以容易地从Straffon-Chu公式(5.1.58)获得。鉴于以下事实,$\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')=\nabla'\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')$和$(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E})\times\nabla' g=\boldsymbol{E}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla' g-\hat{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{E}\cdot\nabla' g$,式(5.1.58)变为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \oiint_{S'}\mathrm{d}S'\{[\hat{\boldsymbol{n}}\times(\nabla'\times\boldsymbol{E})]g + (\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E})\nabla' g + \boldsymbol{E}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla' g - \hat{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{E}\cdot\nabla' g\}$$

$$= \oint\!\!\!\oint_{S'} \mathrm{d}S' \{ \boldsymbol{E}\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla' g - g(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla')\boldsymbol{E} \} + \oint\!\!\!\oint_{S'} \mathrm{d}S' \{ \nabla'(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot g\boldsymbol{E}) - \hat{\boldsymbol{n}}\, \nabla' \cdot (g\boldsymbol{E}) \} \tag{5.1.63}$$

为得出最后结果,要应用$\nabla' \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') = 0$。式(5.1.63)的最后一个面积分等于零,因为这个面积分中两部分的第 i 分量可分别写为

$$\left[\oint\!\!\!\oint_{S'} \mathrm{d}S'\, \nabla'(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot g\boldsymbol{E}) \right]_i = \oint\!\!\!\oint_{S'} \mathrm{d}S' \partial'_i n_j g E_j = \iiint_{V'} \mathrm{d}V' \partial'_i \partial'_j g E_j \tag{5.1.64}$$

和

$$\left[\oint\!\!\!\oint_{S'} \mathrm{d}S' \hat{\boldsymbol{n}}\, \nabla' \cdot (g\boldsymbol{E}) \right]_i = \oint\!\!\!\oint_{S'} \mathrm{d}S' n_i\, \partial_j g E_j = \iiint_{V'} \mathrm{d}V' \partial'_i\, \partial'_j g E_j \tag{5.1.65}$$

式(5.1.64)和(5.1.65)最后的等式是张量演算中高斯定理的结果。于是

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \oint\!\!\!\oint_{S'} \mathrm{d}S' \left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') \frac{\partial g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}{\partial n} - g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')}{\partial n} \right] \tag{5.1.66}$$

这就是用于绕射的基尔霍夫公式的矢量形式,其中$\partial / \partial n = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla$。

要得到标量形式的基尔霍夫公式,只需假设电场仅有一个笛卡儿分量,如 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \hat{y} U(\boldsymbol{r})$,就可得

$$U(\boldsymbol{r}) = \oint\!\!\!\oint_{S'} \mathrm{d}S' \left[U(\boldsymbol{r}') \frac{\partial g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}{\partial n} - g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \frac{\partial U(\boldsymbol{r}')}{\partial n} \right] \tag{5.1.67}$$

这是物理光学中绕射问题最常用的公式。显然,当电场的其他分量变得重要时,这个公式就失效了。因此,以线极化平面波通过一个孔径时的绕射情况为例,这个公式只在靠近观察轴的方向上,即在垂直于孔径的视轴附近有效,远离该轴时,绕射场分量不再与线极化的孔径场保持相同方向。

源于标量波动方程的推导

我们已经从并矢和矢量理论的观点看到标量理论的局限性。但是标量绕射理论自身是完全和连贯的。式(5.1.67)可以由标量方程

$$(\nabla^2 + \mathrm{k}^2)\mathrm{U}(\mathrm{r}) = 0 \tag{5.1.68}$$

应用格林定理

$$U\, \nabla^2 g - g\, \nabla^2 U = \nabla \cdot (U\, \nabla g - g\, \nabla U) \tag{5.1.69}$$

导出。将式(5.1.69)在由 S'面和无穷大面所包围的体积 V 内取积分,并应用式(5.1.41)就能得到基尔霍夫公式(5.1.67)。注意,$\hat{\boldsymbol{n}}$ 垂直于S'面并指向区域V内。由 Sommerfeld 辐射条件知道无穷远处的面积分趋于零。

式(5.1.67)中标量格林函数的法向偏导可写为

$$\frac{\partial g}{\partial n} = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla' g \doteq -\left(\mathrm{i}k - \frac{1}{R}\right) \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R} (\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{R}})$$

其中,$\hat{\boldsymbol{R}}$ 表示$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$方向的单位矢量。将它代入式(5.1.67)可得

$$U(\boldsymbol{r}) = -\oint\!\!\!\oint_{S'} \mathrm{d}S' \left[\left(\mathrm{i}k - \frac{1}{R}\right) U(\boldsymbol{r}')(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{R}}) + \frac{\partial U(\boldsymbol{r}')}{\partial n} \right] \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R} \tag{5.1.70}$$

因此,标量波在 $\boldsymbol{r}$ 点的幅度 $U(\boldsymbol{r})$可表示各面元 $\mathrm{d}S'$所作贡献的叠加,源的强度用式(5.1.70)中

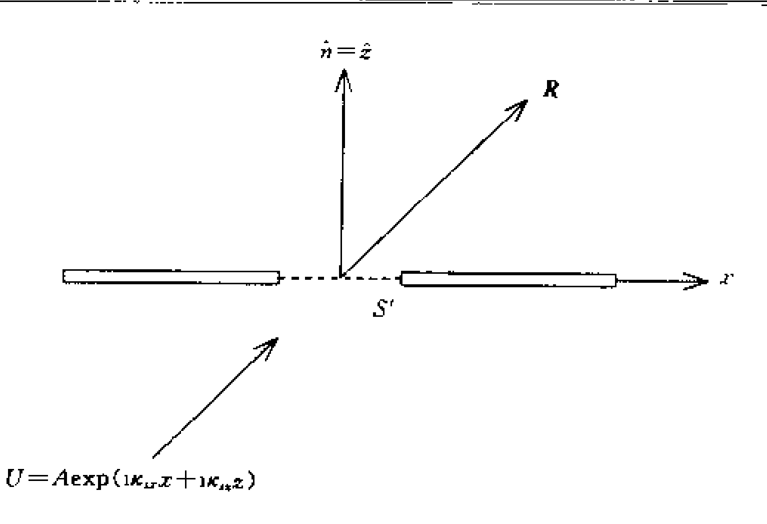


图 5.1-13 孔径的绕射

括号内各项表示。

现在来考虑无穷大平面(图 5.1-13)上孔径的绕射问题。为应用式(5.1.70)进行了所谓的基尔霍夫近似。(1)使 $U(\boldsymbol{r}')$和$\partial U(\boldsymbol{r}')/\partial n$ 的值在S'上除孔径处之外处处为零。(2)使孔径上$U(\boldsymbol{r}')$和$\partial U(\boldsymbol{r}')/\partial n$ 的值与没有S'时入射波对应的值相等。假设孔径被一平面波照射,即

$$U(\boldsymbol{r}') = A\exp[ik_{sx}x' + ik_{sz}z'] \tag{5.1.71}$$

有

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla' U(\boldsymbol{r}') = i(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{k}_s) U(\boldsymbol{r}') \tag{5.1.72}$$

其中,$\boldsymbol{k}_s = \hat{x}k_{sx} + \hat{z}k_{sz}$,进一步假设频率非常高,以至式(5.1.70)的 $1/R$ 项与 ik 项相比可以忽略。鉴于式(5.1.72),可从式(5.1.70)出发得到

$$U(\boldsymbol{r}) = -ik \oiint_{ap} dS'[(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{R}}) + (\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{k}}_s)]\, U(\boldsymbol{r}')\frac{e^{ikR}}{4\pi R} \tag{5.1.73}$$

其中,$\hat{\boldsymbol{k}}_s = \boldsymbol{k}_s/k$。$[(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{R}}) + (\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_s)]/2$ 项通常称之为倾斜因子,它是小于 1 的正值。当入射波与孔径垂直时,倾斜因子简化为$(1+\cos\theta)/2$。如果把积分视为各二次源贡献的叠加,那么倾斜因子实际上就是每个基本源点的各向异性的方向性系数图。菲涅耳用惠更斯小波概念解释绕射方向图时,发现为获得精确的结果,必须把振幅因子 $ik(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{R}} + \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_s)$作为前提条件。而基尔霍夫则证明了振幅因子实际上就是标量波理论的直接结果。

基尔霍夫近似法要求同时规定 S'面上的 $U(\boldsymbol{r})'$及其法向导数$\partial U(\boldsymbol{r}')/\partial n$ 两者,而惟一性定理则只要求规定 S'面上各点的 $U(\boldsymbol{r})'$或$\partial U(\boldsymbol{r}')/\partial n$ 之一。Sommerfeld 用选择不同的标量格林函数 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$的方法绕过这个困难,此时 S'平面上$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$或者$\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')/\partial n$ 为零,使我们只需要规定$\partial U(\boldsymbol{r}')/\partial n$ 或者 $U(\boldsymbol{r}')$。

例 5.1.10 零消定理和扩展的边界条件。

考虑有一平面波垂直投射于平直半空间的介质上。应用矢量形式的基尔霍夫公式(5.1.66)解绕射问题。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \oiint_{S'} dS'\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n} - g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right] \tag{5.1.74}$$

其中,$\frac{\partial}{\partial n} = \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla$,总电场为

$$E_y = E_{yi} + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \left[E_y(x',y',0) \frac{\partial g}{\partial z'} - g \frac{\partial E_y(x',y',z')}{\partial z'} \right]_{z'=0}$$

$$= E_{yi} + \left[E_y(0) \frac{\partial g}{\partial z'} - g \frac{\partial E_y(z')}{\partial z'} \right]_{z'=0}$$

$$= E_{yi} + \left[E_y(0) \frac{\partial g}{\partial z'} - g(-i\omega\mu H_x(0)) \right]_{z'=0}$$

其中格林函数 $g(z,z') = \mathrm{i}k|z-z'|/2k$。

(1)如果区域 1 与区域 0 相同,则有 $E_y(0) = E_0, H_x(0) = E_0/\eta$。于是在区域 0 中

$$E_y = E_{yi} + \left[E_0 \frac{\partial g}{\partial z'} - g(-\mathrm{i}kE_0) \right] = E_0 e^{-ikz}$$

在区域 1 中

$$E_y = E_{yi} + \left[E_0 \frac{\partial g}{\partial z'} - g(-\mathrm{i}kE_0) \right] = E_0 e^{-ikz} - E_0 e^{-ikz} = 0$$

(2)如果区域 1 是理想导体,那么在区域 0 中有 $E_y(0) = 0, H_x(0) = 2E_0/\eta$。

$$E_y = E_{yi} + \left[E_0 \frac{\partial g}{\partial z'} - g(-\mathrm{i}2kE_0) \right] = E_0 e^{-ikz} + E_0 e^{-ikz}$$

在区域 1 中

$$E_y = E_{yi} + \left[E_0 \frac{\partial g}{\partial z'} - g(-\mathrm{i}2kE_0) \right] = 0$$

(3)如果区域 1 是电介质介质,则有 $E_y(z=0) = (1+R)E_0$ 和 $H_x(z=0) = (1-R)E_0/\eta$。于是,

在区域 0 中

$$E_y = E_{yi} + \left[E_0 \frac{\partial g}{\partial z'} - g(-\mathrm{i}kE_0) \right] = E_0 e^{-ikz} + RE_0 e^{ikz}$$

在区域 1 中

$$E_y = E_{yi} + \left[E_0 \frac{\partial g}{\partial z'} - g(-\mathrm{i}kE_0) \right] = 0$$

由电流产生的场消除了区域 0 内的入射场。

专题 5.1.D　菲涅耳(Fresnel)和夫琅禾费(Fraunhofer)绕射

作为惠更斯原理的应用举例,试考虑平面波在二维孔径上的绕射。令平面波为 $\hat{y}$ 方向的线极化波,从 $z<0$ 区域垂直入射于 x-y 平面的孔径上。在 $z>0$ 半空间内波被绕射,如图 5.1-14 所示。我们使用由惠更斯原理所得的结果来求解绕射场

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \oint\!\!\oint_{S'} dS' [\mathrm{i}\omega\mu \overline{\overline{G}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}') - \nabla \times \overline{\overline{G}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{M}_s(\boldsymbol{r}')] \tag{5.1.75}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \oint\!\!\oint_{S'} dS' [\mathrm{i}\omega\varepsilon \overline{\overline{G}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{M}_s(\boldsymbol{r}') + \nabla \times \overline{\overline{G}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}')] \tag{5.1.76}$$

假设孔经上有面电流 $\boldsymbol{J}_s = 2\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}$,而没有面磁流,则

$$\boldsymbol{J}_s = 2\hat{z} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}') = -\hat{\boldsymbol{y}} \frac{2}{\eta} E(x') \tag{5.1.77}$$

其中,$E(x')$描述孔径场分布。

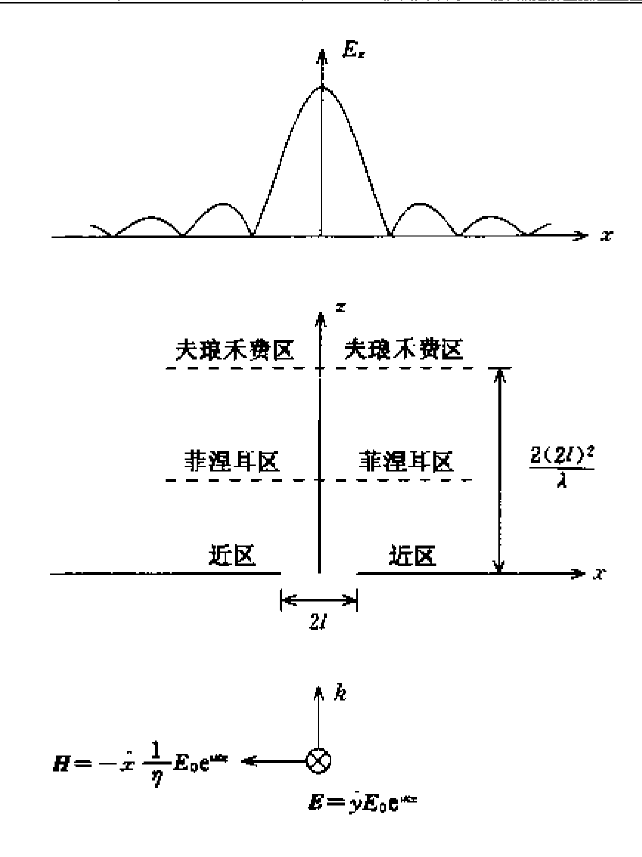


图 5.1-14 场在夫琅禾费区的绕射

由式(5.1.77)假设的面电流

$$E(r) = -\frac{2}{\eta}\oiint_{S'} dS' \mathrm{i}\omega\mu \boldsymbol{GG}(r,r')\cdot\hat{y}E(x')$$

这是一个二维的、与 y 坐标无关的问题。其中，$\partial/\partial y=0$。应用二维并矢格林函数

$$\boldsymbol{GG}(r,r') = \left(\boldsymbol{II}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)g(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')$$

其中，

$$g(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}') = \frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}\left(k\sqrt{(x-x')^2+z^2}\right)$$

是二维标量格林函数，与$\partial/\partial y=0$一样，可承认$\nabla\nabla\cdot\hat{y}=0$，亦有

$$E(x,z) = \hat{y}\frac{k}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dx'E(x')H_0^{(1)}\left(k\sqrt{(x-x')^2+z^2}\right) \tag{5.1.78}$$

在远场区我们采用汉开尔函数的渐近式 $H_0^{(1)}(\xi)\approx(2/\mathrm{i}\pi\xi)^{1/2}e^{\mathrm{i}\xi}$，还假定 $z\gg|x-x'|$并展开中间变量ξ，得

$$k\sqrt{(x-x')^2+z^2}\approx kz\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{x-x'}{z}\right)+\cdots\right] \tag{5.1.79}$$

于是式(5.1.78)变为

$$E(x,z) = \hat{y}\frac{k}{2}\sqrt{\frac{2}{\mathrm{i}\pi kz}}e^{\mathrm{i}kz}\int_{-\infty}^{\infty}dx'E(x')e^{\mathrm{i}k(x-x')^2/2z} \tag{5.1.80}$$

从上式可看出，我们对汉开尔函数渐近式指数部分的 ξ 采用了展开式(5.1.79)式的前二项，而对渐近式分母中的 ξ 只采用展开式的第一项。

由展开式(5.1.79)产生的式(5.1.80)称之为菲涅耳近似式。下式则是人们熟知的菲涅耳积分

$$F(w) = \int_0^w \mathrm{d}t \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi t^2/2} = C(w) + \mathrm{i}S(w) \tag{5.1.81}$$

注意其中的对称关系

$$C(w) = \int_0^w \mathrm{d}t \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) = -C(-w) \tag{5.1.82}$$

$$S(w) = \int_0^w \mathrm{d}t \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) = -S(-w) \tag{5.1.83}$$

菲涅耳积分的函数表是计算菲涅耳近似式的一种方便的形式。但当 w 值小时，积分式(5.1.81)可展开成 w 的幂级并积分求解。当 $w\to 0$ 时，有

$$F(w) \approx w$$

当 w 值较大时，积分式可展开成 w 的负幂级数。当 $w\to\infty$ 时有

$$F(\infty) = \int_0^\infty \mathrm{d}t \mathrm{e}^{i\pi t^2/2} = \sqrt{2/\pi}\mathrm{e}^{i\pi/4}\int_0^\infty \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-x^2} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}$$

图 5.1-15 示出 $C(w)$和 $S(w)$的值。当将其值在由 $C(w)$和 $S(w)$形成的二维空间中表述时，$C(w)+\mathrm{i}S(w)$的轨迹形成图 5.1-16 所示的考纽(Cornu)螺线。

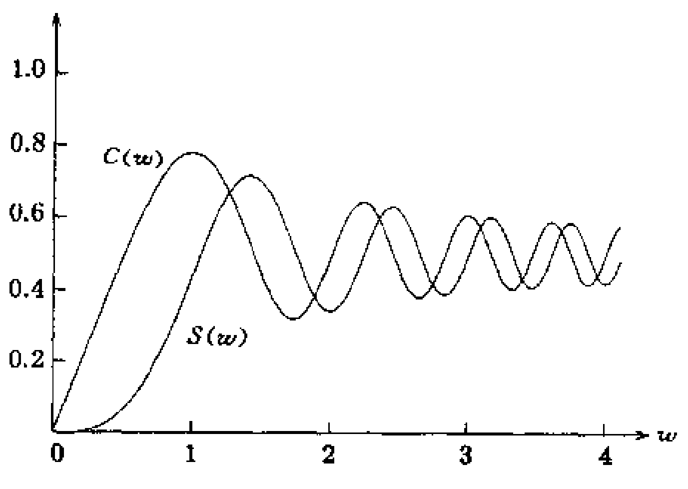


图 5.1-15　菲涅耳积分 $C(w)$和 $S(w)$

注意下列二式

$$\frac{\mathrm{d}C(w)}{\mathrm{d}w} = \cos\left(\frac{\pi}{2}w^2\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}S(w)}{\mathrm{d}w} = \sin\left(\frac{\pi}{2}w^2\right)$$

考纽螺线的斜率为

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{d}S/\mathrm{d}w}{\mathrm{d}C/\mathrm{d}w} = \tan\left(\frac{\pi}{2}w^2\right) \tag{5.1.84}$$

θ 角随 w^2 单调增大。当 w^2 为奇整数时，螺线的正切为垂直，而 w^2 为偶整数时则为水平。

沿螺线增量的长度为

$$(\mathrm{d}C)^2 + (\mathrm{d}S)^2 = \left[\left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}w}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}w}\right)^2\right]\mathrm{d}w^2 = \mathrm{d}w^2 \tag{5.1.85}$$

因此，w 是考纽螺线从原点起的长度。

为说明考纽螺线的用途，先观察半空间孔径的绕射。积分限从 0 至 ∞ 时，式(5.1.81)的电

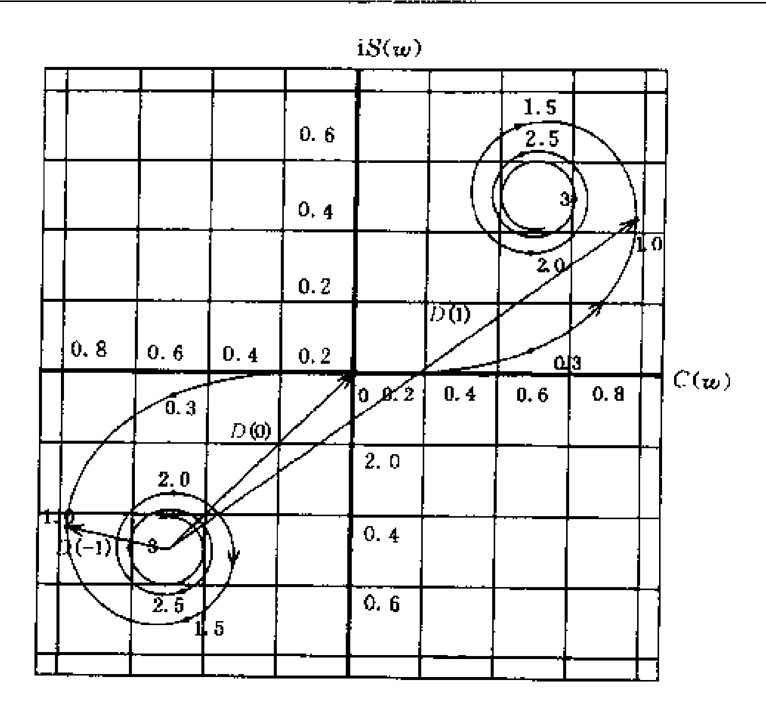


图 5.1-16 考纽螺线

场具有如下形式。

$$E(x,z)=\hat{y}\frac{E_0}{\sqrt{2i}}e^{ikz}D(x)$$

其中，

$$\begin{aligned}D(x)&=\sqrt{\frac{k}{\pi z}}\int_0^\infty dx'e^{ik(x'-x)^2/2z}=\int_0^\infty dte^{i\pi t^2/2}-\int_0^{-\sqrt{\frac{k}{\pi z}}x}dte^{i\pi t^2/2}\\&=F(\infty)-F(-\sqrt{k/\pi z}x)\\&=\frac{1}{2}-C(-\sqrt{k/\pi z}x)+i\left[\frac{1}{2}-S(-\sqrt{k/\pi z}x)\right]\end{aligned}$$

$\boldsymbol{E}$ 的振幅与 $D(x)$ 的振幅成正比。下面指出 $D(x)$ 的几个特殊值。

$$D(-\infty)=0$$

$$D(0)=\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}$$

$$D(\infty)=1+i$$

在考纽螺线(图 5.1-15)中，可以把左下方螺线的中心作为 $D(-\infty)$ 的参考点。那么，从 $D(-\infty)$ 到 $x=0$ 点的距离对应 $D(0)$ 的幅度。相对应 $D(\infty)$ 的点就是右上方螺线的中心。从 $D(-\infty)$ 起的距离就是 $D(\infty)$ 的幅度。当我们从 $x<0$ 的阴影区最深处朝 $x>0$ 的照明区移动时，$D(x)$ 的幅度是参考点 $D(-\infty)$ 到螺线上对应于 x 的某个点的距离。因此，$|D(x)|$ 值先单调增大，直到 $x=0$，然后变为振荡状态，并趋于最终值 $\sqrt{2}$。如用 $\sqrt{2}$ 规一化 $D(x)$ 值，则最终值是 1，而在 $x=0$ 处时为 1/2(图 5.1-17)。

隙缝的绕射

现在来考虑 $\hat{x}$ 方向宽度为 $2l$(图 5.1-14)，$\hat{y}$ 方向为无穷大的隙缝，根据式(5.1.77)，孔径的表面电流为

$$\boldsymbol{J}_s=-\hat{y}\frac{2E_0}{\eta}U(l-|x'|)$$

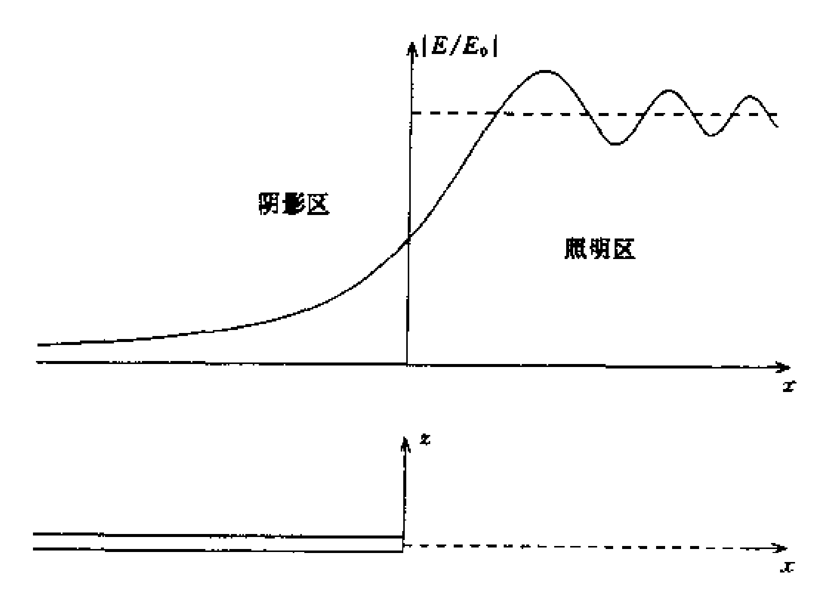


图 5.1-17　半平面孔径的绕射

其中，E_0 是入射波的幅度，$U(l-|x'|)$是单位阶跃函数，在$|x'|\leqslant l$ 时，它等于 1，在$|x'|\geqslant l$ 时它等于 0。可证明此假设是有理的，例如，不透明的屏对光的绕射。但是，在理想导电屏的情况，$x=\pm l$ 处不满足切向电场为 0 的边界条件。

在 x-z 平面上距离为 z 处，有电场

$$\boldsymbol{E}(x,z)=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{E_0}{\sqrt{2}\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}D(x)$$

其中，

$$\begin{aligned}D(x)&=F\left[(l-x)\sqrt{k/\pi z}\right]-F\left[-(l+x)\sqrt{k/\pi z}\right]\\&=F\left[(l-x)\sqrt{k/\pi z}\right]+F\left[(l+x)\sqrt{k/\pi z}\right]\end{aligned}$$

上面的第二个等式从式(5.1.83) $F(w)$的对称关系得出。很清楚，$|D(x)|$以 $x=0$ 为对称。由式(5.1.85)可见，$|D(x)|$相应于一弧的两端点的间距，弧的长度与 $2l$ 成正比。在 $x=0$ 处，$D(0)$的幅度最大。随着 x 的增大，$|D(x)|$先是减小，然后振荡变化。z 很大时将进入夫琅禾费(Fraunhofer)区，在此区内的分析可以简化。

夫琅禾费(Fraunhofer)近似

当观察点离有限孔径很远时，二维隙缝绕射问题的菲涅耳近似可进一步简化。此时有

$$\begin{aligned}k\sqrt{(x-x')^2+z^2}&\approx kz\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{x-x'}{z}\right)^2\right]\\&\approx kz+\frac{kx^2}{2z}-\frac{kxx'}{z}\end{aligned}\tag{5.1.86}$$

这就是通常所说的夫琅禾费(Fraunhofer)近似。平面波垂直入射至宽度为 $2l$ 的隙缝时，在夫琅禾费区内的电场变为

$$\boldsymbol{E}(x,z)=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{k}{2}\sqrt{\frac{2}{\mathrm{i}\pi kz}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz+\mathrm{i}kx^2/2z}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'E_0U(l-|x'|)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx/z)x'}\tag{5.1.87}$$

积分是阶跃函数的傅里叶变换，可得

$$\boldsymbol{E}(x,z)=\hat{\boldsymbol{y}}klE_0\sqrt{\frac{2}{\mathrm{i}\pi kz}}\frac{\sin(kxl/z)}{kxl/z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz+\mathrm{i}kx^2/2z}\tag{5.1.88}$$

注意，在式(5.1.87)中源函数 $E_0U(l-|x'|)$ 可以用其他一般的孔径场分布代替，通常认为，在用近似式(5.1.86)表征的夫琅禾费区内，z 为常数处观察到的场与式(5.1.87)中孔径场的傅里叶变换成正比。式(5.1.87)中的平方相位项 $e^{ikx^2/2z}$ 可用来计算弯曲波前的曲率。在夫琅禾费近似中，孔径上的平方相位校正项 $e^{ikx'^2/2z}$ 导致需要使用非涅耳积分。在辐射场区近似中，此关系不限于近轴方向上，而且还可进一步将夫琅禾费公式中的平方相位项忽略。

根据到孔径的距离，绕射场可分为近区，非涅耳区和夫琅禾费区(图 5.1-14)。夫琅禾费区与孔径的最小距离可取为 $z_F=\frac{2(2l)^2}{\lambda}$。1 cm 的孔径，在波长为 0.63 μm 时，夫琅禾费区起始于 $z_F\approx 320$ m 处，正好与进行傅里叶光学实验时颇为严格的约束条件相当。使用聚焦透镜也能解决这个问题。在近轴近似情况下，透镜的作用是使经它传输的波产生与 $e^{-ikx'^2/2f}$ 成正比的相位因子，式中 f 是透镜的焦距。如把透镜直接放置于孔径前，会发现，在非涅耳近似条件下，在 $z=f$ 处非涅耳绕射公式化为夫琅禾费公式。因此把一块屏放在离透镜一个焦距处，就能观察到孔径的傅里叶变换作用。

通常，观察点离孔径很远时，绕射场与带有面电流分布的孔径天线的辐射场相等效。辐射场近似取如下形式，即

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\approx r-\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}'$$

其中，r 是 $\boldsymbol{r}$ 的辐度，$\hat{\boldsymbol{r}}$ 是沿 $\boldsymbol{r}$ 的单位矢量，$\boldsymbol{r}=\hat{\boldsymbol{r}}r$。辐射场也存在于 $\boldsymbol{r}$ 方向上，即 $\boldsymbol{k}=\hat{\boldsymbol{r}}k$。对自由空间中的三维问题，并矢格林函数近似为

$$\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\left(\boldsymbol{II}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)\frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\approx\frac{e^{ikr}}{4\pi r}[\boldsymbol{II}-\hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}}]\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}$$

其中，算符∇由 $i\boldsymbol{k}$ 代替。惠更斯原理可写为下列形式：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\approx\frac{i\omega\mu e^{ikr}}{4\pi r}\oiint_{S'}dS'\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}\cdot\left[(\boldsymbol{II}-\hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}})\cdot\boldsymbol{J}_s\left(\boldsymbol{r}'-\frac{1}{\eta}\right)\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{M}_s(\boldsymbol{r}')\right]\tag{5.1.89a}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\approx\frac{ik e^{ikr}}{4\pi r}\oiint_{S'}dS'\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}\cdot\left[\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}')+\frac{1}{\eta}[\boldsymbol{II}-\hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}}]\cdot\boldsymbol{M}_s(\boldsymbol{r}')\right]\tag{5.1.89b}$$

可见两方程互相以如下置换式对偶 $\boldsymbol{E}=\eta\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{E}/\eta,\boldsymbol{J}_s=\boldsymbol{M}_s/\eta$ 和 $\boldsymbol{M}_s=-\eta\boldsymbol{J}_s$。可以发现式(5.1.89a)的第一项与以前计算的辐射场相同，只是体电流密度被替换，并变为对面电流密度沿包含源的表面取积分。

作为第一个例子，考虑一具有常数面电流的矩形口径天线的辐射

$$\boldsymbol{J}_s=\hat{\boldsymbol{x}}J_s$$

考虑用如下近似

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=(z^2+x^2+y^2-2xx'-2yy'+x'^2+y'^2)^{1/2}$$
$$=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}-\frac{xx'}{r}-\frac{yy'}{r}+\delta$$

误差项可由平方相位近似

$$\delta\approx\frac{(D_x/2)^2}{2r}+\frac{(D_y/2)^2}{2r}$$

其中 D_x 和 D_y 为口径的尺寸。可以采用某个限制相位误差的标准,即由每个尺寸引起的相位误差都要小于 $\pi/8$,令 D 代表 D_x 或 D_y

$$\frac{\pi}{8} > \frac{k(D/2)^2}{2r} = \frac{2\pi D^2}{8\lambda r}$$

因此, $r > \dfrac{2D^2}{\lambda}$ 超过这个距离就是夫琅禾费区。利用辐射场区的公式,可找出电场矢量

$$E_x = \frac{\mathrm{i}\omega\mu J_s \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\int_{-D_x/2}^{D_x/2} \mathrm{d}x' \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx'\sin\theta\cos\phi}\int_{-D_y/2}^{D_y/2}\mathrm{d}y' \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky'\sin\theta\sin\phi}$$

$$= \frac{\mathrm{i}\omega\mu J_s \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r} D_x D_y \frac{\sin\left(\frac{kD_x}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{\frac{kD_x}{2}\sin\theta\cos\phi}\frac{\sin\left(\frac{kD_y}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{\frac{kD_y}{2}\sin\theta\sin\phi}$$

图 5.1-18 表示 $\sin u/u$ 曲线,在 $u = \pm 0.44\pi$ 处 $(\sin u)/u$ 的值近似为 $1/\sqrt{2}$。半功率波束宽度(HPBW)是辐射功率为 $u=0$ 时的一半的角度。最大辐射强度为:

$$r^2\mathrm{Re}\{S\} = \frac{1}{2\eta}\left(\omega\mu\frac{J_s}{4\pi}D_x D_y\right)^2$$

总辐射功率可通过沿口径对场取积分算得。当 $\boldsymbol{E} = -\hat{x}\eta J_s/2, \boldsymbol{H} = -\hat{y}J_s/2$ 时,可得到

$$P_t = \frac{\eta}{8}J_s^2 D_x D_y$$

及方向性系数

$$D = \frac{4\pi r^2 \mathrm{Re}\{S\}}{P_t} = \frac{k^2}{\pi}D_x D_y$$

必须指出,这个辐射特性仅在通常定义为 $r > 2D^2/\lambda$ 的远场区内有效。

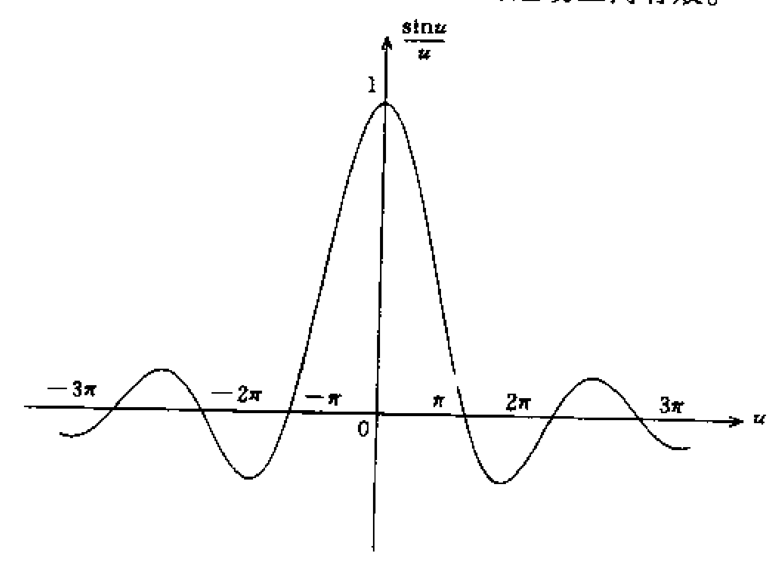


图 5.1-18 sinu/u 曲线

另一个例子,考虑一平面波垂直入射在圆形口径时的绕射。此时不限制观察点是否靠近 z 轴,应用于 5.1 节中讨论过的等效问题 3 口径上的平面波,假设有面磁流 $\boldsymbol{M}_s = -2\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}$ 而没有面电流,由惠更斯原理可得

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 2\oint\!\!\!\oint_S \mathrm{d}S'\, \nabla\times \boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})] \tag{5.1.90}$$

$$= 2\nabla\times \oiint_{S'} dS'\hat{n}\times E(r')\frac{e^{ik|r-r'|}}{4\pi|r-r'|}$$

其中,S'表示圆形口径的面积。

在远场区内,观察点离口径如此之远,以至起始于口径的全部波矢量都互相平行,有 $k|r-r'|\approx kr-k\cdot r'$。式(5.1.90)内的积分变为

$$E(r)\approx\frac{ie^{ikr}}{2\pi r}k\times\oiint_{S'} dS'\hat{n}\times E(r')e^{-ik\cdot r'}$$

令入射的平面波极化于 $\hat{x}$ 方向,$k=\hat{x}k\sin\theta\cos\phi+\hat{y}k\sin\theta\sin\phi+\hat{z}k\cos\theta$。则有

$$\begin{aligned}E(r) &= \frac{iE_0e^{ikr}}{2\pi r}(k\times\hat{y})\int_0^R d\rho'\int_0^{2\pi}\rho'd\phi' e^{-ik\rho'\sin\theta\cos(\phi-\phi')}\\ &= (\hat{z}\sin\theta\cos\phi-\hat{x}\cos\theta)\frac{ikE_0e^{ikr}}{r}\int_0^R\rho' d\rho' J_0(k\rho'\sin\theta)\\ &= (\hat{z}\sin\theta\cos\phi-\hat{x}\cos\theta)\frac{ikR^2E_0e^{ikr}}{r}\frac{J_1(kR\sin\theta)}{kR\sin\theta}\end{aligned}$$

其中,E_0 是入射波的幅度,R 是口径的半径。

在前面的一些例子中,我们假设口径为不透明屏上的孔,等效源是由原始平面波引起的一部份表面电流或磁流。现在考虑一个载有 TE_{10}模,开口于自由空间的矩形波导。由等效原理,在 $-a/2<x'<a/2$ 和 $-b/2<y'<b/2$ 范围内,波导口的口径场可由如下面电流近似。

$$J_s r' = -\hat{y}\frac{2E_0}{\eta}\cos\frac{\pi x'}{a}$$

远场为口径源的傅里叶变换

$$\begin{aligned}E &= \frac{i\omega\mu e^{ikr}}{4\pi r}\oiint_{S'} dS' e^{-ik\cdot r'}[\bar{I}-\hat{r}\hat{r}]\cdot J_s(r')\\ &= \frac{-i\omega\mu e^{ikr}}{4\pi r}\frac{2E_0}{\eta}[\bar{I}-\hat{r}\hat{r}]\cdot(\hat{r}\sin\theta\sin\phi+\hat{\theta}\cos\theta\sin\phi+\hat{\phi}\cos\phi)\times\\ &\qquad\int_{-b/2}^{b/2}dy'\int_{-a/2}^{a/2}dx'\cos\frac{\pi x'}{a}e^{-ik_xx'-ik_yy'}\\ &= -(\hat{\theta}\cos\theta\sin\phi+\hat{\phi}\cos\phi)i\omega\mu\frac{4E_0}{\eta}\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\left(\frac{\sin k_y\frac{b}{2}}{k_y}\right)\times\\ &\qquad\left\{\frac{\sin\left[\left(k_x+\frac{\pi}{a}\right)\frac{a}{2}\right]}{k_x+\frac{\pi}{a}}+\frac{\sin\left[\left(k_x-\frac{\pi}{a}\right)\frac{a}{2}\right]}{k_x-\frac{\pi}{a}}\right\}\end{aligned}$$

其中,$k_x=k\sin\theta\cos\phi$ 和 $k_y=k\sin\theta\sin\phi$。

习题

5.1.1 设闭合面 S 上的切向场 E 和切向场 H 与阻抗矩阵 $z(r)$之间具有如下关系

$$\hat{n}\times E = Z(r)\cdot(\hat{n}\times H)$$

其中,$\hat{n}$ 是 S 表面的内向法线单位矢量,S 面包围所不研究的区域 V,

$$Z_{ij}(r) = \hat{s}_iZ_{ij}(r)\hat{s}_j$$

$\hat{s}_i$ 和 $\hat{s}_j(i,j=1,2)$是与 S 面正切的单位矢量,且 $\hat{s}_1$,$\hat{s}_2$ 和 $\hat{n}$ 三者构成一正交坐标系。试证明

$$E_1 = -Z_{21}H_2+Z_{22}H_1$$

$$E_2 = Z_{11}H_2-Z_{12}H_1$$

设 $\delta E = E_1\hat{s}_1 + E_2\hat{s}_2 + E_n\hat{n}$ 和 $\delta H = H_1\hat{s}_1 + H_2\hat{s}_2 + H_n\hat{n}$，则

$$\hat{n}\cdot\delta E\times\delta H^* = -Z_{21}H_2H_2^* + Z_{22}H_1H_2^* - Z_{11}H_2H_1^* + Z_{12}H_1H_1^*$$

$$\hat{n}\cdot\delta E^*\times\delta H = -Z_{21}^*H_2^*H_2 + Z_{22}^*H_1^*H_2 - Z_{11}^*H_2^*H_1 + Z_{12}^*H_1^*H_1$$

试确定能使惟一性定理成立的 Z_{ij} 的条件。

5.1.2 根据镜像原理，导体平面上的垂直单极天线与移去导体时的偶极子等效。在无线电广播台，地面被用于导体平面。试计算导体平面上单极子的功率和增益。

5.1.3 微带天线由带有平面导电板的介质片和印刷在介质片上的导电贴片组成，天线的辐射场由导电贴片上的面电流产生。用等效原理计算条形表面面磁流产生的场，其基本原理是，导电贴片下形成的场很像衬底内环绕贴片的磁壁包围的谐振腔内的场。

印刷的贴片是理想导体，以 S_{a1} 表示，其表面的法向为 $\hat{z}$。衬底以区域 1 表示，其介电系数为 ϵ_1，磁导率为 μ，厚度为 d。自由空间以区域 0 表示，其介电系数为 ϵ，磁导率为 μ。衬底位于接地平面上。印刷贴片在接地平面上的垂直投影以 S_{a2} 表示，其表面法向为 $-\hat{z}$。以 S_{a1} 和 S_{a2} 为界的条形侧壁称之为 S_b。

我们来考虑以 S_b 和 $S_a = S_{a1} + S_{a2}$ 为周界的腔体空间，假设 S_b 是理想导磁体，令腔体内电场和磁场以 $\boldsymbol{E}_c$ 和 $\boldsymbol{H}_c$ 表示。边界条件为

$$\hat{n}\times\boldsymbol{E}_c = 0,\qquad 在\ S_a\ 上$$

$$\hat{n}\times\boldsymbol{H}_c = 0,\qquad 在\ S_b\ 上$$

证明由 S_{a1} 上面电流在腔体外产生的场等于由 S_b 上等效面磁流产生的场。

(1)对区域 1 中的 $\boldsymbol{r}'$ 和区域 0 中的 $\boldsymbol{r}$ 以及 $K_1^2 = \omega^2\mu\epsilon_1$，第三类并矢格林函数(Tai,1971)满足如下方程：

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{GG}_{10}^{(3)}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}) - k_1^2\boldsymbol{GG}_{10}^{(3)}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}) = 0$$

在区域 1 腔体内的电场满足如下方程：

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}_c(\boldsymbol{r}') - k_1^2\boldsymbol{E}_c(\boldsymbol{r}') = 0$$

利用矢量格林定理，麦克斯韦方程 $\nabla\times\boldsymbol{E}_c(\boldsymbol{r})'$ 和 S_{a2} 上 $\hat{n}\times\boldsymbol{GG}_{10}^{(3)} = 0$，试证明

$$0 = \mathrm{i}\omega\mu\int_{S_{a1}}\mathrm{d}S'\hat{n}\times\boldsymbol{H}_c(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{GG}_{10}^{(3)}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}) + \int_{S_b}\mathrm{d}S'\hat{n}\times\boldsymbol{E}_c(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla\times\boldsymbol{GG}_{10}^{(3)}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})$$

(2)并矢格林函数的对称性可表示为

$$[\boldsymbol{GG}_{10}^{(3)}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})]^t = \boldsymbol{GG}_{01}^{(3)}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})$$

$$[\nabla\times\boldsymbol{GG}_{10}^{(3)}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})]^t = \frac{\epsilon_1}{\epsilon}\nabla\times\boldsymbol{GG}_{01}^{(4)}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})$$

其中，$\boldsymbol{GG}_{01}^{(4)}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})$ 是第四类并矢格林函数，这种函数具有如下对称性

$$[\boldsymbol{GG}_{01}^{(4)}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})]^t = \frac{\epsilon_1}{\epsilon}\boldsymbol{GG}_{10}^{(4)}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})$$

试证明

$$\boldsymbol{E}_J(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_M(\boldsymbol{r})$$

其中，

$$\boldsymbol{E}_J(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{i}\omega\mu\int_{S_{a1}}\mathrm{d}S'\boldsymbol{GG}_{01}^{(3)}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\cdot[\hat{n}\times\boldsymbol{H}_c(\boldsymbol{r}')]$$

是由 S_{a1} 上的等效面电流 $\hat{n}\times\boldsymbol{H}_c(\boldsymbol{r}')$ 生成的电场，而

$$\boldsymbol{E}_M(\boldsymbol{r}) = \frac{\epsilon_1}{\epsilon}\int_{S_b}\mathrm{d}S'\,\nabla\times\boldsymbol{GG}_{01}^{(4)}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\cdot[\hat{n}\times\boldsymbol{E}_c(\boldsymbol{r}')]$$

是由 S_b 的等效面磁流 $\hat{n}\times\boldsymbol{E}_c(\boldsymbol{r}')$ 生成的电场。

5.1.4 按下列步骤可求得理想导体半空间的并矢格林函数。$\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 应满足的方程为

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - k^2\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{II}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

边界条件为

$$0 = \hat{z}\times\boldsymbol{E}\Big|_{z=0} = \mathrm{i}\omega\mu\iiint_V\mathrm{d}V'[\hat{z}\times\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]_{z=0}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$$

全部的 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$ 都必须能满足此条件。因此

$$\hat{z} \times \overline{\overline{G}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\Big|_{z=0} = 0$$

其中，$\hat{z}$ 是表面的单位矢量。给定一个任意指向的赫兹偶极子，将它分解为两个分量，一个平行于边界，另一个垂直于边界。试应用镜像原理，分别对该偶极子的平行和垂直分量证明，有

$$\overline{\overline{G}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \overline{\overline{G}}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - \overline{\overline{G}}_0[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' \cdot (\overline{\overline{I}} - 2\hat{z}\hat{z})] \cdot (\overline{\overline{I}} - 2\hat{z}\hat{z})$$

其中，$\overline{\overline{G}}_0$ 是自由空间中的并矢格林函数，假设其原点在大部份为无损耗的表面上，在观察点和源点同时转移的条件下，自由空间中的并矢格林函数不变，

$$\overline{\overline{G}}_0(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{r}_0) = \overline{\overline{G}}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$$

又证明对导体的半空间，并矢格林函数的这个特性将不保持，除非 $\hat{r}_0 \cdot \hat{z} = 0$。请回答这一事实的物理原因是什么？

5.1.5 电场为 $\boldsymbol{E} = \hat{y}E_0 e^{ikz}$ 的平面波，垂直入射于矩形隙缝，试确定由该平面波在远场区内产生的磁场 $\boldsymbol{H}$ 的绕射方向图。

5.1.6 应用等效原理，计算由同轴线开口端辐射的磁场 $\boldsymbol{H}$。假设同轴线内只有 TEM 波，其等效面磁流为

$$\boldsymbol{M}_s = -\hat{\boldsymbol{\phi}}' \frac{2E_0 a}{\rho'} = \frac{2E_0 a}{\rho'}(\hat{x}\sin\phi' - \hat{y}\cos\phi'), \qquad a < \rho' < b$$

其中，a 和 b 分别为同轴电缆的内外半径。

5.1.7 考虑一平面波

$$\boldsymbol{E}_i = \hat{y}E_0 e^{-ikz}, \quad \boldsymbol{H}_i = \hat{x}(E_0/\eta)e^{-ikz},$$

入射于一半径为 a 的球上，球半径 $a \gg \lambda$。假设球面上的散射场 $\boldsymbol{E}_s$ 和 $\boldsymbol{H}_s$ 保持有下列近似值。(1)在阴影区内 $\boldsymbol{E}_s \approx -\boldsymbol{E}_i$ 和 $\boldsymbol{H}_s \approx -\boldsymbol{H}_i$。(2)在照明区内 $\hat{r} \times \boldsymbol{E}_s \approx -\hat{r} \times \boldsymbol{E}_i$ 和 $\hat{r} \times \boldsymbol{H}_s \approx \hat{r} \times \boldsymbol{H}_i$，其中，$\boldsymbol{E}_i$ 和 $\boldsymbol{H}_i$ 为入射波的场。假设源分布是物理光学近似的结果，求解散射辐射场，并计算由下式定义的后向散射截面积

$$A_e = \lim_{r \to \infty}\left(4\pi r^2 \frac{P_s}{P_i}\right)$$

其中，P_s 是后向散射功率密度，P_i 是入射平面波的功率密度。

5.1.8 一隙缝天线由金属平面上的隙缝组成，其缝宽 w 无穷小，$\hat{z}$ 向长度 $2l$。设 $z=0$ 处跨缝电压为 V，隙缝区电场分布为 $(V/w)\sin k(l-|z|)$。设 $l = \lambda/4$，试证明互补结构是一长度为 $\lambda/2$ 的线天线。计算隙缝天线的输入阻抗。

5.1.9 试计算一个开路平行板波导的辐射场，假设平行板内的场为如下 TE_1 模。

$$E_y = E_0 \sin\frac{\pi}{d}\left(x - \frac{d}{2}\right)e^{ik_z z}$$

5.1.10 考虑一入射至导电板的平面波。导电板在 $\hat{x}$ 方向的长度为 a，$\hat{y}$ 方向的宽度为 b。假设导电板的尺寸很大，板后面的场可忽略。求解两种近似源分布时的散射场。

(1)导电板上的切向电场为零。用物理光学近似法，导电板上的切向磁场为入射场的两倍，因此

$$\boldsymbol{J}_s = 2\hat{n} \times \boldsymbol{H}^i = \hat{x}\frac{2E_0}{\eta}$$

试证明散射电场为

$$\boldsymbol{E}_s = (\hat{\boldsymbol{\phi}}\sin\phi - \hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\cos\phi)\frac{2ikE_0 e^{ikr}}{\pi r}\frac{\sin(k_x a/2)}{k_x}\frac{\sin(k_y b/2)}{k_y}$$

(2)应用感应定理，并利用由下列二式给出的源分布来计算散射场。

$$\boldsymbol{J}_s = -\hat{n} \times (\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_i) = -\hat{n} \times \boldsymbol{H}_i$$

$$\boldsymbol{M}_s = -\hat{n} \times (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_i) = \hat{n} \times \boldsymbol{E}_i = \hat{y}E_0$$

其中，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 代表散射体上总的场，它们都是在具有导体时外加电流的辐射。由于导电板上总的电场 $\boldsymbol{E}$ 为零，而且 $\boldsymbol{J}_s$ 不在理想导体前辐射，因而由镜像定理可知，在没有散射体时对散射场有响应的源是 $2\boldsymbol{M}_s$。

试证明,辐射电场矢量为

$$\boldsymbol{E}_s = (\hat{\boldsymbol{\phi}}\cos\theta\sin\phi - \hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\phi)\frac{2\mathrm{i}kE_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{\pi r}\frac{\sin(k_xa/2)}{k_x}\frac{\sin(k_yb/2)}{k_y}$$

(3)比较上述两种方法所得结果,证明在后向散射方向上的结果相同,对于垂直入射到一个大平板上的平面波,后向散射的散射截面,或雷达散射截面,或回波面积 A_e 为:

$$A_e = \lim_{r\to\infty}\left(4\pi r^2\frac{S^s}{S^i}\right) = \frac{k^2(\text{面积})^2}{\pi}$$

其中,$S^i = |E_0|^2/2\eta$,S^s 是散射功率密度。

5.1.11 考虑一隙缝的绕射问题,隙缝在 $\hat{x}$ 方向的宽度为 $2l$,在 $\hat{y}$ 方向的宽度为无穷长。一 $\hat{y}$ 极化的平面波从 $z\leqslant 0$ 垂直入射到隙缝上。在隙缝孔径上假设有场

$$\boldsymbol{E}(x,z=0) = \hat{\boldsymbol{y}}E_0U(l-|x|)$$

其中,$U(l-|x|)$为单位阶跃函数。在任何距离 z 处的场均可视为很多平面波的叠加,这些平面波的波矢量分量 k_x 的范围可从 $-\infty$ 到 ∞,则 z 处的场

$$\boldsymbol{E}(x,z) = \hat{\boldsymbol{y}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_x\varepsilon(k_x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_xx+\mathrm{i}k_zz}$$

其中,$k_z = (k^2-k_x^2)^{1/2}$,试证明在 $z=0$ 的孔径上有

$$\varepsilon(k_x) = \frac{E_0l}{\pi}\frac{\sin k_xl}{k_xl}$$

对积分主要的贡献来自于 k_x 轴上的$[-\pi/l,\pi/l]$区间,因为 $\varepsilon(k_x)$的峰值位于此区间内。假设 $k\gg\pi/l$,那么,在被积函数很大的区间内,$k_x\ll k$,近似有

$$k_z = (k^2-k_x^2)^{1/2}\approx k-\frac{k_x^2}{2k}+\cdots$$

试证明由驻相法计算所得的远场为

$$\boldsymbol{E}(x,z) = \hat{\boldsymbol{y}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx^2/2z)}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_x\varepsilon(k_x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z/2k)[k_x-(kx/z)]^2}$$

$$\approx \hat{\boldsymbol{y}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx^2/2z)}\sqrt{2\pi k/\mathrm{i}z}\,\varepsilon(kx/z)$$

因此,远场方向图与口径场方向图的傅里叶变换成正比。试证明口径上均匀照射时有

$$\boldsymbol{E}(x,z) = \hat{\boldsymbol{y}}E_0l\sqrt{2k/\mathrm{i}\pi z}\,\frac{\sin(klx/z)}{klx/z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx^2/2z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}$$

对位于距离 z 的屏,其上 x 点的相位为 $kz+k(z^2+x^2)^{1/2}\approx kz+kx^2/2z$。它的第一个零点将出现于 $klx_0/z=\pi$,此结果与两个中心距为 l 的等效源的孔径场相近似。这两个源的远场在 $\theta_0\approx x_0/z$ 角度方向上干涉抵消了。试概要描述在常数距离 $z=z_0$ 处的辐射场。

5.1.12 考虑如图 5.1-19 所示波在劈上的绕射。几何绕射理论(GTD)规定电场取如下形式

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^i + \boldsymbol{E}^r + \boldsymbol{E}^d$$

绕射场为

$$\boldsymbol{E}^d(s) = \boldsymbol{E}^i(0)\cdot\boldsymbol{D}(\hat{s},\hat{s}^i)A(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ks}$$

其中,$\hat{s}$ 是绕射射线的方向,$\hat{s}^i$ 是入射射线的方向,s 是绕射射线从劈开始光线路径的长度。平面波,圆柱形波和圆锥形波入射时,$A(s)=1/\sqrt{s}$;球面波入射时,$A(s)=[s^i/s(s^i+s)]^{1/2}$ 并矢绕射系数为

$$\boldsymbol{D}(\hat{s},\hat{s}^i) = -\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^i\hat{\boldsymbol{\beta}}_0D_v - \hat{\boldsymbol{\phi}}^i\hat{\boldsymbol{\phi}}D_h$$

式中 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^i = \hat{s}^i\times\hat{\boldsymbol{\phi}}^i$,$\hat{\boldsymbol{\beta}}_0 = \hat{s}\times\hat{\boldsymbol{\phi}}$,如图 5.1-20 所示,第一项对应于 TM 波,第二项对应于 TE 波。如果场点不接近阴影或反射边界,则标量绕射系数为

$$D_{v,h}(\phi,\phi^i,\beta_0) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\sin\frac{\pi}{n}}{n\sqrt{2\pi k}\sin\beta_0}\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\phi-\phi^i}{n}}\mp\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\phi+\phi^i}{n}}\right)$$

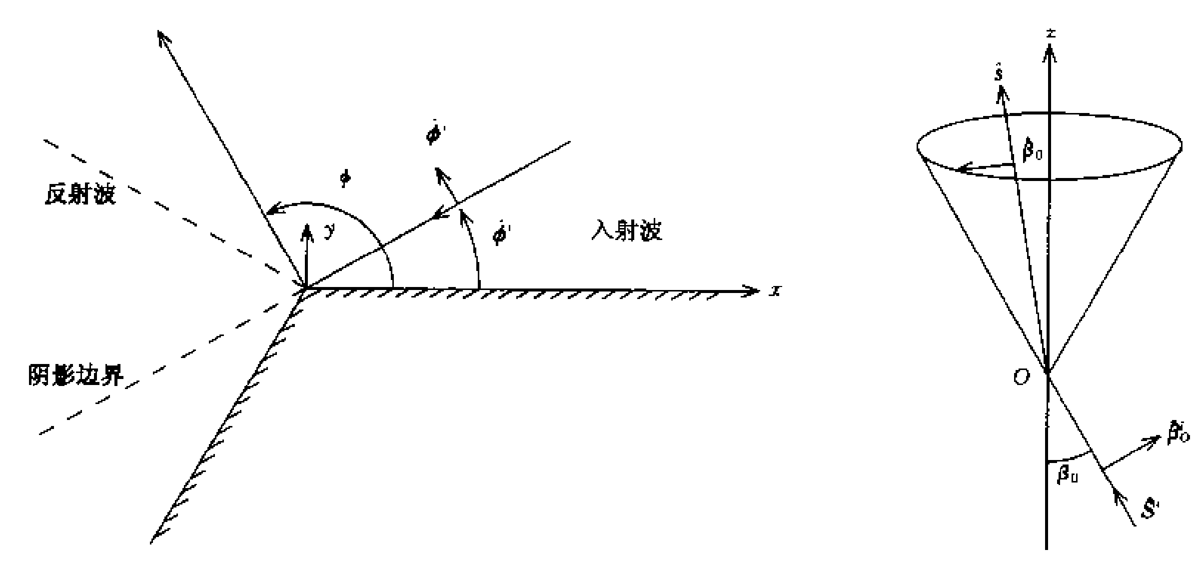


图 5.1-19 波在劈上的绕射　　　　图 5.1-20

式中的 $\mp$ 号取 - 号时用于垂直极化解 D_s，取 + 号时用于水平极化解 D_h 情况。

(a)试证明在 $\phi=0$ 和 $\phi=n\pi$ 时，$\boldsymbol{E}^d$ 的切向分量满足边界条件。

(b)试证明在阴影边界($\phi=\pi+\phi_i$)和在反射边界($\phi=\pi-\phi'$)GTD 失效。

5.1.13 宽度为 $w=2l$ 的隙缝的绕射作用，在 $dw\gg1$ 和 $w/z\ll1$ 的假设条件下，可发现其夫琅禾费场的绕射图与 $\sin(kxl/z)/(kxl/z)$ 函数成正比，函数的峰值在 $x=0$ 处，令 $x/z\approx\theta$ 为扩展角，试证明主波瓣的扩展解 $\theta_1\approx\dfrac{\lambda}{2l}$。其中，$\theta_1$ 定义为绕射图的第一零点，并证明最大副瓣数为 $N\leqslant w/\lambda_0$。

5.1.14 合成孔径雷达(SAR)的性能，依赖于一个运动的小天线(其口径尺寸为 l)，通过数字信号处理技术模拟大天线(其口径尺寸为 L)的能力。合成大天线的基础在于实际天线在不同时间的空间定位的精确程度。实际小天线的波瓣宽度是 λ/l。试证明 SAR 的地面分辨率是 l。这是一个很了不起的结果，它暗示辐射天线越小其地面分辨率越高。试分析什么原因限制了辐射天线的尺寸？

5.2 反作用和互易性

5.2.1 反作用

考虑一个以 $\boldsymbol{J}_a$ 和 $\boldsymbol{M}_a$ 表示的时谐源 a，处于以 $\boldsymbol{J}_b$ 和 $\boldsymbol{M}_b$ 表示的源 b 产生的场 $\boldsymbol{E}_b$ 和 $\boldsymbol{H}_b$ 中，源 a 与场 b 的相互作用可写作 $\langle a,b\rangle$，并定义为

$$\langle a,b\rangle=\iiint_V \mathrm{d}V(\boldsymbol{J}_a\cdot\boldsymbol{E}_b-\boldsymbol{M}_a\cdot\boldsymbol{H}_b) \tag{5.2.1}$$

注意，在表示式 $\langle a,b\rangle$ 中，其第一个字符 a 与源相联系，第二个字符 b 与场相联系，只要源为零，反作用就为零。上面在包含源 a 的区域上的积分中，源 a 可能是体电流密度，也可能是面电流密度。在源为面电流密度的情况下，体积分变为面积分。

反作用为一复数，具有功率的量纲。它与复功率的不同表现在两个方面：第一，在功率的定义中，电流密度是复数共轭的；第二，反作用被定义为一个源相对于另一源产生的场。当一个源作用于它自己的场时，可称为自反作用 $\langle a,a\rangle$。

例 5.2.1 欲从物理概念上理解反作用的意义，可考虑源 a 为一偶极子的情况，$\boldsymbol{J}_a=Il\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$。那么反作用

$$\langle a,b\rangle = \boldsymbol{I}l \cdot \boldsymbol{E}_b(\boldsymbol{r}_0) \tag{5.2.2}$$

正比于用这个偶极子测得的在 $\boldsymbol{I}$ 方向上的电场。当偶极子矩 Il 为单位量时，这个反作用就等于源 b 在偶极子上所产生的场强。例如源 b 可以是位于原点的一个天线。

例 5.2.2　考虑图 5.2-1a 电路中的一个电流源和一个电压源的反作用。设 V_b 和 I_b 由一个未确定的源引起。对图 5.2-1 中的电流源来说，有

$$\begin{aligned}\langle a,b\rangle &= \iiint_V \mathrm{d}V\boldsymbol{J}_a \cdot \boldsymbol{E}_b \\ &= I_a\int \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{E}_b = -I_aV_b\end{aligned} \tag{5.2.3a}$$

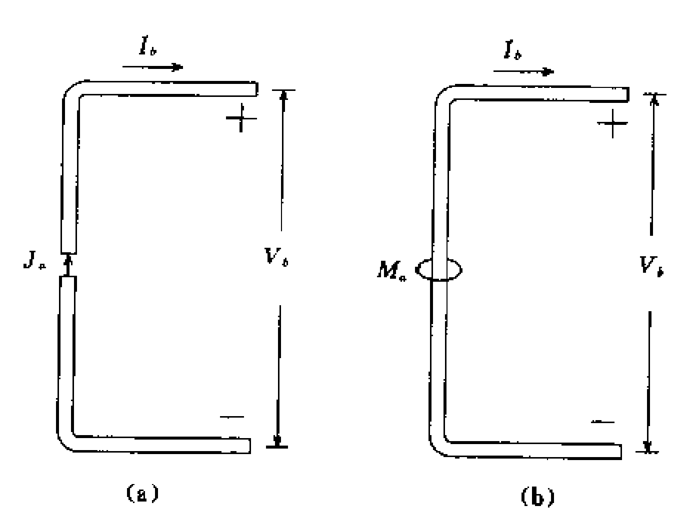


图 5.2-1　(a)电流源的反作用　　(b)电压源的反作用

对图 5.2-1(b)中的电压源，有

$$\begin{aligned}\langle a,b\rangle &= -\iiint_V \mathrm{d}V\boldsymbol{M}_a \cdot \boldsymbol{M}_b \\ &= -V_a\int \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{H}_b = -V_aI_b\end{aligned} \tag{5.2.3b}$$

因此，若应用单位电流源，反作用$\langle a,b\rangle$就等于源 b 在源 a 处所产生的电压 V_b，若应用单位电压源，反作用$\langle a,b\rangle$就等于源 b 在源 a 处所产生的电流 I_b。

5.2.2　互易性

如果对两组源 a 和 b 来说有

$$\langle a,b\rangle = \langle b,a\rangle \tag{5.2.4}$$

就定义这一系统间是互易性的。设系统为各向同性介质，我们将证明此介质是互易的。可用源 a 写出麦克斯韦方程

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_a = -\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_a + \boldsymbol{J}_a \tag{5.2.5a}$$

$$-\nabla\times\boldsymbol{E}_a = -\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}_a + \boldsymbol{M}_a \tag{5.2.5b}$$

又用源 b 写出麦克斯韦方程

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_b = -\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_b + \boldsymbol{J}_b \tag{5.2.6a}$$

$$-\nabla\times\boldsymbol{E}_b=-\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}_b+\boldsymbol{M}_b \tag{5.2.6b}$$

使构成 $\boldsymbol{E}_b\cdot(5.2.5a)+\boldsymbol{H}_a\cdot(5.2.6b)$和 $\boldsymbol{E}_a\cdot(5.2.6a)+\boldsymbol{H}_b\cdot(5.2.5b)$则可得

$$-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_b\times\boldsymbol{H}_a)=-\mathrm{i}\omega\epsilon\boldsymbol{E}_a\cdot\boldsymbol{E}_b+\boldsymbol{J}_a\cdot\boldsymbol{E}_b-\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}_a\cdot\boldsymbol{H}_b+\boldsymbol{M}_b\cdot\boldsymbol{H}_a \tag{5.2.7a}$$

$$-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_a\times\boldsymbol{H}_b)=-\mathrm{i}\omega\epsilon\boldsymbol{E}_a\cdot\boldsymbol{E}_b+\boldsymbol{J}_b\cdot\boldsymbol{E}_a-\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}_a\cdot\boldsymbol{H}_b+\boldsymbol{M}_a\cdot\boldsymbol{H}_b \tag{5.2.7b}$$

用式(5.2.7a)减去式(5.2.7b)并取积分可得

$$\langle a,b\rangle-\langle b,a\rangle=\oint\!\!\!\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{E}_a\times\boldsymbol{H}_b-\boldsymbol{E}_b\times\boldsymbol{H}_a) \tag{5.2.8}$$

由定义,倘若

$$\oint\!\!\!\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{E}_a\times\boldsymbol{H}_b-\boldsymbol{E}_b\times\boldsymbol{H}_a)=0 \tag{5.2.9}$$

则各向同性介质是互易的。这一说法被称之为洛伦兹互易性定理,当所有的源和物质的大小都有限时,可以将体积的表面扩展至无穷远,式(5.2.8)左端就包含对反作用有贡献的全部源。在离源距离为无穷大处,电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 以 $\boldsymbol{H}=\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{E}/\eta$ 和 $\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{H}=0$ 相关联,结果有 $\boldsymbol{E}_a\times\boldsymbol{H}_b-\boldsymbol{E}_b\times\boldsymbol{H}_a=0$,则式(5.2.9)中的面积分就趋于零。

上述证明的可逆性定理在很多情况下都有用。我们将在后面的章节中基于互易性来推导变分问题中的稳定性公式。下面先用它来证明一些简单的例子。

例 5.2.3 考虑外加于理想导体表面的面电流。如果导体表面为一平面,镜像定理使我们确信电流不产生场,但如果表面不是平面将会怎样呢?是否有理由扩展此结果,并声称外加于任何形状导体表面的电流都不产生场,经过简单的论证,互易性定理使我们确信此说法是正确的。设源 a 表示外加的源(图 5.2-2)。又设用可能是偶极天线的源 b 来测量由 a 所产生的场。由于边界条件,源 b 不产生沿导体表面的切向电场。a 和 b 的反作用$\langle a,b\rangle=0$。有可逆性定理

$$\langle b,a\rangle=\langle a,b\rangle=0$$

但是$\langle b,a\rangle$是由外加源 a 引起,用源 b 测量到的场,b 可以是任意的源。因而,源 b 没有测到场就证明外加面电流在理想导体表面不产生场。

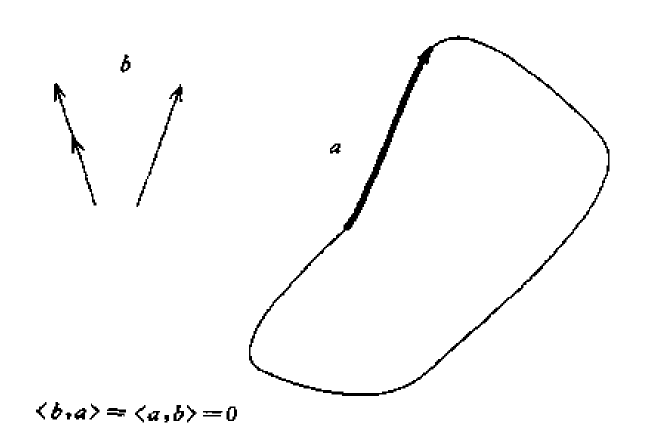


图 5.2-2 由外加于理想导体的面电流所产生的 0 场

例 5.2.4 对两个分别用作发射和接收的天线,可以把两个天线的终端看做为电路理论中两端网络的终端,并可写出

$$V_a = Z_{aa}I_a + Z_{ab}I_b \tag{5.2.10a}$$

$$V_b = Z_{ba}I_a + Z_{bb}I_b \tag{5.2.10b}$$

假设天线 a 和 b 两者由端电流 I_a 和 I_b 所激励。由于不存在磁流源 $\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle$ 将给出

$$\iiint_{V_a} \mathrm{d}V \boldsymbol{J}_a \cdot \boldsymbol{E}_b = \iiint_{V_b} V \boldsymbol{J}_b \cdot \boldsymbol{E}_a$$

对理想导体的天线来说,天线上的电场为0,并有

$$V_a^{\mathrm{oc}} I_a = V_b^{\mathrm{oc}} I_b \tag{5.2.11}$$

其中,

$$V_a^{\mathrm{oc}} = -\int \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{E}_b$$

是由天线 b 上所产生的场在天线 a 终端上造成的开路电压,与之类似,V_b^{oc} 是由于天线 a 上所产生的场在天线 b 终端上造成的开路电压。由式(5.2.10),有

$$V_a^{\mathrm{oc}} = Z_{ab}I_b$$

$$V_b^{\mathrm{oc}} = Z_{ba}I_a$$

由式(5.2.11)可得

$$Z_{ab} = Z_{ba} \tag{5.2.12}$$

这是互易性原理的直接结果。如果用电流源 I 激励天线 a,天线 b 终端上的开路电压将为 $V_b^{\mathrm{oc}} = Z_{ba}I$,它与用同样的电流源激励天线 b 时天线 a 终端上的开路电压 $V_a^{\mathrm{oc}} = Z_{ab}I$ 相等。

例 5.2.5　证明天线的接收方向图与它的发射方向图相同。设天线 a 为待研究天线,天线 b 是试验用天线,且设它是全向的。对接收和发射方向图两者都只关心它们的远场。由互易性定理可见,在某一方向上当天线 a 用于发射时它对 b 发射一微弱的平面波,当 a 用于接收时它从 b 接收一微弱的平面波。那么,天线 a 的发射方向图和接收方向图是相同的。增益 $G_a(\theta,\phi)$ 表征天线 a 用作发射时的方向图。当 a 被用于接收时,可以定义一有效面积 $A_a(\theta,\phi)$,用它表征其接收的方向图。通过证明可知,对任何天线 a,其有效面积 $A(\theta,\phi)$ 与其增益 $G(\theta,\phi)$ 的关系保持一常数,而与天线的结构无关,欲确定这一常数,可考虑用一个增益函数为

$$G(\theta,\phi) = \frac{3}{2}\sin^2\theta \tag{5.2.13}$$

的偶极天线。假设有一平面波入射至偶极天线上,入射方向与偶极子轴向 $\boldsymbol{l}$ 的夹角为 θ(图 5.2-3)。具有适当匹配负载 Z_L 的天线的接收功率为

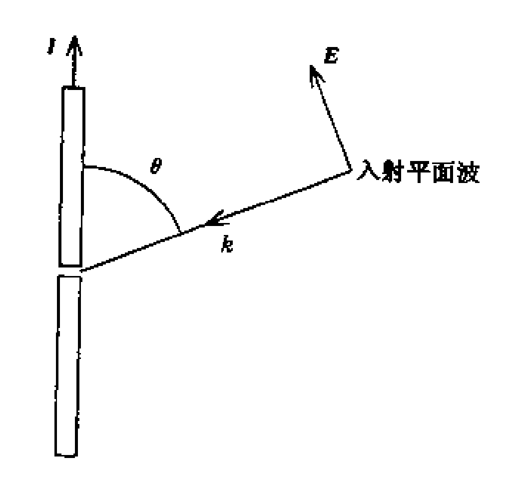


图 5.2-3　用于接收的偶极子

$$P = \frac{(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{l})^2}{2(Z_L + Z_L^*)^2}R_r = \frac{E^2 l^2 \sin^2\theta}{8R_r} = \left(\frac{\pi}{k^2}\,\frac{3}{2}\sin^2\theta\right)S_i$$

上式最后一步是采用了偶极子的辐射电阻 $R_r=(\eta/6\pi)k^2l^2$ 和入射功率密度 $S_i=E^2/2\eta$ 之后得出。因此,我们定义

$$A(\theta,\phi)=\frac{\pi}{k^2}G(\theta,\phi) \tag{5.2.14}$$

天线的接收功率等于单位面积的入射功率 S_i乘以有效面积 $A(\theta,\phi)$。注意,式(5.2.14)中的比例因子 π/k^2,虽然是在偶极天线时确定,但它与天线的结构无关,是一个通用的常数。

5.2.3 互易性条件

在前面的讨论中证明了各向同性介质的互易性,并已在多种情况下应用了互易性定理。现在我们要检验互易性定理对双各向异性介质的有效性。采用与前述式(5.2.5)~(5.2.9)相同的步骤,可得

$$\begin{aligned}&\langle a,b\rangle-\langle b,a\rangle\\&=\mathrm{i}\omega\iiint_V\mathrm{d}V(\boldsymbol{E}_b\cdot\boldsymbol{D}_a-\boldsymbol{E}_a\cdot\boldsymbol{D}_b+\boldsymbol{H}_a\cdot\boldsymbol{B}_b-\boldsymbol{H}_b\cdot\boldsymbol{B}_a)\end{aligned} \tag{5.2.15}$$

如果式右端为零,介质就是互易性的。对双各向异性介质,其本构关系为

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{H} \tag{5.2.16a}$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{H}+\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{E} \tag{5.2.16b}$$

把式(5.2.16)代入式(5.2.15)右端则可得

$$\begin{aligned}\langle a,b\rangle-\langle b,a\rangle=\mathrm{i}\omega\iiint_V\mathrm{d}V[&\boldsymbol{E}_b\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}})\cdot\boldsymbol{E}_a+\boldsymbol{H}_a\cdot(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}})\cdot\boldsymbol{H}_b+\\&\boldsymbol{E}_b\cdot(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}})\cdot\boldsymbol{H}_a-\boldsymbol{H}_b\cdot(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}})\cdot\boldsymbol{E}_a]\end{aligned}$$

因此,如果

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} \tag{5.2.17a}$$

$$\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}} \tag{5.2.17b}$$

$$\boldsymbol{\xi}=-\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}} \tag{5.2.17c}$$

介质就是互易的,式(5.2.17)则是介质为互易的条件,因此可以说,各向同性介质是互易的;具有对称的张量磁导率和张量介电系数的各向异性介质是互易的。至于双各向异性介质,如果它满足式(5.2.17a)和(5.2.17b),且 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{\zeta}$ 为纯虚数矩阵,但满足对称条件 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}$,那么它也是互易的。

例 5.2.6 各向异性的等离子体是非互易介质的例子。等离子体具有与式(5.2.17a)相矛盾的张量介电系数 $\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}^{+}$。考虑一充有等离子体的板片区域,区域内有垂直于板片的磁场 $\boldsymbol{B}$(见图 5.2-4)。假设线极化平面波穿过板片,法拉第旋转可使场矢量沿 ϕ 增大的方向旋转45°。令板片一侧面电流 $\boldsymbol{J}_a$ 产生一极化于 $\phi=0°$方向的平面波,而板片的另一侧面电流 $\boldsymbol{J}_b$ 产生一极化于 $\phi=45°$方向的平面波。又令 $\boldsymbol{J}_a$ 为源 a,$\boldsymbol{J}_b$ 为源 b。可以看到,反作用$\langle a,b\rangle$将等于零,因为由 $\boldsymbol{J}_b$ 产生的平面波在传输通过板片后,波的极化随着 $\boldsymbol{E}_b$ 与 $\boldsymbol{J}_a$ 互易,但反作用$\langle b,a\rangle$则不等于零,因为 $\boldsymbol{E}_a$ 和 $\boldsymbol{J}_b$ 为同向。于是$\langle a,b\rangle\neq\langle b,a\rangle$,法拉第旋转效应是非互易的。

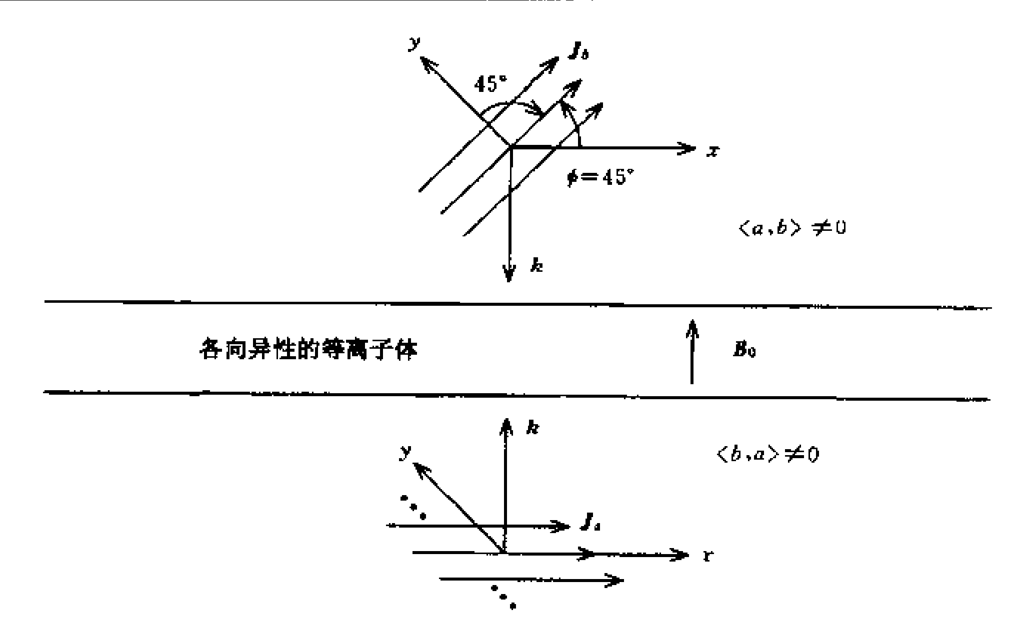


图 5.2-4　通过各向异性等离子区的传输

光学作用也使极化矢量旋转,但其效应具有互易性。例如,石英晶体呈现光旋转能力,可用双各向异性介质来描述,并能满足关系式(5.2.17)。设图 5.2-4 中填充有石英之类的光活性介质。电场矢量在向上传输时,在 ϕ 角增大的方向旋转 45°,而在向下传输时,在 ϕ 角减小的方向旋转 45°,于是可得反作用 $\langle a,b\rangle=\langle b,a\rangle$。

5.2.4　修正的互易性定理

互易性定理可能被扩展如下。对于源 a 可写为

$$-\nabla\times\boldsymbol{E}_a=-\mathrm{i}\omega(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{H}_a+\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{E}_a)+\boldsymbol{M}_a \tag{5.2.18a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_a=-\mathrm{i}\omega(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E}_a+\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{H}_a)+\boldsymbol{J}_a \tag{5.2.18b}$$

介质特性可以用 $\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{\zeta}$ 表征。相对于源 b,可由本构关系用 $\boldsymbol{\mu}^C,\boldsymbol{\varepsilon}^C,\boldsymbol{\xi}^C$ 和 $\boldsymbol{\zeta}^C$ 表征

$$\boldsymbol{\mu}^C=\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}} \tag{5.2.19a}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^C=\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} \tag{5.2.19b}$$

$$\boldsymbol{\xi}^C=-\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}} \tag{5.2.19c}$$

$$\boldsymbol{\zeta}^C=-\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} \tag{5.2.19d}$$

并称这种介质为互补性介质。在互补介质中对源 b 的麦克斯韦方程变为

$$-\nabla\times\boldsymbol{E}_b^C=-\mathrm{i}\omega(\boldsymbol{\mu}^C\cdot\boldsymbol{H}_b^C+\boldsymbol{\zeta}^C\cdot\boldsymbol{\zeta}_b^C)+\boldsymbol{M}_b \tag{5.2.20a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_b^C=-\mathrm{i}\omega(\boldsymbol{\varepsilon}^C\cdot\boldsymbol{E}_b^C+\boldsymbol{\xi}^C\cdot\boldsymbol{H}_b^C)+\boldsymbol{J}_b \tag{5.2.20b}$$

其中,$\boldsymbol{E}_b^C$ 和 $\boldsymbol{H}_b^C$ 表示由 $\boldsymbol{J}_b$ 和 $\boldsymbol{M}_b$ 在互补性介质中产生的场。如果定义一个新的互易性

$$\langle a,b\rangle^C=\iiint_V \mathrm{d}V(\boldsymbol{J}_a\cdot\boldsymbol{E}_b^C-\boldsymbol{M}_a\cdot\boldsymbol{H}_b^C)$$

则由式(5.2.18)和(5.2.20)可得

$$\langle b,a\rangle=\langle a,b\rangle^C \tag{5.2.21}$$

这个结果可以称为修正的互易定理。该定理说明,在双各向异性介质中,由源 a 引起的源 b 的反作用 $\langle b,a\rangle$ 等于在互补介质中由源 b 引起的源 a 的反作用 $\langle a,b\rangle^C$。如果互补介质与原始介质相同,介质就是互易的。

专题 5.2.A 稳定公式和瑞利-里兹(Rayleigh-Ritz)过程

考虑一个处于谐振状态的腔体,欲计算其谐振频率,但尚不知腔内精确的场分布。尽管如此,可以先找一个用场分布表示谐振频率的公式,然后,假设一个场分布,并用假设的场分布计算出谐振频率。如果这个公式是稳定的,则能取得比使用非稳定公式更精确的谐振频率。试考虑公式 $y=f(x)$。要计算 $x=x_0$ 处的 y,但不知 x_0 的精确值,可假设 $x=x_0+p$,其中,p 是表征 x 与 x_0 的偏差的参数。将公式 $y=f(x)=f(x_0+p)$ 在 x_0 展开为泰勒级数。如果

$$\left.\frac{\partial f}{\partial p}\right|_{p=0}=0 \tag{5.2.22}$$

则称此公式在 $p=0$ 是稳定的。当满足条件(5.2.22)时,$f(x)=f(x_0)+(1/2)p^2f^{(2)}(x_0)+\cdots$,同时,$f(x)$与 $f(x_0)$的偏差是 p^2 阶的。显然,稳定公式在 $p=0$ 点有一极值。当 p 为复数时,$p=0$处出现一鞍点。

谐振器波数的稳定公式

我们将推导一个以假设的电场求腔体谐振频率的稳定公式。必须指出,也可以推导包含有假设的磁场,或包含电场与磁场的混合体的稳定公式。用假设的电场(带下标 a)表示时,腔内有麦克斯韦方程

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}_a &= \mathrm{i}\omega\epsilon\boldsymbol{E}_a+\nabla\times\boldsymbol{H}_a\\ &=\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\left[-k^2\boldsymbol{E}_a+\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E}_a)\right]\end{aligned} \tag{5.2.23}$$

腔壁上有

$$\boldsymbol{M}_s=\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_a \tag{5.2.24}$$

其中,$\hat{\boldsymbol{n}}$ 是垂直于腔壁,指向外部的单位矢量。如果 $\boldsymbol{E}$ 场是精确的电场,则因边界条件,表面磁流将等于零。现在由于电场是假设的,将不能保证满足边界条件。

利用反作用的定义式,可对腔体建立

$$\begin{aligned}\langle a,a\rangle &=\iiint_V \mathrm{d}V\boldsymbol{J}_a\cdot\boldsymbol{E}_a-\oiint_S \mathrm{d}S\boldsymbol{M}_s\cdot\boldsymbol{H}_a\\ &=\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\left\{-k^2\iiint_V\mathrm{d}V\boldsymbol{E}_a^2+\iiint_V\mathrm{d}V(\nabla\times\boldsymbol{E}_a)^2+2\oiint_S\mathrm{d}S\,\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\left[(\nabla\times\boldsymbol{E}_a)\times\boldsymbol{E}_a\right]\right\}\end{aligned} \tag{5.2.25}$$

在推导中,应用了恒等式

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_a\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}_a=-\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\left[(\nabla\times\boldsymbol{E}_a)\times\boldsymbol{E}_a\right]$$

和

$$\boldsymbol{E}_a\cdot\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E}_a)=(\nabla\times\boldsymbol{E}_a)^2+\nabla\cdot\left[(\nabla\times\boldsymbol{E}_a)\times\boldsymbol{E}_a\right]$$

需要使反作用$\langle a,a\rangle$等于腔体真正的反作用$\langle c,c\rangle$,其中 c 代表“校正的”。何为腔体真正的反作用呢? 应该是在腔体内源为零而场不为零;在腔壁上,源不为零而场为零。于是,$\langle c,c\rangle=0$。当使$\langle a,a\rangle$等于$\langle c,c\rangle$并等于零,则由式(5.2.25)可得到计算谐振波数 k^2 的公式

$$k^2 = \frac{\iiint_V \mathrm{d}V(\nabla\times\boldsymbol{E}_a)^2 + 2\oiint_S \mathrm{d}S\hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E}_a)\times\boldsymbol{E}_a}{\iiint_V \mathrm{d}V\boldsymbol{E}_a\cdot\boldsymbol{E}_a} \tag{5.2.26}$$

注意,若 $\boldsymbol{E}_a$ 是精确的场,那么这个公式就是精确的。还需要知道,此公式是否是稳定的。令 $\boldsymbol{E}_a=\boldsymbol{E}+p\boldsymbol{e}$,并用 $k^2=N(p)/D(p)$表示式(5.2.26)。希望能检验

$$\left.\frac{\partial k^2}{\partial p}\right|_{p=0} = \frac{D(0)N'(0)-N(0)D'(0)}{D^2(0)} = \frac{N'(0)-k^2D'(0)}{D(0)}$$

上式中,应用了 $N(0)=k^2D(0)$。对式(5.2.26)的分子取微分,并令 $p=0$,则可得到

$$N'(0) = 2\iiint_V \mathrm{d}V(\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot(\nabla\times\boldsymbol{e}) + 2\oiint_S \mathrm{d}S\hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{e}$$

$$= 2k^2\iiint_V \mathrm{d}V\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{E} = k^2D'(0)$$

这中间应用了 $\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}=0$ 于边界面 S,和恒等式 $(\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot(\nabla\times\boldsymbol{e}) = \nabla\cdot(\boldsymbol{e}\times\nabla\times\boldsymbol{E})+\boldsymbol{e}\cdot\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}$,以及波动方程 $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=k^2\boldsymbol{E}$。这些结果证明了 $\partial k^2/\partial p|_{p=0}=0$。因此,由这些结果,即由假设的场所引起的反作用与基于真正的场的反作用是相同的,得到了用于腔体谐振频率的稳定公式。

考虑如图 5.2-5 所示圆形谐振腔,已知基模精确的场为 $\boldsymbol{E}=\hat{z}E_0J_0(k\rho)$。精确的谐振波数是 $J_0(ka)$的第一个根

$$ka = 2.405 \qquad 或 \qquad k^2a^2 = 5.784$$

为已知。现在用式(5.2.26)来计算谐振波数。假设试验用的场为

$$\boldsymbol{E}_a = \hat{z}\cos\frac{\pi\rho}{2a}$$

此试验用场在 $\rho=a$ 点满足边界条件,但它不是波动方程的解。$\boldsymbol{E}_a$ 的旋度可由下式计算

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_a = \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{\pi}{2a}\sin\frac{\pi\rho}{2a}$$

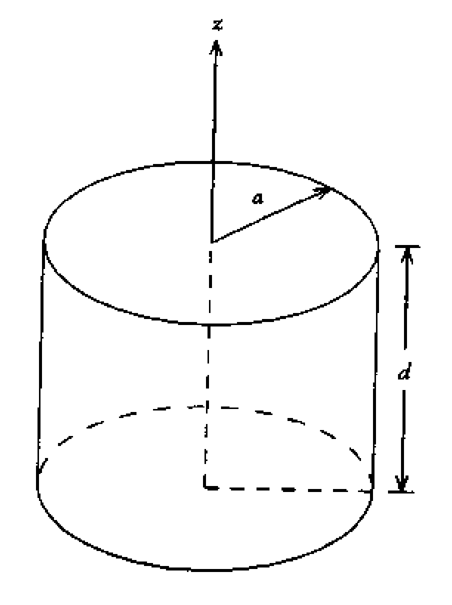


图 5.2-5　圆形谐振腔

稳定公式(5.2.26)变为

$$k^2a^2 = \frac{\int_0^d \mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^a \rho\mathrm{d}\rho(\pi/2)^2\sin^2(\pi\rho/2a)}{\int_0^d \mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^a \rho\mathrm{d}\rho\cos^2(\pi\rho/2a)} = 5.830$$

这个结果很接近精确解。

下一步假设试验场为

$$\boldsymbol{E}_a = \hat{z}\left(1 + A\frac{\rho}{a}\right) \tag{5.2.27}$$

其中,A 是常数。下面应用里兹(Ritz)过程确定此常数 A。应用式(5.2.26)可得

$$k^2a^2 = \frac{\int_0^d dz\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^a \rho d\rho A^2 - \int_0^d dz\int_0^{2\pi} d\phi 2a^2A(1+A)}{\int_0^d dz\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^a \rho d\rho[1+A(\rho/a)]^2}$$

$$= \frac{-2A-(3/2)A^2}{(1/2)+(2/3)A+(1/4)A^2} \tag{5.2.28}$$

要求 k^2a^2 相对于 A 为稳定。如果$\partial(k^2a^2)/\partial A=0$,可得 $A=-1$ 或 -2。将 $A=-1$ 代入式(5.2.28)产生了 $k^2a^2=6$。$A=-1$ 也能使试验场在 $\rho=a$ 满足边界条件。另一个值 $A=-2$ 会给出负的 k^2a^2,应予放弃。

里兹过程可扩展至 n 个参数A_l,$l=1,2,3,\cdots n$,然后由 n 个方程$\partial k^2/\partial A_l=0$,$l=1,2,\cdots,n$ 来确定A_l。作为一个例子,假设试验场以参数 A_1 和 A_2 表征,可写出

$$\boldsymbol{E} = \hat{z}\left(1 + A_1\frac{\rho}{a} + A_2\frac{\rho^2}{a^2}\right)$$

然后得到

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\hat{\boldsymbol{\phi}}\left(A_1 + 2A_2\frac{\rho}{a}\right)/a$$

将它们代入稳定公式,并作积分运算可得

$$k^2a^2 = -\frac{10[18A_2^2+(28A_1+24)A_2+9A_1^2+12A_1]}{10A_2^2+(24A_1+30)A_2+15A_1^2+40A_1+30}$$

由下式确定参数 A_1 和 A_2

$$\frac{\partial(k^2a^2)}{\partial A_1} = 0,\quad \frac{\partial(k^2a^2)}{\partial A_2} = 0$$

由此产生两个方程

$$38A_2^3+(90A_1+84)A_2^2+(51A_1^2+45A_1-60)A_2-45A_1^2-135A_1-90=0$$

$$(76A_1+150)A_2^2+(180A_1^2+600A_1+540)A_2+102A_1^3+461A_1^2+720A_1+360=0$$

解这两个方程将得出 $A_1=-0.7817$ 和 $A_2=-0.1834$。由此 A_1,A_2 值可得

$$k^2a^2 = 5.934$$

这个值比曾经用试验场式(5.2.27)所得到的更加接近精确解。可以看出,用这样的 A_1 和 A_2,试验场既不满足波动方程,也不满足边界条件。其他 A_1,A_2 值的结果不在此计算,它们可能对应于较高模次的谐振波数。最后需要指出的是,在应用里兹过程时经常要从正交完全函数族中适当地选择试验场分量。

天线阻抗的稳定公式

现推导天线自阻抗的稳定公式。考虑一个用理想导体做成,由源电流 I 激励的天线。此天线的自反作用完全来自终端上的电流源,原因是在导电表面上电流不为零而场为零,自反作用等于终端上的 $-VI$。欲计算自阻抗应保持有相同的终端电流 I,并假设天线表面的电流分布。于是,可以计算其自反作用$\langle a,a\rangle$,此反作用应近似等于校正的反作用$\langle c,c\rangle$。

$$\langle a,a\rangle \approx \langle c,c\rangle = -VI \tag{5.2.29}$$

输入阻抗近似为

$$Z_{\text{in}} = -\frac{\langle c,c\rangle}{I^2} \approx -\frac{\langle a,a\rangle}{I^2} \tag{5.2.30}$$

令 $a = c + pe$,可见有

$$\frac{\partial Z_{in}}{\partial p} = -\frac{1}{I^2}(\langle e,c\rangle + \langle c,e\rangle) = -\frac{2}{I^2}\langle e,c\rangle = 0$$

第二个等式由互易性得出。等式的最后一步是由于在终端上场不为零,而误差源 e 为零。此外任何地方的校正场 c 为零。于是,证明了输入阻抗的公式是稳定的。

现在应用稳定公式来计算一径向平行板波导的输入阻抗,该波导由一个直径为 a 的探针激励(图5.2-26),探针的源端在波导以外。对于 TEM 模来说,可以假设试验电流沿探针的分布为均匀的,$\boldsymbol{J}_a = \hat{z}I/\pi a$。由此电流产生的电场为

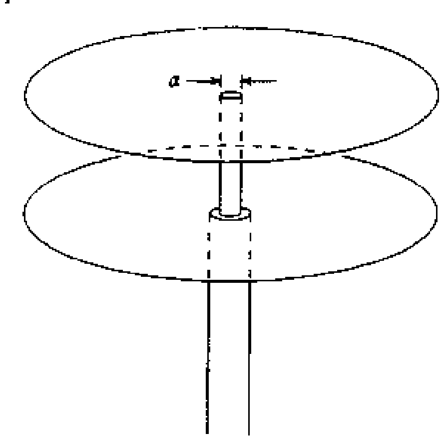


图5.2-6　径向平行板波导的探针激励

$$\boldsymbol{E}_a = \hat{z}\left[-\frac{k^2 I}{4\omega\varepsilon}H_0^{(1)}(k\rho)\right]$$

设 d 表示两板间距,采用稳定公式(5.2.30)可得到输入阻抗为

$$Z_{in} = \frac{\eta}{4}kdH_0^{(1)}(ka/2)$$

散射的稳定公式

现在推导用于散射问题的稳定公式。考虑有一个发射器,一个接收器和一个导电的散射体(图5.2-7)。接收器接收由两个分量组成的电波,一个是不存在有散射体时直接来自发射体的电波,另一个来源于散射体上的感应电流所发射来的电波。要注意接收器也在散射体上产生感应电流。我们要寻求由接收器接收到的散射场的稳定公式。$V_s = -\langle i,t\rangle$,其中 i 表示接收器的源电流,t 是由发射器在散射体上感应的电流所产生的场。可以预料稳定公式将由散射体表面的面积分构成。由互易性,$V_s = -\langle i,c_t\rangle = -\langle c_t,i\rangle$,其中$\langle c_t,i\rangle$中的 c_t 表示由发射器在散射体感应的电流,i 则是没有散射体时接收器产生的场。存在散射体时,因它是导电体,其上的场与 i 幅度相等而方向相反。散射体上的场与没有散射体时的场合并,在散射体上给出一零场。设 c_r 表示这一零场,则散射体表面有

$$V_s = -\langle c_t,i\rangle = \langle c_t,c_r\rangle \tag{5.2.31}$$

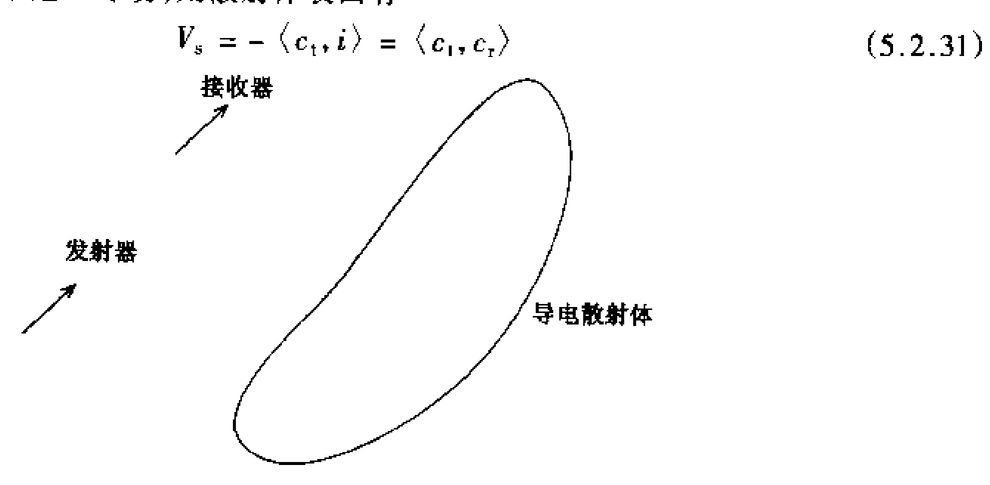


图5.2-7　发射器,接收器和导电散射体

至此,我们求出了接收器所接收到的信号,它与发射器在散射体上所感应的电流和接收器电流

在散射体上产生的场之间的反作用相等。

式(5.2.31)中的字母 c 代表"校正的值"。要计算 V_s,需要把$\langle c_t, c_r\rangle$近似写为

$$V_s = -\langle c_t, c_r\rangle \approx \langle a_t, a_r\rangle \tag{5.2.32}$$

其中,a 代表"假设的值"。若满足下述的约束条件

$$\langle a_t, a_r\rangle = \langle c_t, a_r\rangle = \langle a_t, c_r\rangle \tag{5.2.33}$$

则所得公式是稳定的。式中 c_t 是发射器在散射体上感应的电流校正值,c_r 是接收器在散射体上产生的场的校正值。

如果想表明式(5.2.33)的约束条件能导出稳定公式,不妨考虑这样一个命题,假设反作用$\langle a, b\rangle$满足如下约束条件

$$\langle a, b\rangle = \langle c_a, b\rangle = \langle a, c_b\rangle \tag{5.2.34}$$

它就是稳定的。欲证明此定理,设

$$a = c_a + p_a e_a$$

$$b = c_b + p_b e_b$$

式中 c 代表"校正的值",e 代表"误差的值"。根据定义,如果

$$\left.\frac{\partial\langle a, b\rangle}{\partial P_a}\right|_{p_a = p_b = 0} = \left.\frac{\partial\langle a, b\rangle}{\partial P_b}\right|_{p_a = p_b = 0} = 0 \tag{5.2.35}$$

则$\langle a, b\rangle$就是稳定的。另外从如下事实也可看出式(5.2.35)是正确的,如果约束条件$\langle a, b\rangle = \langle c_a, b\rangle$,就意味着$\langle e_a, b\rangle = 0$;如果约束条件$\langle a, b\rangle = \langle a, c_b\rangle$,则意味$\langle a, e_b\rangle = 0$。

必须指出,约束条件(5.2.34)是使公式成为稳定的充分条件,它没有必要条件。回想一下,在建立腔体的谐振频率和天线的输入阻抗两者的稳定公式时,未曾应用这些约束条件。实际上,也可以违反约束条件。例如,在考虑天线的输入阻抗时,违反了约束条件$\langle a, a\rangle = \langle a, c\rangle$。因为在天线表面上,校正的场为零而假设的场不为零。

专题 5.2.B 矩量法

矩量法是在解电磁波散射和辐射问题时很有用的数值计算技术。试考虑当入射场 $\boldsymbol{E}_i$ 和 $\boldsymbol{H}_i$ 照射一理想导电物体时,产生散射场 $\boldsymbol{E}_s$ 和 $\boldsymbol{H}_s$ 的问题。$\boldsymbol{E}_s$ 和 $\boldsymbol{H}_s$ 可以认为是由入射场在散射体上感应产生的面电流所引起的。设面电流为 $\boldsymbol{J}_s$,则有沿散射体表面 S 的积分

$$\boldsymbol{E}_s\boldsymbol{r} = \mathrm{i}\omega\mu\iint \mathrm{d}S'\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}') \tag{5.2.36}$$

未知面电流用基函数或展开函数 $\boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{r}')$展开

$$\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}') = \sum_n I_n\boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{r}') \tag{5.2.37}$$

一旦求出其中的展开系数 I_n,就能确定未知的面电流 $\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}')$,并用它求出需要的散射场。矩量法要求应用一组检验函数 $\boldsymbol{J}_m(\boldsymbol{r})$,由检验函数构成

$$\iint_{S_m}\mathrm{d}S_m\boldsymbol{J}_m(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{r}) = \sum_n\left[\iint\mathrm{d}S_m\boldsymbol{J}_m(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{i}\omega\mu\iint\mathrm{d}S'\boldsymbol{GG}\cdot\boldsymbol{F}_n\right]I_n = \sum_n Z_{mn}I_n \tag{5.2.38}$$

其中,

$$Z_{mn} = \iint_{S_m}\mathrm{d}S_m\boldsymbol{J}_m(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{i}\omega\mu\iint\mathrm{d}S'\boldsymbol{GG}\cdot\boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{r}') \tag{5.2.39}$$

S_m 是理想导电散射体的部分表面。检验函数复盖散射体的整个表面 S。

在导电表面上，边界条件要求总的切向电场 $\boldsymbol{E}_s+\boldsymbol{E}_i=0$。由式(5.2.38)可得

$$\iint_{S_m}\mathrm{d}S_m\,\boldsymbol{J}_m(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{r})=-\iint_{S_m}\mathrm{d}S_m\,\boldsymbol{J}_m(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r})\tag{5.2.40}$$

应将它与式(5.2.31)比较，该式中 $\langle c_t,c_r\rangle=-\langle c_t,\mathrm{i}\rangle$，虽然实际上现在 c_t 就是 a_t。定义

$$V_m=-\iint_{S_m}\mathrm{d}S_m\,\boldsymbol{J}_m(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r})\tag{5.2.41}$$

由式(5.2.38)～(5.2.40)可得

$$Z_{mn}I_n=V_m\tag{5.2.42}$$

最终，面电流中未知的展开系数为

$$I_n=Z_{mn}^{-1}V_m\tag{5.2.43}$$

因此，矩量法的实质就在于对基函数和检验函数的选择，以及 $\boldsymbol{Z}$ 矩阵 Z_{mn} 的数值求逆。用点匹配法时，通常选取检验函数为 δ 函数，则 $\boldsymbol{J}_m(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{J}_m\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_m)$，并在散射体上取足够多的(匹配)点，以确保得到收敛的结果。在所选的匹配点上，强制实行切向电场 $\boldsymbol{E}$ 为零的边界条件，当基函数(或展开函数)和检验函数两者采用相同的函数时，称此技术为 Galerkin 法。

习　题

5.2.1　下列介质中哪个(些)是无损耗的？哪个(些)是互易的？对非互易的介质其互补介质是什么？

(1)具有实数本构参数的双轴向介质。

(2)运动着的双轴向介质。

(3)手征介质

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}+\mathrm{i}\chi\boldsymbol{H}$$
$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}-\mathrm{i}\chi\boldsymbol{E}$$

(4)具有实数 χ 的双各向同性介质

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}+\chi\boldsymbol{H}$$
$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}-\chi\boldsymbol{E}$$

(5)在直流磁场中的铁氧体介质。

5.2.2　处于截止状态，$k_z=0$ 的波导，场分布与 z 无关。

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_a(x,y),\qquad \boldsymbol{H}_z=\frac{\nabla_{\mathrm{T}}\times\boldsymbol{E}_a}{\mathrm{i}\omega\mu},\qquad \boldsymbol{M}_a=0$$

$$\boldsymbol{J}_z=\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_a+\nabla_{\mathrm{T}}\times\boldsymbol{H}_a=\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}[-k^2\boldsymbol{E}_a+\nabla_{\mathrm{T}}\times(\nabla_{\mathrm{T}}\times\boldsymbol{E}_a)],\quad \boldsymbol{M}_{sa}=\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_a$$

试证明：

$$\begin{aligned}\langle a,a\rangle&=\iiint_V\mathrm{d}V\boldsymbol{J}_a\cdot\boldsymbol{E}_a-\oiint_S\mathrm{d}S\boldsymbol{M}_{sa}\cdot\boldsymbol{H}_a\\&=\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\left[\iint\mathrm{d}x\mathrm{d}y(-k^2E_a^2)+(\nabla_{\mathrm{T}}\times\boldsymbol{E}_a)^2+2\oint\mathrm{d}l\hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\nabla_{\mathrm{T}}\times\boldsymbol{E}_a)\times\boldsymbol{E}_a\right]\end{aligned}$$

式中，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 是垂直于波导壁，指向波导外部的单位矢量。试求它与谐振腔截止频率相似的截止频率的稳定公式。

5.2.3　试推导用磁场 $\boldsymbol{H}$ 表示的谐振腔的谐振频率的稳定公式，由假设的试验场 $\boldsymbol{H}_a$ 可得

$$\boldsymbol{E}_a=\frac{1}{-\mathrm{i}\omega\varepsilon}\nabla\times\boldsymbol{H}_a,\qquad \boldsymbol{M}_s=-\frac{1}{-\mathrm{i}\omega\varepsilon}\hat{\boldsymbol{n}}\times(\nabla\times\boldsymbol{H}_a)$$

试由假设的近似的磁场分布，$\boldsymbol{H}_a=\hat{\boldsymbol{\phi}}(\rho+A\rho^2)$，求圆形谐振腔的谐振频率。

5.2.4　如果波导内填充几种不同的各向同性介质，试证明用 $\boldsymbol{E}$ 场表示的截止频率的稳定公式为

$$\omega_c^2 = \frac{\iint \mathrm{d}S\mu^{-1}(\nabla\times \boldsymbol{E})^2}{\iint \mathrm{d}S\,\epsilon \boldsymbol{E}^2} + \frac{2\int \mathrm{d}l\hat{\boldsymbol{n}}\cdot[\mu^{-1}(\nabla\times \boldsymbol{E})\times \boldsymbol{E}]}{\iint \mathrm{d}S\,\epsilon \boldsymbol{E}^2}$$

式中，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 为垂直于波导壁指向外部的单位矢量。

求解填充有两种不同介质的矩形波导的截止频率。设波导的尺寸沿 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 向为 a，沿 $\hat{\boldsymbol{y}}$ 向为 b。介质 ϵ_1 填充空间从 $x=0$ 到 $x=a/2$。介质 ϵ_2 填充空间从 $x=a/2$ 到 $x=a$。假设电场 $\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{y}}\sin(\pi x/a)$。

5.2.5 电流元 Il 所产生的线极化波 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}=\hat{z}E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}$，其中 $E_0=-\mathrm{i}\omega\mu I\,l/4\pi r$。当发射器和接收器相同时，后向散射

$$V_s=-\langle c_t,c_t\rangle=-I\int \boldsymbol{E}^s\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-E_l^s Il$$

其中，E_l^s 代表沿天线的散射场分量。

$$E_l^s=\frac{\langle c_t,c_t\rangle}{(Il)}\simeq\frac{\langle a_t,a_t\rangle}{(Il)}=\frac{\langle a_t,c_t\rangle^2}{(Il)\langle a_t,a_t\rangle}=\frac{(\iint \boldsymbol{J}^a\cdot \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}\mathrm{d}S)^2}{(Il)\iint \boldsymbol{J}^a\cdot \boldsymbol{E}^a\mathrm{d}S}$$

试证明由线极化场所引起的后向散射的射线面积

$$A_e=\lim_{r\to\infty}4\pi r^2\left|\frac{E_s}{E^{\mathrm{i}}}\right|^2=\pi\left|\frac{\eta}{\lambda}\frac{(\iint J_z^a\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx},\mathrm{d}S)^2}{\iint \boldsymbol{E}^a\cdot \boldsymbol{J}_a\mathrm{d}S}\right|^2$$

又考虑一垂直入射于沿 z 轴长度为 $L=\lambda/2$ 的导线上的平面波 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}=\hat{z}E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$，假设线上电流为 $I^a=\cos kz$。应用稳定公式和 $\langle a,a\rangle=73$ 这一条件，试求导线的后向散射的回波截面积。

5.2.6 波导内填充有几种不同的各向同性介质，试证明当带有假设的电场时，其截止频率的稳定公式由下式给出

$$\omega_r^2=\frac{\iiint_V \mathrm{d}V\mu^{-1}(\nabla\times \boldsymbol{E})^2+2\iint_k \mathrm{d}S\hat{\boldsymbol{n}}\cdot[\mu^{-1}(\nabla\times \boldsymbol{E})\times \boldsymbol{E}]}{\iiint_V \mathrm{d}V\epsilon \boldsymbol{E}^2}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 为垂直于腔壁，指向外部的单位矢量。考虑一微波炉，其尺寸为 $h=25\mathrm{cm}$，$w=40\mathrm{cm}$，$D=40\mathrm{cm}$，又考虑一介电系数 $\epsilon=4\epsilon_0$，尺寸为 $15\mathrm{cm}(h)\times30\mathrm{cm}(w)\times20\mathrm{cm}(d)$ 的矩形介质。假设电场 $\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{x}}\sin(\pi y/w)\sin(\pi z/d)$，试求其谐振频率变化的百分比。

5.3 准静态场的极限

为探索准静态场的极限，我们将场矢量围绕 $\omega=0$ 展开成幂级数。为便于展开，可分离场量的依从关系，引入新的独立变量 $\tau=\omega t$。场量 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\tau,\omega)$，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\tau,\omega)$，$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},\tau,\omega)$，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\tau,\omega)$，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},\tau,\omega)$ 和 $\rho(\boldsymbol{r},\tau,\omega)$ 都可以展开为 ω 的幂级数。先将 $\boldsymbol{E}$ 写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\tau,\omega)&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\omega^m}{m!}\left[\frac{\partial^m}{\partial\omega^m}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\tau,\omega)\right]_{\omega=0}\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\boldsymbol{E}^{(m)}(\boldsymbol{r},\tau,\omega)\end{aligned}\tag{5.3.1}$$

其他场量与之类似。从麦克斯韦方程开始，将有

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}\nabla\times\boldsymbol{E}^{(m)}&=-\omega\frac{\partial}{\partial\tau}\sum_{m=0}^{\infty}\boldsymbol{B}^{(m)}\\&=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\omega^m}{(m-1)!}\left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial\omega^{m-1}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\tau,\omega)\right]_{\omega=0}\end{aligned}$$

$$= -\sum_{m=1}^{\infty}\omega\frac{\partial}{\partial\tau}\boldsymbol{B}^{(m-1)} \tag{5.3.2}$$

由此得出

$$\nabla\times\boldsymbol{E}^{(0)} = 0 \tag{5.3.3a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}^{(m)} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}^{(m-1)} \qquad m = 1,2,\cdots \tag{5.3.3b}$$

类似有

$$\nabla\times\boldsymbol{H}^{(0)} = \boldsymbol{J}^{(0)} \tag{5.3.4a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}^{(m)} = \boldsymbol{J}^{(m)} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}^{(m-1)} \qquad m = 1,2,\cdots \tag{5.3.4b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}^{(0)} = \rho^{(0)} \tag{5.3.5a}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}^{(m)} = \rho^{(m)} \qquad m = 1,2,\cdots \tag{5.3.5b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}^{(0)} = 0 \tag{5.3.6a}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}^{(m)} = 0 \qquad m = 1,2\ldots \tag{5.3.6b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}^{(0)} = 0 \tag{5.3.7a}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}^{(m)} = -\frac{\partial}{\partial t}\rho^{(m-1)} \qquad m = 1,2,\cdots \tag{5.3.7b}$$

式(5.3.3a)和(5.3.5a)是静电场的控制方程，式(5.3.4a)和(5.3.6a)是静磁场的控制方程。

必须指出，第 m 阶场现在用第$(m-1)$阶场表示。因此，对给定的源 $\boldsymbol{J}^{(0)}$和 $\rho^{(0)}$在获得零阶场后，全部高阶的场可以相继确定。静电场是由式(5.3.3a)、(5.3.5a)和(5.3.7b)当 $m=1$ 时决定的。也就是说，就像从式(5.3.3a)、(5.3.5a)式得出的零阶静电场一样，现在可用式(5.3.7b)求一阶的电流 $\boldsymbol{J}^{(1)}$，以及用式(5.3.4b)求一阶的磁场 $\boldsymbol{H}^{(1)}$。看来，以 $m=1$ 的式(5.3.4a)、(5.3.6a)和(5.3.3b)就是静磁场方程。结合式(5.3.3)～(5.3.7)中每一个方程，可以得到相应的边界条件。

例 5.3.1　试考虑平行板波导(见图 5.3-1)内的电磁场。将时谐电压源 $V(t)$

$$V(t) = V_0\cos\omega t \tag{5.3.8}$$

施加于 $z=0$，则零阶电场为静电场

$$\boldsymbol{E}^{(0)} = -\hat{\boldsymbol{x}}\frac{V_0}{d}\cos\omega t \tag{5.3.9a}$$

$$\boldsymbol{H}^{(0)} = 0 \tag{5.3.9b}$$

一阶磁场 $\boldsymbol{H}^{(1)}$由式(5.3.4b)求得，由下式给出

$$\frac{\partial}{\partial z}H_y^{(1)} = -\omega\frac{\varepsilon V_0}{d}\sin\omega t$$

因此

$$\boldsymbol{H}^{(1)} = -\hat{\boldsymbol{y}}\omega\frac{\varepsilon V_0}{d}z\sin\omega t \tag{5.3.9c}$$

由于 $\boldsymbol{H}^{(0)}=0$，可求得一阶电场为

$$\boldsymbol{E}^{(1)} = 0 \tag{5.3.9d}$$

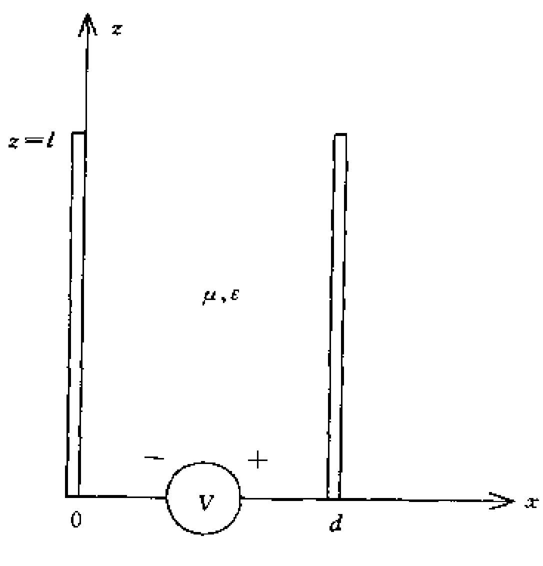


图 5.3-1 平行板波导

对二阶场量，可以从式(5.3.4b)及(5.3.9d)求得

$$H^{(2)} = 0 \tag{5.3.10a}$$

从式(5.3.3b)可见

$$\nabla \times E^{(2)} = \hat{y}\omega^2 \frac{\mu \varepsilon V_0}{d} z\cos \omega t$$

因此，

$$E^{(2)} = \hat{x}\frac{V_0}{d}\frac{k^2 z^2}{2}\cos \omega t \tag{5.3.10b}$$

式中 $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$。

继续这一过程，可求得奇数阶的 $E^{(m)}$ 项均为零，而偶数阶的项为

$$E^{(2n)} = -\hat{x}(-1)^n \frac{V_0}{d}\frac{(kz)^{2n}}{(2n)!}\cos \omega t, \qquad n = 0,1,2,\cdots \tag{5.3.11a}$$

与之相似，可求得偶数阶的 $H(m)$ 项均为零，而奇数阶的项为

$$H^{(2n+1)} = -\hat{y}(-1)^n \frac{V_0}{\eta d}\frac{(kz)^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin \omega t \qquad n = 0,1,2,\cdots \tag{5.3.11b}$$

无穷个项数相加，可得到

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} E^{(2n)} = -\hat{x}\frac{V_0}{d}\cos kz \cos \omega t \tag{5.3.12a}$$

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} H^{(2n+1)} = -\hat{y}\frac{V_0}{\eta d}\sin kz \sin \omega t \tag{5.3.12b}$$

式(5.3.12)表示开路传输线的精确解。

例 5.3.2 偶极子矩为 $Il = -\mathrm{i}\omega p$，指向 $\hat{z}$ 轴的赫兹偶极子的磁场 H 为

$$H = \hat{\phi}\frac{-\mathrm{i}kIl\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{kr}\right)\sin \theta \tag{5.3.13}$$

其中，$k = w/c$。由式(5.3.13)可见，赫兹偶极子的一阶磁场为

$$H^{(1)} = \hat{\phi}\frac{Il}{4\pi r^2}\sin \theta$$

此结果与一个指向 $\hat{z}$ 轴向的无穷小电流源的磁场相同(由毕奥－萨伐尔定律可得)。

习　题

5.3.1 考虑一个 $\hat{z}$ 方向上长度为 l，$\hat{x}$ 方向上间隔为 d，终端短路的平行波导。求其零阶，一阶和二阶的电场和磁场。证明所有各阶准静态解的和与TEM模完全波的解相等。假设 $z=0$ 处的激励电流为 $I(t)=I_0\cos\omega t$，所有的场都只是 t 和 z 的函数。

5.3.2 在准静态电场问题中，一阶的电流可从零阶的电荷分布对时间取导求出。对一个载有电荷 $Q=CV$ 的电容器，一阶的电流为

$$I=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}+V\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}$$

准静电变换器是应用上式最后一项，机械地振动一电容器以产生电流的器件。

在电容式话筒中，被紧绷着的金属膜片能对瞬变的声音有响应而运动。通常，膜片由表面涂敷有极薄而精细的黄金塑料胶片做成，以使它能导电，并构成电容器的一个极板。电容式话筒的等效电路如图5.3-2所示。

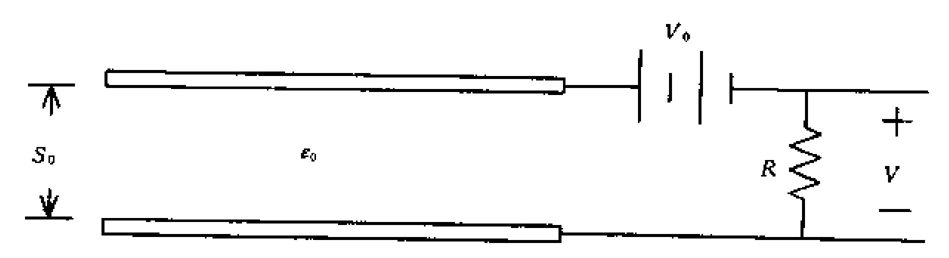


图5.3-2　电容式活筒等效电路

建立膜片运动的时谐声压 $s(t)=S_1\cos\omega t$，可证明对 $v(t)$ 的微分方程为

$$RC_0\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}+v(t)=RC_0V_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{s(t)}{S_0}\right]$$

其中，$C_0=\varepsilon_0A/S_0$，而 A 是膜片的面积。设 $V_0=50\ \mathrm{V}$，$R=10^7\ \Omega$，$A=8\ \mathrm{cm}^2$，$F=1\ \mathrm{kHz}$，$S_0=25\ \mu\mathrm{m}$ 和 $S_1=1\ \mu\mathrm{m}$。试求输出电压的幅度。证明在 $\omega RC_0\gg1$ 时，感应电压直接与膜片的振动幅度 S_1 成正比。

5.3.3 (1)考虑如下电流密度给出的面电流

$$\boldsymbol{J}=\hat{x}J_s\,\delta(z)$$

试确定由面电流所产生的单位面积的时间平均功率，以及在 $z>0$ 半空间内的平面波所带有的单位面积的时间平均功率。

(2)对以如下电流密度给出的面电流

$$\boldsymbol{J}=\hat{x}J_s\,e^{-\mathrm{j}\beta y}\delta(z)$$

试确定它产生的电波的幅度，以及相应的时间平均功率密度。当 $\beta=k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ 时会发生什么现象？

(3)试证明在准静态场极限问题中，磁场趋于由正弦面磁流所产生的场。

5.4　几何光学极限

在麦克斯韦理论中，几何光学可以作为频率非常高时的极限情况来对待。考虑下述解

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0L(\boldsymbol{r})}\tag{5.4.1}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{H}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0L(\boldsymbol{r})}\tag{5.4.2}$$

式中，$k_0=\omega/c$。我们将设 $k_0\to\infty$。代入无源情况的麦克斯韦方程组，并利用矢量恒等式

$\nabla\times(\boldsymbol{A}\phi)=\phi\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\phi\times\boldsymbol{A}$ 和$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\phi)=\nabla\phi\cdot\boldsymbol{A}+\phi\nabla\cdot\boldsymbol{A}$，则在各向同性介质中有

$$\nabla L(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}+\frac{n}{\eta}\boldsymbol{E}=\frac{\mathrm{i}}{k_0}\nabla\times\boldsymbol{H} \tag{5.4.3}$$

$$\nabla L(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{E}-n\eta\boldsymbol{H}=\frac{\mathrm{i}}{k_0}\nabla\times\boldsymbol{E} \tag{5.4.4}$$

$$\nabla L(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\mathrm{i}}{k_0}\nabla\cdot\boldsymbol{E} \tag{5.4.5}$$

$$\nabla L(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{H}=\frac{\mathrm{i}}{k_0}\nabla\cdot\boldsymbol{H} \tag{5.4.6}$$

式中 $n=c\sqrt{\mu\epsilon}$ 是折射指数，$\eta=\sqrt{\mu/\epsilon}$ 是各向同性介质的特性阻抗。

在高频极限中，可忽略式(5.4.3)～(5.4.6)的右端，获得用于几何光学的控制方程组，即

$$\nabla L\times\boldsymbol{H}+\frac{n}{\eta}\boldsymbol{E}=0 \tag{5.4.7}$$

$$\nabla L\times\boldsymbol{E}-n\eta\boldsymbol{H}=0 \tag{5.4.8}$$

$$\nabla L\cdot\boldsymbol{E}=0 \tag{5.4.9}$$

$$\nabla L\cdot\boldsymbol{H}=0 \tag{5.4.10}$$

现在这一组方程与频率无关。

将式(5.4.8)代入式(5.4.7)，并利用式(5.4.9)，则可得到几何光学中的 Eikonal 方程，

$$|\nabla L(\boldsymbol{r})|^2=n^2 \tag{5.4.11}$$

相位函数 $L(\boldsymbol{r})$也被称为 Eikonal 方程。几何波前用 $L(\boldsymbol{r})=\text{const}$ 描述，设垂直于波前的单位矢量为 $\hat{s}$。由式(5.4.11)有

$$\nabla L=\hat{s}n \tag{5.4.12}$$

其中，$\hat{s}n$ 称之为射线矢量。

由式(5.4.9)和(5.4.10)可见，电场磁场均垂直于波前的法线。时谐坡印廷矢量为

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{S}\rangle&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\}=\frac{1}{2n\eta}\mathrm{Re}\{\boldsymbol{E}\times(\nabla L\times\boldsymbol{E})^*\}\\&=\frac{1}{2n\eta}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*)\nabla L=\frac{2c}{n^2}\langle W_e\rangle\nabla L=\hat{s}\frac{2c}{n}\langle W_e\rangle\end{aligned} \tag{5.4.13}$$

或者，以 $\boldsymbol{H}$ 表示

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{S}\rangle&=-\frac{\eta}{2n}\mathrm{Re}\{(\nabla L\times\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{H}^*\}\\&=\frac{\eta}{2n}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^*)\nabla L=\frac{2c}{n^2}\langle W_m\rangle\nabla L=\hat{s}\frac{2c}{n}\langle W_m\rangle\end{aligned} \tag{5.4.14}$$

其中，$\langle W_e\rangle=\epsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*/4$ 是电能的时间平均值，$\langle W_m\rangle=\mu\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^*/4$ 是磁能的时间平均值。使式(5.4.13)与(5.4.14)相等，则可得$\langle W_e\rangle=\langle W_m\rangle=\langle W/2\rangle$，其中$\langle W\rangle$是总的时间平均储能。因此

$$\langle\boldsymbol{S}\rangle=\hat{s}\frac{c}{n}\langle W\rangle=\hat{s}v\langle W\rangle \tag{5.4.15}$$

其中，$v=c/n$ 是电磁波在介质中的速度。现在可总结如下，时间平均的坡印廷功率矢量在射线矢量 $\hat{s}n$ 方向上，其幅度等于电磁能量$\langle W\rangle$与速度 v 的乘积。

强度 I 定义为时间平均坡印廷矢量的绝对值

$$I=|\langle\boldsymbol{S}\rangle|=v\langle W\rangle$$

坡印廷定理说明

$$\nabla \cdot \boldsymbol{S} = -\mathrm{i}\omega(\varepsilon |E|^2 - \mu |H|^2)$$

对上式取时间平均值可得

$$\nabla \cdot (\hat{s}I) = 0$$

这就是强度 I 的守恒方程。

设沿射线路径的位置矢量以 $\boldsymbol{r}(s)$ 表示（见图 5.4-1），路径的参数用弧长 s 表示。因 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}s = \hat{s}$，由式(5.4.12)可得

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \cdot \nabla\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right) = \hat{s} \cdot \nabla(\hat{s}) = \frac{\nabla L}{n} \cdot \nabla\left(\frac{\nabla L}{n}\right)$$

对均匀介质说来，n 为常数，由式(5.4.11)可见有

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2} = \frac{1}{2}\nabla\left(\frac{|\nabla L|^2}{n^2}\right) = 0$$

因此，射线路径是一直线。当 n 与空间有关时，可利用矢量恒等式

$$\nabla(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$$

可得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2} &= \frac{1}{2}\nabla\left(\frac{|\nabla L|^2}{n^2}\right) - \frac{\nabla L}{n} \times \left(\nabla\frac{1}{n} \times \nabla L\right) \\ &= \frac{\nabla L}{n}\left(\nabla L \cdot \nabla\frac{1}{n}\right) - \left(\nabla\frac{1}{n}\right)\frac{|\nabla L|^2}{n} + \frac{1}{2}\nabla\left(\frac{|\nabla L|^2}{n^2}\right) \\ &= \frac{\nabla L}{n}\left(\nabla L \cdot \nabla\frac{1}{n}\right) - n\nabla\frac{1}{n}\end{aligned}$$

因此，在非均匀介质中射线是弯曲的。

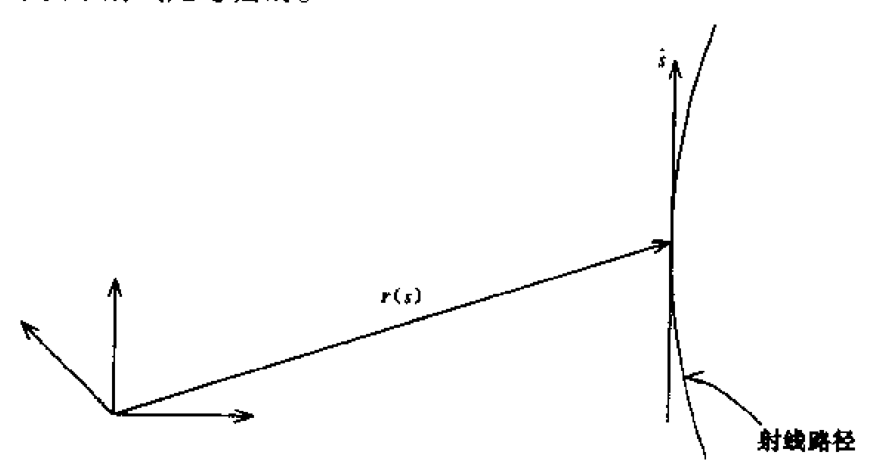


图 5.4-1　几何光学中的射线路径

对式(5.4.12)取旋度，有

$$\nabla \times (\hat{s}n) = 0 \tag{5.4.16}$$

现在来推导斯涅耳(Snell)定律，先在折射指数为 n_1 和 n_2 的两介质分界线上作条带形廓线 C（见图 5.4-2），然后绕廓线取积分。应用斯托克斯定理，并设条带的宽度 $\delta \to 0$，则有

$$\iint \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \nabla \times (\hat{s}n) = \oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \hat{s}n = 0 \tag{5.4.17}$$

式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 是垂直于条带面积的单位矢量，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 是沿条带闭合廓线的微分线段。垂直于分界面的两条边廓线对积分的贡献因两条边与 δ 成正比而可以忽略。因此，跨在边界上的射线矢量的切向分量是连续的。由式(5.4.17)对透射的射线有

$$n_1\sin\theta_\mathrm{i} = n_2\sin\theta_\mathrm{t} \tag{5.4.18}$$

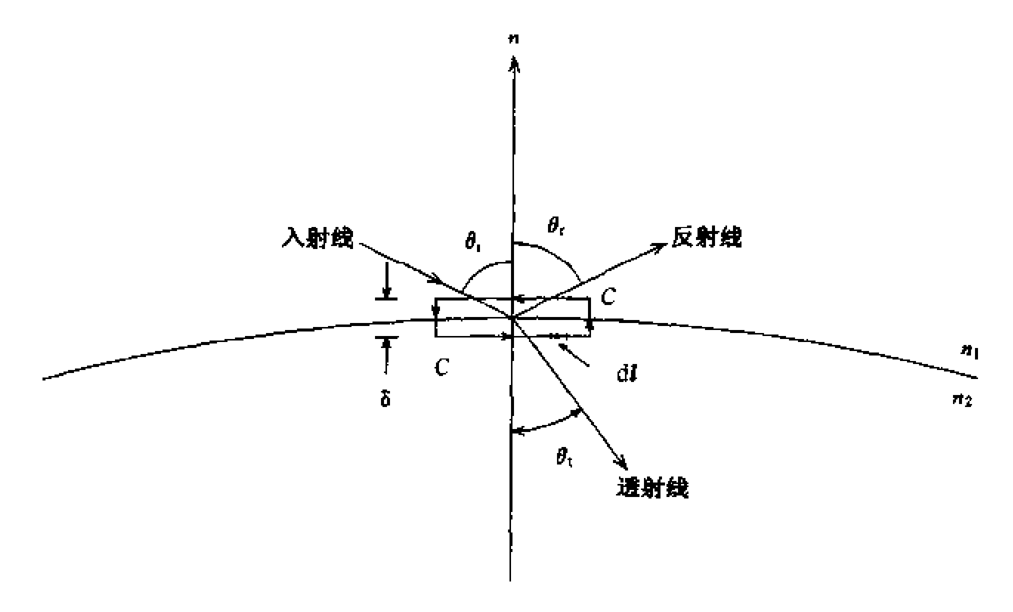


图 5.4-2 斯涅耳定律的推导

对反射线,采用 $\theta_t=\pi-\theta_r$,且 $n_2=n_1$。由式(5.4.18)可得 $n_1\sin\theta_i=n_1\sin\theta_t$。于是,反射角 θ_r 等于入射角 θ_i。应指出,对平面波来说,斯涅耳定律已经用波矢量的相位匹配法推导得到。如果入射波波前和边界面两者的曲率半径均大于波长,则上述推导就有效。由于射线矢量的无旋特性,沿任何闭合路径 C 将有

$$\oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{s}}n=0 \tag{5.4.19}$$

借助于斯涅耳定律,即使是跨在两种不同介质的边界上,上式也正确。

现在来考虑波前 S_1 被 S 面反射,反射线形成另一波前 S_2(见图 5.4-3)的问题。注意,A_1AA_2 和 B_1BB_2 均为 $\hat{\boldsymbol{s}}$ 方向的射线路径,A_1B_1 和 A_2B_2 均为垂直于射线路径的波前。

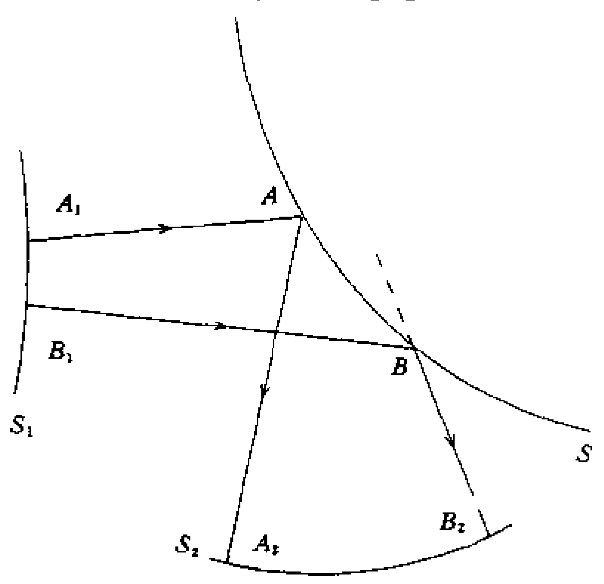


图 5.4-3 波前 S_1 由曲面 S 的反射

应用式(5.4.19)可得

$$\left(\int_{A_1AA_2}+\int_{A_2B_2}+\int_{B_2BB_1}+\int_{B_1A_1}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{s}}n=0$$

因为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{s}}=0$,所以沿 A_2B_2 和 B_1A_1 的积分为零,于是有

$$\int_{A_1AA_2} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \hat{s}n - \int_{B_1BB_2} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \hat{s}n = 0$$

在光学路径上矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 和 $\hat{s}n$ 在同一方向,积分路径规定为沿路径 A_1AA_2 和 B_1BB_2 的光学路径长度。可以断定,有

$$\int_{A_1AA_2} n\mathrm{d}s = \int_{B_1BB_2} n\mathrm{d}s \tag{5.4.20}$$

因此,任意两个波前之间所有射线的光学路径长度均相同。上述定理很容易被推广至包括折射的情况。

作为一个例子,考虑一个把球面波前变换为平面波前的反射面。射线路径如图 5.4-4 所示。由式(5.4.20)有

$$\overline{OB} + \overline{BB_2} = \overline{OA} + \overline{AA_2} \tag{5.4.21}$$

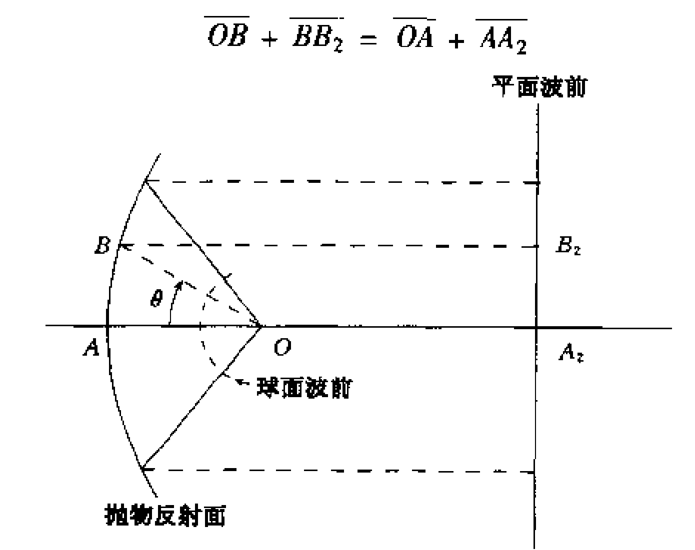


图 5.4-4　从球面波前至平面波前的变换

由于所有的反射线均平行于 AOA_2,因此

$$\overline{BB_2} = \overline{OB}\cos\theta + \overline{OA_2} \tag{5.4.22}$$

代入式(5.4.21),可得

$$\overline{OB}(1 + \cos\theta) = \overline{OA} - \overline{OA_2} + \overline{AA_2} = 2\,\overline{OA} \tag{5.4.23}$$

$$r(1 + \cos\theta) = 2f$$

此方程描述一抛物线。将它绕 OA_2 轴旋转则反射面呈抛物面形状。

双曲面把一个球面波前变换为另一个球面波前,如图 5.4-5 所示,并由式(5.4.20)可得

$$\overline{OB} + \overline{BB_2} = \overline{OA} + \overline{AA_2} \tag{5.4.24}$$

球面反射线的波前中心在 F,因为

$$\overline{BB_2} = \overline{FB_2} - \overline{FB} = \overline{FA_2} - \overline{FB}$$

由式(5.4.24)可得

$$\overline{OB} - \overline{FB} = \overline{OA} + \overline{AA_2} - \overline{FA_2} = \overline{OA} - \overline{FA} \tag{5.4.25}$$

此方程将确定一双曲线。将它绕 FO 轴旋转则构成一双曲面。这种反射器最初由 Cassegrain 设计,用于光学望远镜。

透镜天线

首先为几何光学折射建立光学路径长度定理。边界面 S 分隔空气和折射指数为 n 的介

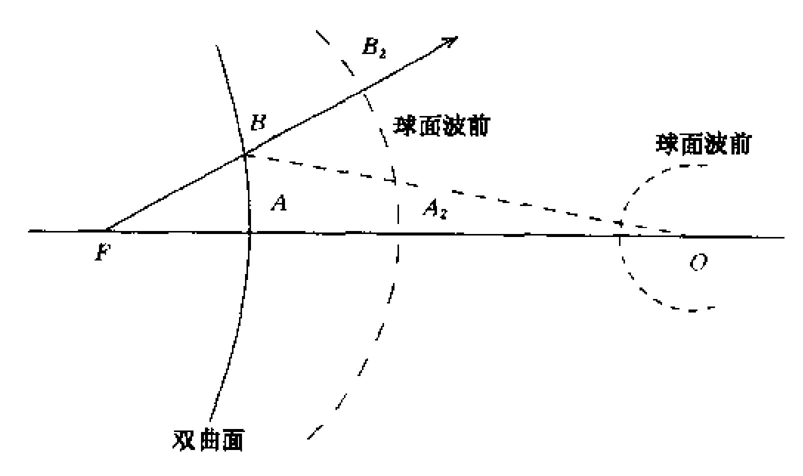


图 5.4-5 从球面波前至另一球面波前的变换

电介质如图 5.4-6 所示。A_1AA_2 和 B_1BB_2 两射线从恒定波前 S_1 出发,被介质折射后形成新的波前 S_2。

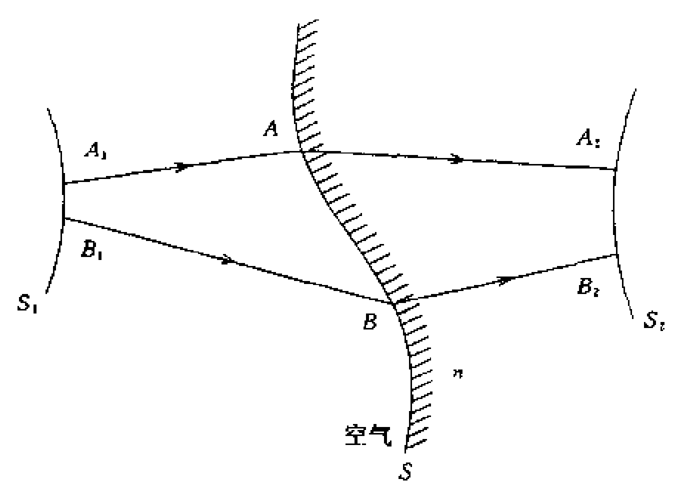


图 5.4-6 光学路径长度定理的建立

两射线的场的幅度与 $e^{i\omega L(r)/c}$ 有关,射线矢量 $n\hat{s}=\nabla L(r)$ 具有无旋特性

$$\nabla\times n\hat{s}=0 \tag{5.4.26}$$

其中,n 是空气或与射线位置有关的电介质的折射指数。由斯托克斯定理得出

$$\int_{A_1A}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\hat{s}+\int_{AA_2}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\hat{s}n+\int_{A_2B_2}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\hat{s}n+$$

$$\int_{B_2B}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\hat{s}n+\int_{BB_1}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\hat{s}+\int_{B_1A_2}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\hat{s}=0$$

由射线矢量在 S 面上的边界条件,射线 A_1A 至 AA_2 以及 B_1B 至 BB_2 均满足斯涅耳定律。由于 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\hat{s}=0$,沿 A_1B_1 和 A_2B_2 的积分为零,因而有

$$\int_{A_1A}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\hat{s}+\int_{AA_2}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\hat{s}n=\int_{B_1B}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\hat{s}+\int_{BB_2}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\hat{s}n \tag{5.4.27}$$

或简化为

$$A_1A+nAA_2=B_1B+nBB_2 \tag{5.4.28}$$

这就是光学路径的长度定理,该定理表明两个恒定波前之间的光径长度相等。

现在构造一个单面的透镜,它将把球面的波前变换为平面的波前。由光径的长度定理及

图 5.4-7 可得

$$\overline{OB} = \overline{OA} + n\overline{AA_2} \tag{5.4.29}$$

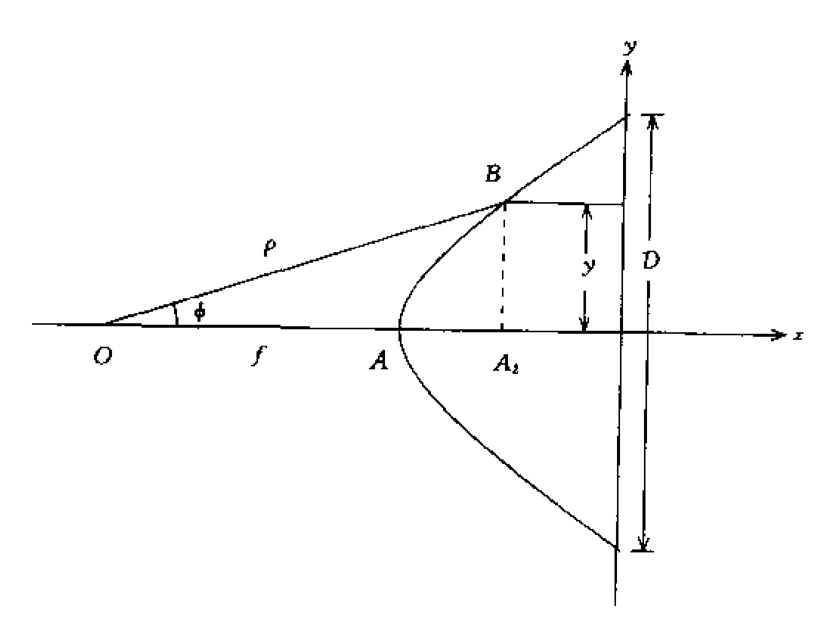


图 5.4-7　将球面波前变换为平面波前的单面透镜

设与 x 轴的夹角为 ϕ 的方向上，原点 O 至折射面的长度为 ρ，则可得 $\overline{AA_2} = \rho\cos\phi - f$。其中，$f = \overline{OA}$。式(5.4.29)变为

$$\rho = \frac{(n-1)f}{n\cos\phi - 1} \tag{5.4.30}$$

这就是双曲线方程。

考虑一个如式(5.4.30)所描写的，断面为双曲线的柱形透镜天线，用线源照射该天线。我们将证明在口径 D 上，场的幅度分布是由中心向外递减的。首先要指出，穿过 y 处 $\mathrm{d}y$ 宽度薄片内的总功率 P_t 为

$$P_t = \mathrm{d}yP(y) \tag{5.4.31}$$

其中，$P(y)$是 y 处单位长度上的功率。忽略反射波，此总功率将等于线源在 $\mathrm{d}\phi$ 角内所辐射的功率

$$P_t = U(\phi)\mathrm{d}\phi \tag{5.4.32}$$

其中，$U(\phi)$是源在单位角内的功率，由于 $y = \rho\sin\phi$，由式(5.4.30)可得

$$\mathrm{d}y = (n-1)f\frac{n - \cos\phi}{(n\cos\phi - 1)^2}\mathrm{d}\phi \tag{5.4.33}$$

使式(5.4.31)与(5.4.32)相等，并利用式(5.4.33)可得

$$P(y) = \frac{(n\cos\phi - 1)^2}{(n-1)f(n - \cos\phi)}U(\phi) \tag{5.4.34}$$

在口径平面上相应于 $\phi = 0$ 方向，$y = y$ 处场的幅度 $E(y)$ 与 $y = 0$ 处的 $E(0)$之比等于它们功率比的平方根

$$\frac{E(y)}{E(0)} = \sqrt{\frac{P(y)}{P(0)}} = \frac{n\cos\phi - 1}{\sqrt{(n-1)(n - \cos\phi)}} \tag{5.4.35}$$

当 $\phi = \arccos(1/n)$时，幅度比变为零。

忽略凸表面上的反射将增大透射的功率。更为重要的是,从平面表面的反射会被聚集并返回至初级馈源而导致失配。使用低折射指数的材料能降低两个表面的反射。平面表面上的反射可以用折射指数为$\sqrt{n}$的1/4波长的小片消除。其原理来自于传输线理论中,一个特性阻抗为$\sqrt{Z_0 Z_1}$的1/4波长短截线,能使特性阻抗分别为Z_0及Z_1的两种传输线相匹配。传输线理论能在这里应用,是因为波是垂直入射至透镜的平面处。

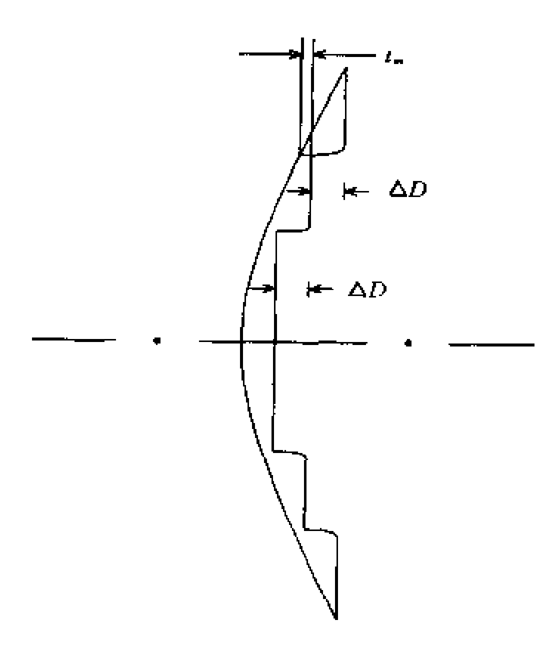


图 5.4-8 分区介质透镜

欲降低透镜的重量,可以把它构成分区介质透镜(图 5.4-8)。由光径的长度定理式(5.4.27)可以知道,$\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\hat{s}n=\mathrm{d}L$是场量随$\nabla L(\boldsymbol{r})=s\hat{n}$改变时的相位增量。因此,可使分区的节距$\Delta D$为

$$k_0\Delta D(n-1)=2\pi$$

等效为

$$\Delta D=\frac{\lambda_0}{n-1}$$

式中,$\lambda_0=2\pi/k_0$是自由空间波长。于是,因减去的介质而引起的相移为2π。当透镜的最小厚度为t_m时,其最大厚度将为$t_m+\lambda_0/(n-1)$。

由线源在焦点附近产生的柱面波变成透镜口径上平面波的变换,可以从介质介质造成的相位延迟这个角度来理解。介质内的相速为c/n。在靠近x轴处,介质最厚,引起的相位延迟最大。在透镜边缘,相速完全不减慢。双曲面的截面提供能产生所需相位延迟的分布,使最终的波前为一平面。

同样的概念也可用来理解由金属片做成的透镜天线。在两个间距为a的平行金属片中,TE_1波的相速为

$$v=c\left[1-\left(\frac{\pi}{ka}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{5.4.36}$$

由式可见,这个相速大于自由空间的光速。等效的折射指数为

$$n=\frac{c}{v}=\sqrt{1-\left(\frac{\pi}{ka}\right)^2} \tag{5.4.37}$$

应注意,为使平行板波导中传播的TE_1波不被截止,必须使$\pi<ka$。

考虑如图 5.4-9 所示的一个金属板透镜天线,板的剖面形状根据光径长度定理和等效折射指数的概念确定,即

$$\overline{OB}+n\overline{BB_2}=\overline{OA}+n\overline{AA_2} \tag{5.4.38}$$

设$\overline{OB}=\rho$,$\overline{OA}=f$,可得$\overline{BB_2}-\overline{AA_2}=f-\rho\cos\phi$。由式(5.4.38)可得

$$\rho=\frac{(1-n)f}{1-n\cos\phi} \tag{5.4.39}$$

如$n<1$,式(5.4.39)成为椭圆的方程。

加长金属板波导将加速口径平面上平面波前的形成,缩小板间间隔a将增大金属波导内的相速。因此,金属板透镜天线可采用均匀长度但不均匀间隔的结构,如图 5.4-10 所示。

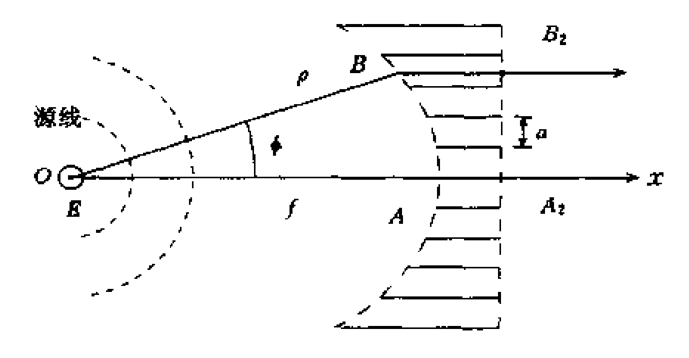


图 5.4-9　金属板透镜

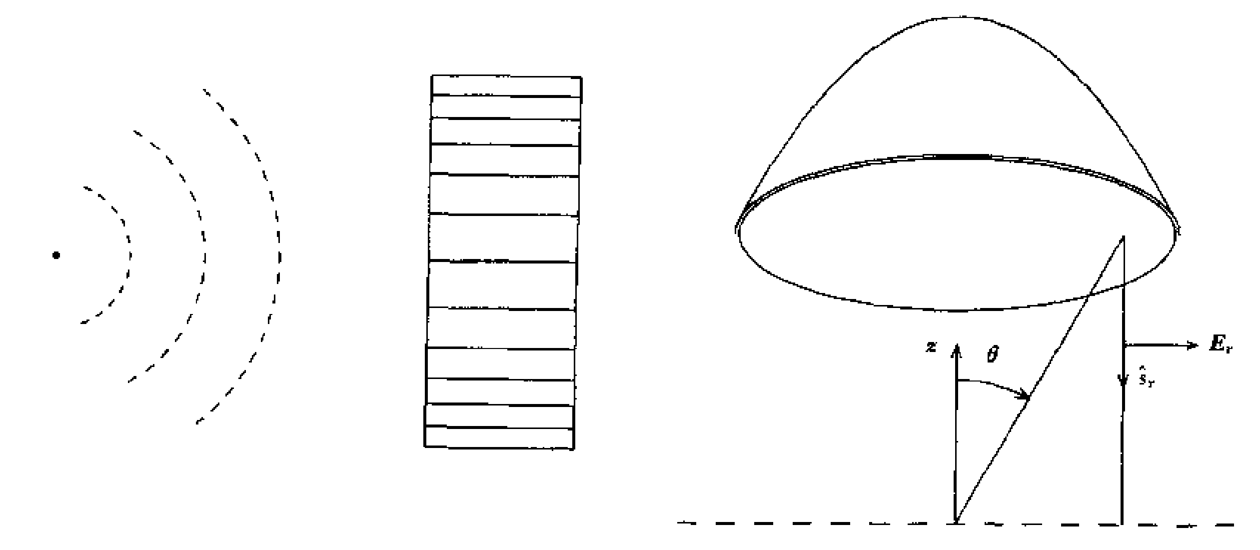


图 5.4-10　具有不均匀间隔的金属板透镜

图 5.4-11　抛物面反射器

抛物面反射器天线

图 5.4-11 所示抛物反射面由下述方程描述

$$r + r\cos\theta = 2f \tag{5.4.40}$$

其中,f 是焦距。设通过焦点垂直于 z 轴的平面称之为口径平面。式(5.4.40)说明,所有从焦点 F 出发到反射器表面,然后到达上述口径平面的路径长度都等于常数 $2f$。

用几何光学的方法寻找口径平面上功率分布的不均匀性是很有意义的。试考虑在焦点上有一全向源,它在绕 z 轴旋转的立体角 $\mathrm{d}\theta$ 内的辐射功率与 $2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta$ 成正比,即

$$\mathrm{d}p = 2\pi C\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

其中,C 是与源的强度成正比的常数。由几何光学的守恒定律可知,在口径平面上,通过微分宽度 $\mathrm{d}\rho$,微分面积为 $2\pi\rho\mathrm{d}\rho$ 的圆环内的功率为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}A} = \frac{C\sin\theta\mathrm{d}\theta}{\rho\mathrm{d}\rho} \tag{5.4.41}$$

由式(5.4.40)可得

$$r = f\sec^2\frac{\theta}{2} \tag{5.4.42}$$

及

$$\rho = r\sin\theta = 2f\tan\frac{\theta}{2} \tag{5.4.43}$$

利用式(5.4.43),可将式(5.4.41)变为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}A}=\frac{C}{f^2}\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

在口径平面上将有自中心向边缘递减的幅度分布。此幅度分布可通过采用增益系数方向图为 $G(\theta,\phi)=\sec^4\left(\frac{\theta}{2}\right)$ 的馈源而变得均匀。

在物理光学近似情况下,反射面上的面电流密度为

$$\boldsymbol{J}_s=\hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{H}_i+\boldsymbol{H}_r)\tag{5.4.44}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 是垂直于抛物面表面的单位矢量,$\boldsymbol{H}_i$ 是入射的磁场,$\boldsymbol{H}_r$ 是反射的磁场。在理想导体的表面上,$\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_i=\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_r$。用入射和反射的电场表示,则为

$$\boldsymbol{H}_i=\frac{1}{\eta}\hat{\boldsymbol{s}}_i\times\boldsymbol{E}_i\tag{5.4.45}$$

$$\boldsymbol{H}_r=\frac{1}{\eta}\hat{\boldsymbol{s}}_r\times\boldsymbol{E}_r\tag{5.4.46}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{s}}_i$ 是入射线的单位矢量,$\hat{\boldsymbol{s}}_r$ 是反射线的单位矢量。表面电流密度变为

$$\boldsymbol{J}_s=\frac{2}{\eta}[\hat{\boldsymbol{n}}\times(\hat{\boldsymbol{s}}_i\times\boldsymbol{E}_i)]\tag{5.4.47}$$

或

$$\boldsymbol{J}_s=\frac{2}{\eta}[\hat{\boldsymbol{n}}\times(\hat{\boldsymbol{s}}_r\times\boldsymbol{E}_r)]\tag{5.4.48}$$

现在假设焦点上有一点源,它在抛物面上 r 点处($r\gg\lambda$)产生的入射场矢量为

$$\boldsymbol{E}_i=\hat{\boldsymbol{e}}_iE(\theta,\phi)\frac{e^{i\omega r/c}}{r}\tag{5.4.49}$$

幅度 $E(\theta,\phi)$ 与源的增益因子 $G(\theta,\phi)$ 具有如下关系

$$\frac{1}{2\eta}|E(\theta,\phi)|^2=\frac{P_t}{4\pi}G(\theta,\phi)\tag{5.4.50}$$

其中 P_t 是源辐射的总功率。

现在研究反射场的极化。电磁场边界条件要求反射表面上的切向电场趋于零

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{E}_r+\boldsymbol{E}_i)=0\tag{5.4.51}$$

而且

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}_r=\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}_i\tag{5.4.52}$$

将 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 与式(5.4.51)点乘,并利用式(5.4.42)可得

$$\boldsymbol{E}_r=2\hat{\boldsymbol{n}}(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}_i)-\boldsymbol{E}_i=\hat{\boldsymbol{e}}_rE(\theta,\phi)\frac{e^{i\omega r/c}}{r}\tag{5.4.53}$$

式(5.4.53)中反射波的单位矢量为

$$\hat{\boldsymbol{e}}_r=2\hat{\boldsymbol{n}}\frac{(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}_i)}{|\boldsymbol{E}_r|}-\frac{\boldsymbol{E}_i}{|\boldsymbol{E}_r|}=2\hat{\boldsymbol{n}}(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_i)-\hat{\boldsymbol{e}}_i\tag{5.4.54}$$

这中间应用了 $|\boldsymbol{E}_r|=|\boldsymbol{E}_i|$ 的关系。

现在假设焦点上的点源为 $\hat{\boldsymbol{y}}$ 方向的线极化。其单位矢量 $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ 为

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i=\frac{\hat{\boldsymbol{r}}\times(\hat{\boldsymbol{y}}\times\hat{\boldsymbol{r}})}{|\hat{\boldsymbol{r}}\times(\hat{\boldsymbol{y}}\times\hat{\boldsymbol{r}})|}=\frac{\hat{\boldsymbol{y}}-(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{y}})\hat{\boldsymbol{r}}}{|\hat{\boldsymbol{y}}-(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{y}})\hat{\boldsymbol{r}}|}\tag{5.4.55}$$

因为,$\hat{\boldsymbol{r}}=\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta\cos\phi+\hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta\sin\phi+\hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta$,在直角坐标系中可得

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}}[-\hat{\boldsymbol{x}}\sin^2\theta\sin\phi\cos\theta + \hat{\boldsymbol{y}}(1-\sin^2\theta\sin^2\phi) - \hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta\cos\theta\sin\phi] \tag{5.4.56}$$

垂直于反射面的单位矢量 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 可通过对式(5.4.42)取梯度获得

$$\nabla\left(f - r\cos^2\frac{\theta}{2}\right) = \left(-\hat{\boldsymbol{r}}\cos\frac{\theta}{2} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}$$

因此

$$\hat{\boldsymbol{n}} = -\hat{\boldsymbol{r}}\cos\frac{\theta}{2} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\frac{\theta}{2} \tag{5.4.57}$$

在直角坐标系中

$$\hat{\boldsymbol{n}} = -\hat{\boldsymbol{x}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\phi - \hat{\boldsymbol{y}}\sin\frac{\theta}{2}\sin\phi - \hat{\boldsymbol{z}}\cos\frac{\theta}{2} \tag{5.4.58}$$

现在来确定反射场的极化矢量 $\hat{\boldsymbol{e}}_r$。由式(5.4.55)和(5.4.57)可得 $\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_i = (\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{y}})\sin(\theta/2) = \sin(\theta/2)\cos\theta\sin\phi$。由式(5.4.54),(5.4.56)和(5.4.58),可得

$$\hat{\boldsymbol{e}}_r = 2\hat{\boldsymbol{n}}(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_i) - \hat{\boldsymbol{e}}_i = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}}[\hat{\boldsymbol{x}}(1-\cos\theta)\sin\phi\cos\phi + \hat{\boldsymbol{y}}(\cos\theta\sin^2\phi + \cos^2\phi)] \tag{5.4.59}$$

不出所料,$\hat{\boldsymbol{e}}_r$ 没有 z 分量,因为 $\hat{\boldsymbol{s}}_r$ 位于 $-\hat{\boldsymbol{z}}$ 方向,$\boldsymbol{E}_r$ 垂直于 $\hat{\boldsymbol{s}}_r$。$\hat{\boldsymbol{e}}_r$ 的 x 分量在口径平面上新产生一交叉极化场。由几何光学,口径平面上的场比 $\boldsymbol{E}_r$ 多得一额外的相位因子 $(\omega/c)r\cos\theta$,成为

$$\boldsymbol{E}_{ap} = \hat{\boldsymbol{e}}_r E(\theta,\phi)\frac{e^{-i(\omega/c)(r+r\cos\theta)}}{r} \tag{5.4.60}$$

在大 f/D 比时,反射器的截面比较扁平。我们发现,$\theta\to0$ 时,$\hat{\boldsymbol{e}}_r$ 的 x 分量即 $e_{rx}\to0$。有意义的是,对位于焦点的电偶极子来说,其入射场与 $\sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} = \sqrt{1-(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{y}})^2} = \sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\gamma'}$ 成正比。其中,γ 是 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 和 y 轴的夹角。它会消去 $\hat{\boldsymbol{e}}_r$ 式分母中与角度有关的部分。

确定了反射表面的面电流分布,现在由下式求辐射场

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = i\omega\mu\frac{e^{ikr}}{4\pi r}(\hat{\boldsymbol{\theta}}f_\theta + \hat{\boldsymbol{\phi}}f_\phi)$$

其中,矢量电流矩

$$\boldsymbol{f} = \iint dS\,\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}')e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}$$

面电流密度已在式(5.4.48)中导出

$$\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}') = \frac{2}{\eta}\{\hat{\boldsymbol{n}}\times[\hat{\boldsymbol{s}}_r\times\boldsymbol{E}_r(\boldsymbol{r}')]\}$$

由式(5.4.53),反射场为

$$\boldsymbol{E}_r(\boldsymbol{r}') = \hat{\boldsymbol{e}}_r E(\hat{\boldsymbol{\theta}},\hat{\boldsymbol{\phi}})\frac{e^{ikr'}}{r'}$$

因为 $\hat{\boldsymbol{s}}_r = -\hat{\boldsymbol{z}}$ 和 $-\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = \cos(\theta/2)$,可得

$$\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}') = \left[\hat{\boldsymbol{e}}_r\cos\frac{\theta'}{2} - \hat{\boldsymbol{z}}(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_r)\right]\frac{2E(\theta',\phi')}{\eta}\frac{e^{ikr'}}{r'} \tag{5.4.61}$$

其中,$\hat{\boldsymbol{e}}_r$ 由式(5.4.59)给出,$\hat{\boldsymbol{n}}$ 由式(5.4.57)给出。

由上式可见，矢量电流矩 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$ 有沿 $\hat{\boldsymbol{e}}_r$ 的分量，此分量平行于 x-y 平面，还有一个沿 z 轴的分量。z 分量对 E_ϕ 没有贡献，因为 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 总是垂直于 z。它对 $\theta=0$ 附近的 E_θ 的贡献极小，因为 $\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}=\sin\theta$。这个情况与电偶极子在 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 方向产生的场相似。实际上，如果用口面场分布去计算辐射场，等效的面电流密度将完全没有 z 分量。

因此，只考虑 $\boldsymbol{f}$ 的横向分量，并写为

$$\boldsymbol{f}=\iint \mathrm{d}S\hat{\boldsymbol{e}}_r\cos\frac{\theta'}{2}\frac{2E(\theta',\phi')}{\eta r'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr'-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'} \tag{5.4.62}$$

抛物面上微分面积 $\mathrm{d}S$ 为

$$\mathrm{d}S=(r'\sin\theta'\mathrm{d}\phi')\left[r'\sec\left(\frac{\theta'}{2}\right)\mathrm{d}\theta'\right]$$

积分内指数的相位因子为

$$-kr'+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'=kr'[-1+\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi'-\phi)+\cos\theta\cos\theta']$$

现在来检验沿 z 轴 $\theta=\pi$ 方向的天线增益，式(5.4.62)中的辐射矢量变为

$$\boldsymbol{f}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi'\int_0^{\theta_0}\mathrm{d}\theta'\hat{\boldsymbol{e}}_r r'\sin\theta'\frac{E(\theta',\phi')}{\eta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2kf} \tag{5.4.63}$$

忽略交叉极化的影响，并设 $\hat{\boldsymbol{e}}_r\approx\hat{\boldsymbol{y}}$，可得

$$\boldsymbol{E}(r,\pi,0)=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\mathrm{i}\omega\mu\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r+2f)}}{\pi\eta r}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi'\int_0^{\theta_0}\mathrm{d}\theta' f\tan\frac{\theta'}{2}E(\theta',\phi') \tag{5.4.64}$$

假设馈源的增益与 ϕ' 无关。例如，用一短截线支持的偶极子馈源(Silver,1949)能满足此要求。回想有

$$\frac{1}{2\eta}|E(\theta',\phi')|^2=\frac{P_t}{4\pi}G(\theta') \tag{5.4.65}$$

其中，P_t 是馈源的总辐射功率，由式(5.4.64)沿 ϕ' 取积分

$$\boldsymbol{E}(r,\pi,0)=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\mathrm{i}2\omega\mu f\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r+2f)}}{\eta r}\int_0^{\theta_0}\mathrm{d}\theta'\tan\frac{\theta'}{2}\sqrt{\left[\frac{\eta P_t}{2\pi}G(\theta')\right]} \tag{5.4.66}$$

天线在前方向的增益为

$$g=\frac{4\pi r^2}{P_t}\frac{1}{2\eta}|E(r,\pi,0)|^2=4k^2f^2\left\{\int_0^{\theta_0}\mathrm{d}\theta'\tan\frac{\theta'}{2}\sqrt{[G(\theta')]}\right\}^2 \tag{5.4.67}$$

为进一步解释式(5.4.67)，定义口面的直径 D(见图 5.4-12)

$$D=2f\sec^2\frac{\theta_0}{2}\sin\theta_0=4f\tan\frac{\theta_0}{2} \tag{5.4.68}$$

把式(5.4.67)改写为如下形式

$$g=\left(\frac{\pi D}{\lambda}\right)^2\cot^2\frac{\theta_0}{2}\left\{\int_0^{\theta_0}\mathrm{d}\theta'\tan\frac{\theta'}{2}[G(\theta')]^{1/2}\right\}^2 \tag{5.4.69}$$

其中，因子 $(\pi D/\lambda)^2$ 是均匀照射圆形口径的增益。

D 固定时，增益 g 随 θ_0 增大而增大，因为 θ_0 增大时，馈源总功率中有用部分增大。但是在 D 固定时，随着 θ_0 增大，天线的口径效率，即反射器在其前方集中有用功率的能力将降低，结果使增益 g 减小。最佳的 θ_0 角由 $\mathrm{d}g/\mathrm{d}\theta_0=0$ 给出。

$$\sqrt{[G(\theta_0)]}=\frac{1}{2}\csc^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\int_0^{\theta_0}\mathrm{d}\theta'\tan\frac{\theta'}{2}\sqrt{[G(\theta')]} \tag{5.4.70}$$

最佳角的口径代表馈源能量的溢失与口径效率之间有妥善的折中。

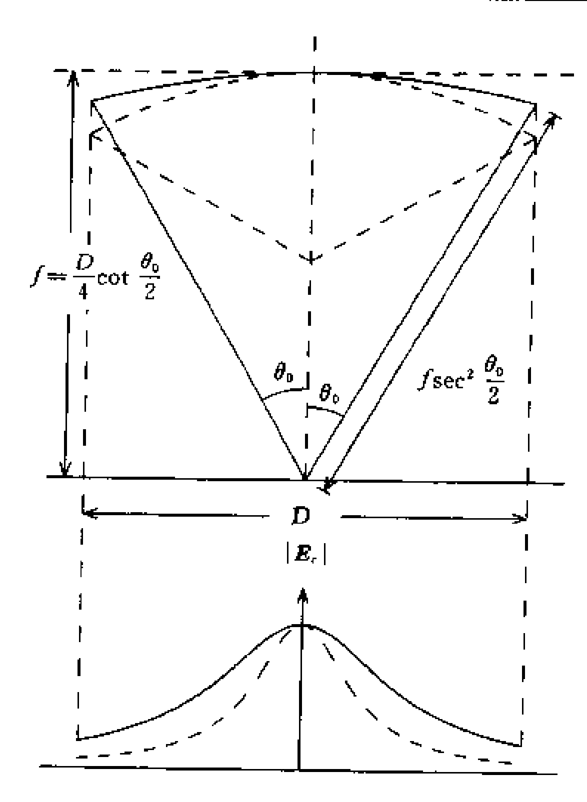


图 5.4-12 D 固定时，增益随 θ_0 增大而增大

有很多因素可能使增益发生改变。

(1)由于天线馈源的波前偏离球面波前造成相位误差的影响和馈源中心从焦点的位移造成的散焦的影响，口径上可容忍的最大相位偏差通常取为 $\lambda/8$ 即 $\pi/4$。

(2)天线初级馈源的后瓣会干扰辐射方向图的主瓣，通过对焦距 f 等参数的设计选择，这种干扰影响可以被利用来改善主瓣轴线方向上的性能。

(3)反射器边缘上的电流会产生与线源一样的作用，产生后向辐射。采用把边缘做成不规则形状，在边缘上放置扼流圈或阻抗等方法，可减弱此不利影响。

(4)馈源在反射线路径上的阻挡作用会显著地降低增益。偏轴馈电的方法能起补救的作用，但这样做又会引起另外的电气和硬件方面的问题。

(5)带有双曲面副反射器的卡塞格仑(Cassegrain)抛物面反射器天线有时候将其初级馈源放置于主反射器的后面。这样的安排有利于复杂馈源的安装，将降低射电天文接收机的噪声温度，并缩短两个反射器之间的距离，因为此时副反射器被旋转于抛物面的焦点之前(靠主反射器的一侧)。但这样又引出一新问题，由主反射面的反射波在副反射面上产生的寄生面电流引起的天线失配可能变得严重。

习题

5.4.1 考虑一由双曲线绕其轴旋转形成的透镜。假设源的功率密度分布与 ϕ 角无关，即 $u=u(\theta)$，则包围在由 $\mathrm{d}\theta$ 角绕 z 轴旋转所形成壳体内的功率为

$$P_s = u(\theta)2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

透射过以 z 轴为中心，宽度为 $\mathrm{d}\rho$ 环的功率为

$$P_t = P(\rho)2\pi r\sin\theta\mathrm{d}\rho$$

其中，$P(\rho)$是透射波束的功率密度。因此，由能量守恒即 $P_t=P_s$，可得

$$\frac{P(\rho)}{u(\theta)} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\rho} = \frac{n\cos\theta-1}{(n-1)f}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\rho}$$

试求口径平面上场的幅度分布 $E(\rho)/E(0)$。

5.4.2 设抛物面反射器天线馈源的增益函数为

$$G(\theta') = 6\cos^2\theta' \qquad 0 \leqslant \theta' \leqslant \pi/2$$
$$G(\theta') = 0 \qquad \pi/2 \leqslant \theta'$$

试证明

$$\int G(\theta')\mathrm{d}\Omega = 4\pi$$

对于这样一个天线的增益函数,最佳的口径角度 θ_0 是什么?

5.4.3 反射器天线的增益会受馈源的相位误差的影响。设抛物面反射器天线馈源的场强方向图具有如下形式

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{e}}_0\left[2\eta\frac{P_t}{4\pi}G(\theta)\right]^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\delta(\theta)}$$

其中,$\delta(\theta)$表示馈源方向图的相位误差。试证明沿反射器轴的增益因子由下式给出

$$g = \cot^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left\{\left[\int_0^{\theta_0}\mathrm{d}\theta'[G(\theta')]^{1/2}\cos\left[\frac{2\pi\delta(\theta')}{\lambda}\right]\tan\frac{\theta'}{2}\right]^2+\left[\int_0^{\theta_0}\mathrm{d}\theta'[G(\theta')]^{1/2}\sin\left[\frac{2\pi\delta(\theta')}{\lambda}\right]\tan\frac{\theta'}{2}\right]^2\right\}$$

5.5 近轴极限

在近轴极限问题中,标量波动方程

$$(\nabla^2+k^2)U = 0 \tag{5.5.1}$$

的解可写为

$$U = u(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} \tag{5.5.2}$$

在近轴近似情况下,如假设$\partial^2 u/\partial z^2$ 可忽略,则波动方程(5.5.1)变为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\mathrm{i}2k\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{5.5.3}$$

将式(5.5.3)代入试验解

$$u(x,y,z) = X\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right)Y\left(\frac{\sqrt{2}y}{w}\right)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\left[p+\frac{k}{2q}(x^2+y^2)+\Phi(z)\right]} \tag{5.5.4}$$

其中,w,p 和 q 均为 z 的函数。

专题 5.5.A 高斯波束

对高斯波束解,设 $X=Y=1$ 和 $\Phi(z)=0$,可得

$$u(\rho,z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[p(z)+\frac{k}{2q(z)}\rho^2\right]} \tag{5.5.5}$$

式中 $\rho^2=x^2+y^2$,由式(5.5.3)得出

$$2k\left(-p'+\frac{\mathrm{i}}{q}\right)\frac{k^2\rho^2}{q^2}(q'-1) = 0 \tag{5.5.6}$$

为使式(5.5.6)对所有的 ρ 和 z 均有效,可得 $p'=\mathrm{i}/q$ 和 $q'=1$。在高斯波束表示式中选用

$$q = z-\mathrm{i}\frac{kw_0^2}{2} \tag{5.5.7}$$

$$p = \arctan\frac{2z}{kw_0^2}-\mathrm{i}\ln\left[\frac{w_0}{w(z)}\right] \tag{5.5.8}$$

及

$$w(z) = w_o\sqrt{1+\left(\frac{2z}{kw_o^2}\right)^2} \tag{5.5.9}$$

来描述波束宽度与 z 的函数关系。

借助于式(5.5.2),(5.5.5),(5.5.7)和(5.5.8)各式,高斯波束可取如下形式的解

$$U(\rho,z) = \frac{w_o}{w(z)}\exp\left(-\mathrm{i}\arctan\frac{2z}{kw_o^2}\right)\exp(\mathrm{i}kz)\exp\left(\mathrm{i}\frac{2kz\rho^2}{4z^2+(kw_o^2)^2}\right)\exp\left(-\frac{(kw_o\rho)^2}{4z^2+(kw_o^2)^2}\right) \tag{5.5.10}$$

其中,随 ρ 变化的指数衰减项 $e^{-(kw_o\rho)^2/[4z^2+(kw_o^2)^2]}$ 是描述高斯波束的宽度与 z 的函数关系。在 $z=0$ 时定义其宽度为 $\rho=w_o$,此时这个衰减项变为 e^{-1}。随 ρ 而变的相位项 $e^{\mathrm{i}2kz\rho^2/[4z^2+(kw_o^2)^2]}$ 描述波前的曲率,与 $\rho=0$ 时相比,$\rho=\rho_o$ 的相移

$$kb = \frac{2kz\rho_o^2}{4z^2+(kw_o^2)^2} \tag{5.5.11}$$

在近轴近似的情况下,有

$$\rho_o^2 + R^2 \approx (R+b)^2 \approx R^2 + 2Rb$$

由式(5.5.11)可得

$$R = \frac{\rho_o^2}{2b} = z\left[1+\frac{(kw_o^2)^2}{4z^2}\right] \tag{5.5.12}$$

$z=0$ 时,波前的曲率为无穷大。代入式(5.5.9)、(5.5.12)于式(5.5.10),可得

$$U(\rho,z) = \frac{w_o}{w(z)}e^{\mathrm{i}\left[kz+\frac{k\rho^2}{2R(z)}-\arctan\frac{2z}{kw_o^2}\right]}e^{-\left[\frac{\rho}{w(z)}\right]^2} \tag{5.5.13}$$

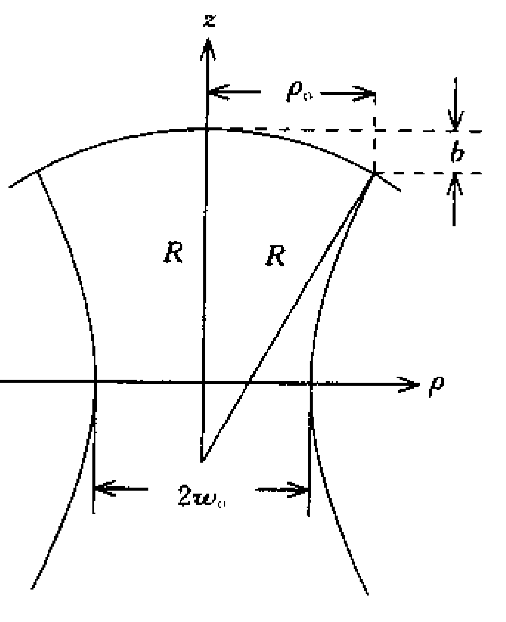


图 5.5-1

当 $z=0$ 时,束腰宽度为 $\rho=w_o$,其波前就是平面波的波前。束腰宽度随 z 的增大而增大,波前曲线的曲率等于 R。当 $z\to\infty$ 时,波前的曲率变为零,而其反正切项为 $\pi/2$,其波前又接近于平面波的波前。

式(5.5.1)的标量波动方程可用于矢量位 $\boldsymbol{A}=\hat{x}U(\rho,z)$ 的 x 分量。在假设 $\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \ll |ku|$ 的情况下,高斯波束解式(5.5.13)可以从近轴近似方程(5.5.2)求出。对应于近轴近似,磁场和电场分别为

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A} = \mathrm{i}k\left(\hat{y}U + \mathrm{i}\,\hat{z}\,\frac{\mathrm{i}}{k}\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

$$\boldsymbol{E} = \mathrm{i}w\left(\hat{x}U + \mathrm{i}\hat{z}\,\frac{1}{k}\frac{\partial U}{\partial x}\right)$$

高斯波束的总功率为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\,\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\} \approx \hat{z}\,\frac{1}{2\eta}$$

其中,假设高斯波束的幅度为单位值。

高斯-哈密特(Gaussian-Hermite)波束模

设试验解式(5.5.4)中的参数 p,q 和 w 由式(5.5.7)~(5.5.9)给出。将式(5.5.4)代入式(5.5.3),并应用式(5.5.6),可得

$$\frac{X''}{X} - \mathrm{i}\sqrt{2}\,\frac{kx}{w}\left(ww' - \frac{w^2}{q}\right)\frac{X'}{X} + \frac{Y''}{Y} - \mathrm{i}\sqrt{2}\,\frac{kx}{w}\left(ww' - \frac{w^2}{q}\right) + kw^2\Phi'(z) = 0 \tag{5.5.14}$$

由式(5.5.7)和(5.5.9)得到 $ww' - w^2/q = -\mathrm{i}2/k$。分离变量并设

$$kw^2\Phi'(z) = 2(m + n) \tag{5.5.15}$$

可导出 Hermite 多项式的微分方程

$$X''\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) - 2\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right)X' + 2mX = 0 \tag{5.5.16a}$$

$$Y''\left(\frac{\sqrt{2}y}{w}\right) - 2\left(\frac{\sqrt{2}y}{w}\right)Y' + 2nY = 0 \tag{5.5.16b}$$

要求 $\Phi(z=0)=0$ 并引入式(5.5.9),可得适合于式(5.5.15)的解

$$\Phi(z) = (m + n)\arctan\left(\frac{2z}{kw_0^2}\right) \tag{5.5.17}$$

这种形式的解与式(5.5.2)和(5.5.4)所表示的相类似,在应用式(5.5.7),(5.5.8)和(5.5.13)之后

$$U = \frac{w_0}{w(z)}H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right)H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{w}\right)\mathrm{e}^{-[\rho/w(z)]^2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}[kz-(m+n+1)\arctan(2z/kw_0^2)+k\rho^2/2R(z)]} \tag{5.5.18}$$

式中 $H_m(\sqrt{2}x/w)$和 $H_n(\sqrt{2}y/w)$为 m 和 n 阶的 Hermite 多项式。

Hermite 多项式 $H_m(\xi)$是下述微分方程的解

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}H_m(\xi) - 2\xi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}H_m(\xi) + 2mH_m(\xi) = 0 \tag{5.5.19}$$

前五个 Hermite 多项式为

$$H_0(\xi) = 1 \tag{5.5.20a}$$

$$H_1(\xi) = 2\xi \tag{5.5.20b}$$

$$H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2 \tag{5.5.20c}$$

$$H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi \tag{5.5.20d}$$

$$H_4(\xi) = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12 \tag{5.5.20e}$$

递归公式为

$$H_{m+1} - 2\xi H_m + 2mH_{m-1} = 0 \tag{5.5.21}$$

Hermite 多项式可定义为

$$H_m(\xi) = (-1)^m\mathrm{e}^{\xi^2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\xi^m}\mathrm{e}^{-\xi^2} \tag{5.5.22}$$

它还具有积分形式的关系式

$$\mathrm{i}^n\mathrm{e}^{-\xi^2/2}H_m(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\zeta}\mathrm{e}^{-\zeta^2/2}H_m(\zeta)$$

和正交条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi H_m(\xi) H_n(\rho) e^{-\xi^2} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi H_m^2(\xi) e^{-\xi^2} = \sqrt{\pi} 2^n n!$$

从式(5.5.18)可看出，所有的 Gaussian-Hermite 波束模具有相同的束宽参数 $w(z)$，相同的相位曲率 $R(z)$，以及相同的如式(5.5.7)中的 q 参数。应该指出，这些高斯波束模形成一组完整的正交函数系，因此可将近轴波的场表示为所有这些模的叠加。然而，近轴模只是精确的波动方程的近似解，而且当较高阶的模变得重要时，近似程度将变差。

高斯波束的传输

用高斯波束描述射线光学时，式(5.5.7)所定义的 q 参数非常重要。同时，由式(5.5.9)对束宽 w 的定义和式(5.5.12)对曲率 R 的定义，可以写出

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{z - ikw_0^2/2} = \frac{1}{R} + i\frac{2}{kw^2} \tag{5.5.23}$$

z 点的 q 参数移至 $z+d$ 点时，它变为

$$q_1 = q + d \tag{5.5.24}$$

薄的透镜可定义为这样一个器件，当波束通过它时，它会使式(5.5.18)所描述的高斯波束产生相移 $e^{-ik\rho^2/2f}$。通过透镜传输后，新的曲率 R_e 为

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R} - \frac{1}{f} \tag{5.5.25}$$

其中，f 是透镜的焦距，半径为 R_0 的镜面所起的作用像焦距为 $f = R_0/2$ 的透镜一样。

式(5.5.24)和(5.5.25)两式可以表示为如下形式的双线性变换

$$q_1 = \frac{A_1 q + B_1}{C_1 q + D_1}$$

对式(5.5.24)，有

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.5.26}$$

由式(5.5.25)，有

$$\frac{1}{q_l} = \frac{1}{q} - \frac{1}{f} \tag{5.5.27}$$

它将给出

$$q_l = \frac{q}{1 - q/f} = \frac{A_l q + B_l}{C_l q + D_l}$$

相应的矩阵 $ABCD$ 为

$$\begin{bmatrix} A_l & B_l \\ C_l & D_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \tag{5.5.28}$$

参数为 q 的波束传输过一段距离 d_1，又透过一焦距为 f 的透镜和另外一段距离 d_2 之后，其最终的参数为

$$q_2 = q_l + d_2 = \frac{q_1 + d_2 - d_2 q_1/f}{1 - q_1/f}$$

$$= \frac{(1 - d_2/f)q + d_1 + d_2 - d_1 d_2/f}{-q/f + 1 - d_1/f} = \frac{A_2 q + B_2}{C_2 q + D_2}$$

不难证明，$A_2B_2C_2D_2$ 矩阵是下述3个矩阵的连乘。

$$\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

连乘的规则是双线性变换的特征，在研究高斯波束传输光学时是非常有用的。

在描述射线光学时，$ABCD$ 矩阵十分有用。设一射线其波束位置为 ρ_1，斜率为 ρ'_1。它旋转对称地通过一光学系统并达到新的波束位置 ρ_2 和斜率 ρ'_2(图5.5-2)。由此可写出

$$\begin{bmatrix} \rho_2 \\ \rho'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho'_1 \end{bmatrix} \tag{5.5.29}$$

在自由空间中传播时，$ABCD$ 矩阵与式(5.5.26)表示的矩阵相同，并有 $\rho_2 = \rho_1 + d\rho'_1$ 和 $\rho'_2 = \rho'_1$。当穿过透镜时，$ABCD$ 矩阵与式(5.5.28)表示的矩阵相同，并有 $\rho_2 = \rho_1$ 和 $\rho'_1 = \rho'_1 - \rho_1/f$。

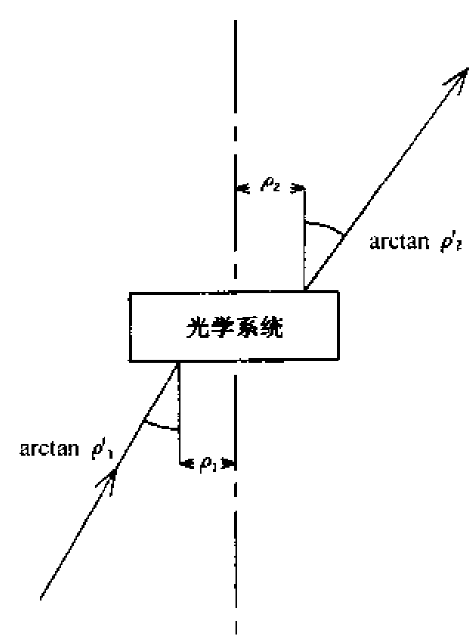


图5.5-2 穿过某一光学系统

习 题

5.5.1 一个Fabry-Perot谐振器由两个平行的反射器组成，其内部形成驻波。谐振器内的场是位于两板间的TEM波。试证明其谐振波数为 $k_r d = m\pi$。严格地说，由于横向的尺寸有限，TEM波会被绕射。假设横向场分布取为高斯形式，试考虑腔内的绕射。在 $z = 0$ 处，$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{x}} E_0 e^{-y_2/w_0^2}$。在 $z > 0$ 处，可将电场写为 $\boldsymbol{k} = \hat{z}k_z + \hat{y}k_y$ 的平面波的叠加，其中，$k_y \ll k_z$。

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{x}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_y E_g e^{ik_z z + ik_y y}$$

式中，

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_y^2} \approx k\left(1 - \frac{1}{2}\frac{k_y^2}{k^2}\right)$$

E_g 的幅度由 $z = 0$ 处的场确定。试应用傅里叶逆变换确定 E_g，并计算和证明

$$\boldsymbol{E} \approx \hat{\boldsymbol{x}} \frac{E_0}{\sqrt{1 + iz/z_F}} e^{ikz} e^{(iz/z_F - 1)y^2/w^2}$$

其中，$z_F = kw_0^2/2$ 和 $w(z) = w_0\sqrt{1 + z^2/z_F^2}$。试证明，对一给定的 w_0，w 随 z 变化的轨迹为一双曲线。由双曲线族的垂线所形成的波前是弯曲的。证明曲率的半径可由 $R(z) \approx w(z)/[dw(z)/dz] = z(1 + z_F^2/z^2)$ 近似确定。画出 $w(z)$ 并证明当 $z = z_F$ 时，右边波前的焦点和左边波前的焦点重合。当两镜的曲率半径为 $R(z_F) = 2z_F$，并以 $d = 2z_F$ 间隔放置时，其结构为共焦的。试确定由共焦镜做成的光学腔内的模，具有共焦结构的模是否稳定。

5.6 电磁波的量子化

在微观物理学中，量子电动力学已成为一门完善的学科。在研究电磁波与介质材料的相互作用时，由于完全的量子理论过于复杂，因而通常采用半经典的方法，也即只用经典的方法处理电磁波，或者只用经典的方法处理介质材料。在这一节中，将用以本构关系表征的介质材料来量子化电磁波。在量子化过程中将要用海森伯格(Heisenberg)表示式。首先对这个表示式作一简要回顾。

物理系统的状态可用一状态矢量代表，可以把该矢量看成一个用 $|\psi>$ 表示，并称之为 ket 的列矩阵，或者看成一个用 $<\psi|$ 表示，并称之为 bra 的行矩阵。bra 或 $<\psi|$ 是 ket 或 $|\psi>$ 的共轭和转置。物理现象用 Hermite 算子表示，而算子可看成是一个方矩阵。对物理现象 A 的任何测量，将给出此现象的统计期望值。由相同状态矢量 $|\psi>$ 表征的系统总体所作的一系列测量的平均值，由下式给出，

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$$

这个平均值，或叫期望值是标量实数。

每个 Hermite 算子都具有一组与特征值相联系的特征矢量。特征矢量相应物理现象的特征态。在以状态矢量 $|\psi>$ 描述的系统中，现象 A 的单次测量结果产生算子 A 的一个特征值 λ_n，并将系统送入相应的特征态 $|\lambda_n>$ 中。获得特征值 λ_n，并导致特征态 $|\lambda_n>$ 的概率，由 $|<\lambda_n|\psi>|^2$ 给出。随时间的推进，算子的特征态与算子本身一同随时间演变，系统的状态将不再是算子的一个特征态。算子随时间的演变取决于运动的方程。在经典电磁理论中，电磁场矢量的运动方程是麦克斯韦方程组。在量子理论中，场矢量被当做算子，受麦克斯韦方程组约束。

5.6.1 测不准原理

由于算子不必要转换，因此，对非转换算子来说，必须设定转换关系。转换关系的物理解释导致测不准原理。此原理从本质上说明，在一个物理系统内进行任何测量，无论是多么小心，都会扰动此系统。因此，永远难以达到真实性，而只能显出统计的结果。测量一个现象时所引入的扰动，可能影响或不影响对其他现象真实数值的测量。当两现象互相有干涉，它们属于非转换算子；如两现象互相不干涉，它们就是可同时测量的，其转换关系为零。电磁场 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的转换关系已设定如下式

$$[D_i(\boldsymbol{r},t), B_j(\boldsymbol{r}',t)] = D_i(\boldsymbol{r},t)B_j(\boldsymbol{r}',t) - B_j(\boldsymbol{r}',t)D_i(\boldsymbol{r},t) \tag{5.6.1}$$

$$= -i\hbar\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial xk}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

其中，$\hbar = h/2\pi = 1.05\times10^{-34}$ J/s。$\hbar$ 因子意味着，任何不能在数量上忽略 $\hbar$ 的时候，量子的作用都很重要。设 $\hbar\to0$ 可得到经典的极限，此时可把算子当做经典变量来处理。

在真空中其他场量的转换关系直接按真空中的本构关系得出：

$$[E_i(\boldsymbol{r},t),B_j(\boldsymbol{r}',t)] = -\mathrm{i}\hbar\varepsilon_{ijk}\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial xk}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{5.6.2}$$

$$[D_i(\boldsymbol{r},t),H_j(\boldsymbol{r}',t)] = -\mathrm{i}\hbar\varepsilon_{ijk}\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial xk}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{5.6.3}$$

$$[E_i(\boldsymbol{r},t),H_j(\boldsymbol{r}',t)] = -\mathrm{i}\hbar c^2\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_k}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{5.6.4}$$

转换关系表明，电场和磁场的正交分量互相干扰，而平行分量为同时可测。例如，要测量电场，可以使用一个试验电荷，观察该电荷沿电力线的运动。但是，当电荷运动时，它形成一电流，此电流产生一垂直于电场的磁场。因此说，测量电场时所用的试验电荷干扰了磁场的同时测量。

回想一下，磁场 $\boldsymbol{B}$ 可表示为矢量 $\boldsymbol{A}$ 的旋度：

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{5.6.5}$$

转换关系(5.6.1)可写为 $[B_j(\boldsymbol{r},t),D_i(\boldsymbol{r}',t)] = -\mathrm{i}\hbar\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_k}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$。由式(5.6.5)可求得

$$\left[\varepsilon_{jkm}\frac{\partial}{\partial x_k}A_m(\boldsymbol{r},t),D_i(\boldsymbol{r}',t)\right] = \varepsilon_{jkm}\frac{\partial}{\partial x_k}[A_m(\boldsymbol{r},t),D_i(\boldsymbol{r}',t)] = -\mathrm{i}\hbar\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_k}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

由此得出用矢量位 $\boldsymbol{A}$ 表示的转换关系为

$$[A_i(\boldsymbol{r},t),D_j(\boldsymbol{r}',t)] = -\mathrm{i}\hbar\delta_{ij}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{5.6.6}$$

应注意，尽管所有的转换关系都是对相等时间写出，但也可推导出不等时的转换关系。

例 5.6.1 欲证明式(5.6.6)能引出式(5.6.1)，我们对不带撇的坐标系 $\boldsymbol{r}$ 的式(5.6.6)取旋度

$$\varepsilon_{kli}\frac{\partial}{\partial x_l}[A_i(\boldsymbol{r},t),D_j(\boldsymbol{r}',t)] = -\mathrm{i}\hbar\varepsilon_{kli}\frac{\partial}{\partial x_l}\delta_{ij}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = -\mathrm{i}\hbar\varepsilon_{klj}\frac{\partial}{\partial x_l}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

可得

$$[B_k(\boldsymbol{r},t),D_j(\boldsymbol{r}',t)] = -\mathrm{i}\hbar\varepsilon_{klj}\frac{\partial}{\partial x_l}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

将 B_k 和 D_j，$\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 互换，可得到式(5.6.1)。

在对量子化系统的描述中，算子同与它有关的特征矢量一样随时间演变。特征矢量可以看成是描述系统状态所形成的基底矢量，它是不随时间变化的。这就是通常所说的海森伯格(Heisenberg)图。这个图不同于薛定谔(Schrodinger)图，后者的系统状态矢量是时间的函数，但算子及其特征态是稳态的。在薛定谔图中，状态矢量的运动方程由薛定谔方程给出。在海森伯格图中，代表物理现象的算子 A 随时间的演变受海森伯格运动方程支配。假设 A 不明显随时间变化，对 A 的海森伯格运动方程为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = [A,\nabla] \tag{5.6.7}$$

其中，∇ 是系统的哈密顿(Hamiltonian)算子，它相应于系统的能量。无源区内电磁场的哈密顿算子为

$$\nabla = \int \mathrm{d}^3r\,\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{5.6.8}$$

欲确定 $\boldsymbol{D}$ 场的运动方程，可应用式(5.6.7)并得

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}D_i}{\mathrm{d}t} = [D_i, \mathcal{V}]$$

$$= \int \mathrm{d}^3 r' \left\{ \frac{1}{\varepsilon_0}[D_i(\boldsymbol{r}), D_j(\boldsymbol{r}')] D_j(\boldsymbol{r}') + \frac{1}{\mu_0}[D_i(\boldsymbol{r}), B_j(\boldsymbol{r}')] B_j(\boldsymbol{r}') \right\}$$

需注意，现在所有关于场的现象都是算子问题，其积分可用转换关系式(5.6.1)和(5.6.3)计算。因为电场算子转换中有的项为零，所以得到

$$\frac{\mathrm{d}D_i}{\mathrm{d}t} = -\epsilon_{ijk}\frac{\partial H_j}{\partial x_k} \tag{5.6.9}$$

这是在没有源项 J_i 时的安培定律。如存在有源项，则式(5.6.8)中的哈密顿算子必须包含一个互作用项 $-\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{A}$。很明显，由转换关系式(5.6.6)看来，此额外项将使式(5.6.9)中产生一个源项 J_i。按类似的步骤，可以从 $\boldsymbol{B}$ 的海森伯格运动方程导出法拉第定律。

5.6.2 零化算子和建立算子

哈密顿算子的特征态是能量的特征态，因为哈密顿算子$\mathcal{V}$是一能量算子。为便于讨论量子化电波场的能量状态，将算子变换至 $\boldsymbol{k}$ 空间

$$A_i(\boldsymbol{r}) = (2\pi)^{-3/2}\int \mathrm{d}^3 k A_i(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{5.6.10a}$$

$$D_i(\boldsymbol{r}) = (2\pi)^{-3/2}\int \mathrm{d}^3 k D_i(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{5.6.10b}$$

$D_i(\boldsymbol{r})$和 $A_i(\boldsymbol{r})$为实数算子的条件要求 $A_i^+(\boldsymbol{r}) = A_i(\boldsymbol{r})$和 $D_i^+(\boldsymbol{r}) = D_i(\boldsymbol{r})$，由此得出 $A_i(\boldsymbol{r})$和 $D_i(\boldsymbol{r})$的真实性条件

$$A_i(-\boldsymbol{k}) = A_i^+(\boldsymbol{k}) \tag{5.6.11a}$$

$$D_i(-\boldsymbol{k}) = D_i^+(\boldsymbol{k}) \tag{5.6.11b}$$

转换条件式(5.6.6)可导出下式

$$[A(\boldsymbol{k}), D^+(\boldsymbol{k}')] = [A^+(\boldsymbol{k}), D(\boldsymbol{k}')] = -\mathrm{i}\hbar\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \tag{5.6.12}$$

式中保留有克罗内克(Kronecker)δ 函数$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$，但去掉了克罗内克 δ 函数δ_{ij}和下标 i，这样如同 $\boldsymbol{A}$ 和$\boldsymbol{D}$ 的正交分量作转换，而它们的同极化分量是非转换的。

例 5.6.2 转换关系(5.6.6)可写为

$$[A(\boldsymbol{r}), D(\boldsymbol{r}')] = -\mathrm{i}\hbar\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

把式(5.6.10)代入上式，可得

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int \mathrm{d}^3 k\int \mathrm{d}^3 k' \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'}[A(\boldsymbol{k}), D(\boldsymbol{k}')] = -\mathrm{i}\hbar\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int \mathrm{d}^3 k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}$$

这中间已应用 δ 函数的积分表达式。输入真实性条件 $D^+(\boldsymbol{r}) = D(\boldsymbol{r})$，可写出

$$\int \mathrm{d}^3 k\int \mathrm{d}^3 k' \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}-\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'}[A(\boldsymbol{k}), D^+(\boldsymbol{k}')] = -\mathrm{i}\hbar\int \mathrm{d}^3 k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}$$

于是，可导出

$$[A(\boldsymbol{k}), D^+\boldsymbol{k}'] = -\mathrm{i}\hbar\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$$

式(5.6.11)的真实性条件满足下列表达式。

$$A(\boldsymbol{k}) = \alpha\sqrt{\frac{\hbar}{2}}[a(\boldsymbol{k}) + a^+(-\boldsymbol{k})] \tag{5.6.13a}$$

$$A^{+}(\boldsymbol{k}) = \alpha\sqrt{\frac{\hbar}{2}}[a^{+}(\boldsymbol{k}) + a(-\boldsymbol{k})] \tag{5.6.13b}$$

$$D(\boldsymbol{k}) = \frac{\mathrm{i}}{\alpha}\sqrt{\frac{\hbar}{2}}[a(\boldsymbol{k}) - a^{+}(-\boldsymbol{k})] \tag{5.6.13c}$$

$$D^{+}(\boldsymbol{k}) = \frac{-\mathrm{i}}{\alpha}\sqrt{\frac{\hbar}{2}}[a^{+}(\boldsymbol{k}) - a(-\boldsymbol{k})] \tag{5.6.13d}$$

用 $A(\boldsymbol{k})$和 $D(\boldsymbol{k})$表示,有

$$a^{+}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left[\frac{1}{\alpha}A^{+}(\boldsymbol{k}) + \mathrm{i}\alpha D^{+}(\boldsymbol{k})\right] \tag{5.6.14a}$$

$$a(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left[\frac{1}{\alpha}A(\boldsymbol{k}) - \mathrm{i}\alpha D(\boldsymbol{k})\right] \tag{5.6.14b}$$

$$a^{+}(-\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left[\frac{1}{\alpha}A^{+}(-\boldsymbol{k}) + \mathrm{i}\alpha D^{+}(-\boldsymbol{k})\right] \tag{5.6.14c}$$

$$a(-\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left[\frac{1}{\alpha}A(-\boldsymbol{k}) - \mathrm{i}\alpha D(-\boldsymbol{k})\right] \tag{5.6.14d}$$

如在后面的研究中所表明的,$a(\boldsymbol{k})$是一个零化算子,$a^{+}(\boldsymbol{k})$是一个建立算子。在能量特征态 $a(\boldsymbol{k})$的运算中,使波矢量 $\boldsymbol{k}$ 和极化 $\boldsymbol{D}$ 消失了一个光子。反之,$a^{+}(\boldsymbol{k})$建立了一个这样的光子。

哈密顿算子$\mathbf{V}$可表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= \frac{1}{2(2\pi)^3}\iiint \mathrm{d}^3r\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}'\left\{\frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{k}')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}}\right.\\ &\quad\left.-\frac{1}{\mu_0}[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})]\cdot[\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}')]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}}\right\}\\ &= \frac{1}{2}\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\left\{\frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{D}^{+}(\boldsymbol{k}) + \frac{k^2}{\mu_0}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{A}^{+}(\boldsymbol{k})\right\}\end{aligned}$$

现在把注意力集中于带有预定 $\boldsymbol{k}$ 矢量的特殊光子。算子 $\boldsymbol{a}$ 和$\boldsymbol{a}^{+}$具有与 $\boldsymbol{D}$ 相同的方向,且垂直于 $\boldsymbol{k}$。用 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{k})$和 $\boldsymbol{a}^{+}(\boldsymbol{k})$表示,哈密顿算子变为

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= \frac{\hbar}{4}\int\mathrm{d}^3k\left\{\frac{1}{\varepsilon_0|\alpha|^2}[a_i^{+}(\boldsymbol{k}) - a_i(-\boldsymbol{k})][a_i(\boldsymbol{k}) - a_i^{+}(-\boldsymbol{k})]\right.\\ &\quad\left.+\frac{k^2|\alpha|^2}{\mu_0}[a_i^{+}(\boldsymbol{k}) + a_i(-\boldsymbol{k})][a_i(\boldsymbol{k}) + a_i^{+}(-\boldsymbol{k})]\right\}\\ &= \frac{\hbar}{4}\int\mathrm{d}^3k\left\{\left(\frac{1}{\varepsilon_0|\alpha|^2} + \frac{k^2|\alpha|^2}{\mu_0}\right)[a_i^{+}(\boldsymbol{k})a_i(\boldsymbol{k}) + a_i(-\boldsymbol{k})a_i^{+}(-\boldsymbol{k})]\right\}\\ &\quad+\left(\frac{-1}{\varepsilon_0|\alpha|^2} + \frac{k^2|\alpha|^2}{\mu_0}\right)[a_i(-\boldsymbol{k})a_i(\boldsymbol{k}) + a_i^{+}(\boldsymbol{k})a_i^{+}(-\boldsymbol{k})]\Big\}\\ &= \frac{1}{2}\int\mathrm{d}^3k\hbar kc[a_i(\boldsymbol{k})a_i^{+}(\boldsymbol{k}) + a_i^{+}(\boldsymbol{k})a_i(\boldsymbol{k})]\end{aligned} \tag{5.6.15}$$

其中,需要关系式 $k^2|\alpha|^2/\mu_0 = 1/\varepsilon_0|\alpha|^2$,以获得$|\alpha|^2 = \sqrt{\mu_0/k^2\varepsilon_0} = \eta/k$。用 $a(\boldsymbol{k})$和 $\alpha^{+}(\boldsymbol{k}')$表示,转换关系式(5.6.12)变为

$$\begin{aligned}[\alpha(\boldsymbol{k}),\alpha^{+}(\boldsymbol{k}')] &= \frac{1}{2\hbar}\left\{\left[\frac{1}{\alpha}A(\boldsymbol{k}) - \mathrm{i}\alpha D(\boldsymbol{k})\right],\left[\frac{1}{\alpha}A^{+}(\boldsymbol{k}) + \mathrm{i}\alpha\boldsymbol{D}^{+}(\boldsymbol{k})\right]\right\}\\ &= \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')\end{aligned} \tag{5.6.16}$$

例5.6.3 a 和 a^+ 的转换关系也可直接从式(5.6.6)导出，将式(5.6.10)和(5.6.13)代入转换关系可得出

$$\mathrm{i}\frac{\hbar}{2}\left\{\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}[a_i^+(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+a_i(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}}],\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}'[a_j^+(\boldsymbol{k}')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'}-a_j(\boldsymbol{k}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'}]\right\}$$
$$=-\mathrm{i}\hbar\delta_{ij}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

于是导出

$$[a_i(\boldsymbol{k}),a_j^+(\boldsymbol{k}')]=\delta_{ij}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$$

对于 $i=j,\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}'$ 的情况，上式可简写为

$$[a,a^+]=1 \tag{5.6.17}$$

对带有特殊 $\boldsymbol{k}$ 矢量的光子，其哈密顿矢量变为

$$\nabla=\frac{\hbar kc}{2}(a^+a+a^+a)=\hbar\omega\left(a^+a+\frac{1}{2}\right) \tag{5.6.18}$$

其中，已利用了转换式(5.6.17)和真空的色散关系 $\omega=kc$。欲获得能量算子∇的特征值和特征矢量，可写出

$$\nabla|\varepsilon>=\varepsilon|\varepsilon> \tag{5.6.19}$$

式中 $|\varepsilon>$ 表示特征态，ε 是相应的特征值。首先要证明特征值通常是非负的。用特征行矩阵 $<\varepsilon|$ 标量乘以式(5.6.19)，并应用式(5.6.18)，则有

$$\hbar\omega<\varepsilon|a^+a+\frac{1}{2}|\varepsilon>=\varepsilon<\varepsilon|\varepsilon>$$

式中的标量 $<\varepsilon|\varepsilon>$ 总是非负的，因为它是一个列矩阵 $|\varepsilon>$ 与它的复数共轭再转置的矩阵 $<\varepsilon|$ 的乘积。因同样的理由 $<\varepsilon|a^+a|\varepsilon>$ 项也是非负的。注意，$<\varepsilon|a^+$ 是 $a|\varepsilon>$ 的复数共轭和转置。结果，特征值 ε 必然是非负的。

下一步要证明，若 $|\varepsilon>$ 是∇的一个特征态，则 $a|\varepsilon>$ 和 $a^+|\varepsilon>$ 也是。试考虑 $\nabla(a^+|\varepsilon>)$。应用转换关系(5.6.17)，可求得

$$[\nabla,a^+]=\hbar\omega[a^+a,a^+]=\hbar\omega a^+$$

因此

$$\nabla a^+|\varepsilon>=a^+\nabla|\varepsilon>+\hbar\omega a^+|\varepsilon>=(\varepsilon+\hbar\omega)a^+|\varepsilon> \tag{5.6.20}$$

可见，$a^+|\varepsilon>$ 就是带有能量 $(\varepsilon+\hbar\omega)$ 的哈密顿算子的特征态。无论何时，a^+ 总是用于带有能量 ε 的∇的特征态，使状态改变为另一个带有能量 $(\varepsilon+\hbar\omega)$ 的特征态。因为这个算子的最后效果是多建立一个能量为 $\hbar\omega$ 的光子，故称 a^+ 为建立算子。

由同样的理由，可证明

$$\nabla a|\varepsilon>=(\varepsilon-\hbar\omega)a|\varepsilon> \tag{5.6.21}$$

当把 a 用于特征态 $|\varepsilon>$ 时，其结果是消掉一个光子的另一特征态 $|\varepsilon-\hbar\omega|>$。因此，称算子 a 为零化或湮灭算子。

两个能级间的间隔是 $\hbar\omega$。当用 a 运算时，跃迁是向下的；当用 a^+ 运算时，此跃迁是向上的。连续应用 a^+ 直至以列矩阵 $|0>$ 表示的基本状态，就能建立整个能量谱，列矩阵 $|0>$ 中的0表示此状态没有光子。在 $|0>$ 状态时运行 a^+ n 次，就建立有 n 个光子的状态 $|n>$。

上面已证明，∇的全部能量状态都具有非负的特征值。假设对状态 $|\varepsilon>$ 应用 n 次零化算

子 a,并达到基本状态 $|0>$。再对 $|0>$ 运行 a 将为零,即

$$a\,|\,0>=0$$

现在求基本状态的能量,它应为

$$\varepsilon_0=\frac{<0\,|\,\mathbf{V}\,|\,0>}{<0\,|\,0>}=\frac{\frac{1}{2}\hbar\omega<0\,|\left(a^{+}a+\frac{1}{2}\right)|\,0>}{<0\,|\,0>}=\frac{1}{2}\hbar\omega \tag{5.6.22}$$

因为

$$\mathbf{V}\,|\,n>=\hbar\omega\left(a^{+}a+\frac{1}{2}\right)|\,n>=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)|\,n>$$

与 $|n>$ 相联系的能量特征值是 $(n+1/2)\hbar\omega$。

能量特征态 $|n>$ 可以用一个列矩阵表示,该矩阵中除了第 $(n+1)$ 个元素等于单位值之外,其余的元素均等于零。例如,

$$|\,0>=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\\vdots\end{bmatrix}\quad |\,1>=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\\vdots\end{bmatrix}\quad |\,2>=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\\vdots\end{bmatrix}$$

哈密顿算子可以用对角线矩阵代表

$$\mathbf{V}=\hbar\omega\begin{bmatrix}1/2 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 3/2 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 5/2 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix} \tag{5.6.23}$$

$\mathbf{V}$ 的特征态,也是数量算子 $N=a^{+}a$ 的特征态

$$N\,|\,n>=n\,|\,n> \tag{5.6.24}$$

与特殊的状态 N 相关联的特征值等于该状态时的光子数。

现在来求用矩阵表示的 a 和 a^{+} 的显式表示式,先写出

$$a\,|\,n>=C_n\,|\,n-1> \tag{5.6.25}$$

系数 C_n 由归一化确定。要求使特征态的行矩阵和列矩阵的标量积为单位值。因此有

$$n=<n\,|\,a^{+}a\,|\,n>=|\,C_n\,|^2$$

于是,

$$a\,|\,n>=\sqrt{n}\,|\,n-1> \tag{5.6.26}$$

注意到 a 的矩阵元素可由式(5.6.26)获得

$$<n-1\,|\,a\,|\,n>=\sqrt{n} \tag{5.6.27}$$

其中的非零元素在第 $(n-1)$ 行和第 n 列,其他的元素均为 0

$$a=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix} \tag{5.6.28}$$

按同样的理由,设 $a^{+}|n>=C'_n|n+1>$,可得

$$|\,C'_n\,|^2=<n\,|\,aa^{+}\,|\,n>=<n\,|\,a^{+}a+1\,|\,n>=n+1$$

因此，

$$a^+|n> = \sqrt{n+1}\,|n+1> \tag{5.6.29}$$

构成乘积

$$<n+1|a^+|n> = \sqrt{n+1} \tag{5.6.30}$$

可见 a^+ 的矩阵表示式取如下形式

$$a^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{5.6.31}$$

显然，a^+ 的矩阵表示式是 a 的转置。a^+ 随时间的演化与考虑 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 时一样，服从海森伯格运动方程。由矩阵相乘可见，在 $|n>$ 状态运算 a 时，将使第 n 位置上的元素移至 $(n+1)$ 位置，并形成 $\sqrt{n}$ 与 $|n-1>$ 相乘的状态。同样，在 $|n-1>$ 上运算 a^+ 将形成 $\sqrt{n}$ 与 $|n>$ 相乘的状态。在 $|n>$ 上运算 a^+a 将形成同样的状态，并给出光子数 n。

上面讨论了哈密顿算子 $\mathbf{V}$ 的能量特征态和与这相关联的特征值，并看到零化算子 a 和建立算子 a^+ 运行于特征态时会有什么结果。自然，会有人问“对零化和建立算子来说，特征态和特征值是什么”？首先要证明的是 a^+ 没有非零的特征态。把 a^+ 的特征态表示为 $|e>$ 并设特征值为 λ。考虑到式(5.6.31)，有

$$\lambda\begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e_0 \\ \sqrt{2}e_1 \\ \sqrt{3}e_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

可见，如果 $\lambda=0$，则 $e_0=e_1=e_2=\cdots=0$ 和 $|e>=|0>$。如果 $\lambda\neq0$，则 $e_0=0, e_1=(1/\lambda)e_0=0,\cdots,e_n=(1/\lambda)\sqrt{n}e_{n-1}=0,\cdots$，同时特征态全为零。

可以用同样的步骤求 a 的特征态。考虑到式(5.6.28)，可写出

$$\lambda\begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ \sqrt{2}e_2 \\ \sqrt{3}e_3 \\ \sqrt{4}e_4 \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{5.6.32}$$

可见 $e_1=\lambda e_0, e_2=(\lambda/\sqrt{2})e_1,\cdots,e_n=(\lambda/\sqrt{n})e_{n-1},\cdots$，可通过能量特征态得到

$$|e> = e_0\left[|0>+\lambda|1>+\frac{\lambda^2}{\sqrt{2!}}|2>+\cdots+\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}|n>+\cdots\right] \tag{5.6.33}$$

加上归一化条件 $<e|e>=1$，得出

$$|e_0|^2\left[1+\lambda^2+\frac{\lambda^4}{2!}+\cdots+\frac{\lambda^{2n}}{n!}+\cdots\right] = 1 \tag{5.6.34}$$

于是，$e_0=\exp(-\lambda^2/2)$，式(5.6.33)变为

$$| e > = \mathrm{e}^{-\lambda^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} = n > \tag{5.6.35}$$

应注意,光子的数量算子 a^+a 的期望值由下式决定

$$\bar{n} = < e | a^+ a | e > = \mathrm{e}^{-\lambda^2}\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{\lambda^{2n}}{n!} = \lambda^2 \tag{5.6.36}$$

因而,特征值 λ 等于光子数期望值的平方根。式(5.6.35)变为

$$| e > = \mathrm{e}^{-\bar{n}/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{n}^{n/2}}{\sqrt{n!}} | n > \tag{5.6.37}$$

上式代表零化算子 a 的特征态。也称它为相干态。寻求平均光子数 n 的概率为

$$|< n | e >|^2 = \frac{\bar{n}^n \mathrm{e}^{-\bar{n}}}{n!} \tag{5.6.38}$$

这就是泊松分布。可以看出,在能量状态的表示式中给出了精确的光子数,而在相干态的表示式中,光子数服从泊松概率分布。

5.6.3 双各向异性介质中波的量子化

借助于零化算子 a 和建立算子 a^+,我们已对真空中电磁场的哈密顿算子实现了对角线化,已经从能态的意义上讨论了被量子化的场。现在需要概括这个过程,以实现双各向异性介质中波的量子化。用于 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的转换关系与式(5.6.1)中已假定的一样。电波场其他算子的转换关系可应用本构关系由式(5.6.1)导出。现引入下列零化和建立算子

$$A_j(\boldsymbol{k}) = \alpha_j\sqrt{\frac{\hbar}{2}}[a_j(\boldsymbol{k}) + a_j^+(-\boldsymbol{k})] \tag{5.6.39a}$$

$$D_j(\boldsymbol{k}) = \frac{\mathrm{i}}{\alpha_j}\sqrt{\frac{\hbar}{2}}[a_j(\boldsymbol{k}) - a_j^+(-\boldsymbol{k})] \tag{5.6.39b}$$

式中 α_j 是待定常数。由真实性条件式(5.6.11)来看,必须要有 $\alpha_j(-\boldsymbol{k}) = \alpha_j^*(\boldsymbol{k})$。将式(5.6.39)代入式(5.6.6)可以得知,α 和 α^+ 的转换关系全同于式(5.6.16)和(5.6.17)。我们将通过适当选择 α_j,并应用 α 和 α^+ 实现对哈密顿算子的对角线化。

作为双各向异性介质的一个例子,我们考虑单轴介质沿其光轴方向运动的情况。设光轴沿 $\hat{z}$ 方向(见第7章)。在 kDB 系统中,$D_3 = B_3 = 0$,本构关系为

$$\boldsymbol{\kappa}_k = \begin{bmatrix} \kappa & 0 & 0 \\ 0 & \kappa\cos^2\theta + \kappa_z\sin^2\theta & (\kappa - \kappa_z)\sin\theta\cos\theta \\ 0 & (\kappa - \kappa_z)\sin\theta\cos\theta & \kappa\sin^2\theta + \kappa_z\cos^2\theta \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\nu}_k = \begin{bmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & v\cos^2\theta + v_z\sin^2\theta & (v - v_z)\sin\theta\cos\theta \\ 0 & (v - v_z)\sin\theta\cos\theta & v\sin^2\theta + v_z\cos^2\theta \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\chi}_k = \boldsymbol{\nu}_k^+ = \begin{bmatrix} 0 & \chi\cos\theta & \chi\sin\theta \\ -\chi\cos\theta & 0 & 0 \\ -\chi\sin\theta & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

哈密顿算子变为

$$\boldsymbol{\nabla} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}[\boldsymbol{D}^+(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}) + \boldsymbol{B}^+(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k})]$$

$$= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\{[\kappa D_1^+(\boldsymbol{k})D_1(\boldsymbol{k}) + (\kappa\cos^2\theta + \kappa_z\sin^2\theta)D_2^+(\boldsymbol{k})D_2(\boldsymbol{k}) + k^2\nu A_2^+(\boldsymbol{k})A_2(\boldsymbol{k}) + \boldsymbol{\kappa}^2(\nu\cos^2\theta + \nu_z\sin^2\theta)A_1^+(\boldsymbol{k})A_1(\boldsymbol{k})] - \mathrm{i}k\chi\cos\theta[D_1^+(\boldsymbol{k})A_1(\boldsymbol{k}) - A_1^+(\boldsymbol{k})D_1(\boldsymbol{k}) + D_2^+(\boldsymbol{k})A_2(\boldsymbol{k}) - A_2^+(\boldsymbol{k})D_2(\boldsymbol{k})]\} \quad (5.6.40)$$

式中 θ 是 $\boldsymbol{k}$ 矢量与 z 轴的夹角。欲用零化和建立算子表示哈密顿算子,应注意

$$\int \mathrm{d}^3k\, k[D_j^+(\boldsymbol{k})A_j(\boldsymbol{k}) - A_j^+(\boldsymbol{k})D_j(\boldsymbol{k})] = -\mathrm{i}\hbar\int \mathrm{d}^3k\, k[a_j(\boldsymbol{k})a_j^+(\boldsymbol{k}) + a_j^+(\boldsymbol{k})a_j(\boldsymbol{k})]$$

将式(5.6.39)代入式(5.6.40),可得

$$\mathbf{V} = \frac{\hbar}{4}\int \mathrm{d}^3k\Big\{\Big[\frac{\kappa}{\alpha_1^2} + k^2\alpha_1^2(\nu\cos^2\theta + \nu_z\sin^2\theta) - 2k\chi\cos\theta\Big]\cdot [\alpha_1(\boldsymbol{k})\alpha_1^+(\boldsymbol{k}) + \alpha_1^+(\boldsymbol{k})\alpha_1(\boldsymbol{k})] + \Big[\frac{1}{\alpha_2^2}(\kappa\cos^2\theta + \kappa_z\sin^2\theta) + \kappa^2\alpha_2^2 - 2k\chi\cos\theta\Big][\alpha_2(\boldsymbol{k})\alpha_2^+(\boldsymbol{k}) + \alpha_2^+(\boldsymbol{k})\alpha_2(\boldsymbol{k})] + \Big[k^2\alpha_1^2(\nu\cos^2\theta + \nu_z\sin^2\theta) - \frac{\kappa}{\alpha_1^2}\Big][\alpha_1(-\boldsymbol{k})\alpha_1(\boldsymbol{k}) + \alpha_1^+(\boldsymbol{k})\alpha_1^+(-\boldsymbol{k})] + \Big[k^2\nu\alpha_2^2 - \frac{1}{\alpha_2^2}(\kappa\cos^2\theta + \kappa_z\sin^2\theta)\Big]\cdot [\alpha_2(-\boldsymbol{k})\alpha_2(\boldsymbol{k}) + \alpha_2^+(\boldsymbol{k})\alpha_2^+(-\boldsymbol{k})]\Big\} \quad (5.6.41)$$

可见,如选用下式所示关系,可使上式最后两项变为零

$$\alpha_1^4 = \frac{\kappa}{k^2(\nu\cos^2\theta + \nu_z\sin^2\theta)} \quad (5.6.42a)$$

$$\alpha_2^4 = \frac{(\kappa\cos^2\theta + \kappa_z\sin^2\theta)}{k^2\nu} \quad (5.6.42b)$$

这时,哈密顿算子$\mathbf{V}$已经对角线化。可以把它看成是两个哈密顿算子的和,每一个都对应于运动介质中的一个特征波:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_m + \mathbf{V}_e \quad (5.6.43a)$$

$$\mathbf{V}_m = \frac{\hbar}{2}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\Big(\frac{\kappa}{\alpha_1^2} + k\chi\cos\theta\Big)[a_1(\boldsymbol{k})a_1^+(\boldsymbol{k}) + a_1^+(\boldsymbol{k})a_1(\boldsymbol{k})] \quad (5.6.43b)$$

$$\mathbf{V}_e = \frac{\hbar}{2}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\Big[\Big(\frac{\kappa\cos^2\theta + \kappa_z\sin^2\theta)}{\alpha_2^2} + k\chi\cos\theta\Big][a_2(\boldsymbol{k})a_2^+(\boldsymbol{k}) + a_2^+(\boldsymbol{k})a_2(\boldsymbol{k})] \quad (5.6.43c)$$

在稳态单轴电介质介质的情况下,$\chi = 0$。由上式可见,与$\mathbf{V}_m$相关的光子是寻常光子,与$\mathbf{V}_e$相关的是非常光子。式(5.6.43)中的哈密顿算子可以由数量算子表示。当哈密顿算子在能量状态运算时,其结果是状态中总的光子能量。对应于$\mathbf{V}_m$和$\mathbf{V}_e$两种的光子能量如下。

$$E_m = \hbar\Big(\frac{\kappa}{\alpha_1^2} + \kappa\chi\cos\theta\Big) \quad (5.6.44a)$$

$$E_e = \hbar\Big[\frac{(\kappa\cos^2\theta + \kappa_z\sin^2\theta)}{\alpha_2^2} + k\chi\cos\theta\Big] \quad (5.6.44b)$$

当介质的速度足够高时,光子能量可能为负。它们与运动介质中经典的慢波相对应,后者也可能具有负能量,而且是纯粹的运动作用,发生在从运动状态向稳定状态转换时。

通常,具有确定波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的光子能量等于 $\hbar$ 乘以角频率 ω。经典情况下,因色散关系,角

频率与矢量 $\boldsymbol{k}$ 有关。利用 kDB 系统将有利于色散关系的推导。由于每个特征波有它自己特殊的色散关系，我们预期在实现量子化之后，每个特征波都将有一个相应的光子。

习题

5.6.1 一简单的干涉仪示于图 5.6-1。光源的光线被半透明的镜子分离为两个波束。半透明镜子的特性是人射电场的 $e^{i\phi_t}/\sqrt{2}$(倍)被透射，人射场的 $e^{i\phi_r}/\sqrt{2}$(倍)被反射，其中，$\phi_t-\phi_r=\pi/2+l\pi$。在第 3 章习题 3.2.5 中已经用稳态时谐场分析了干涉仪。已经证明，在光检波器中，场发生干涉。

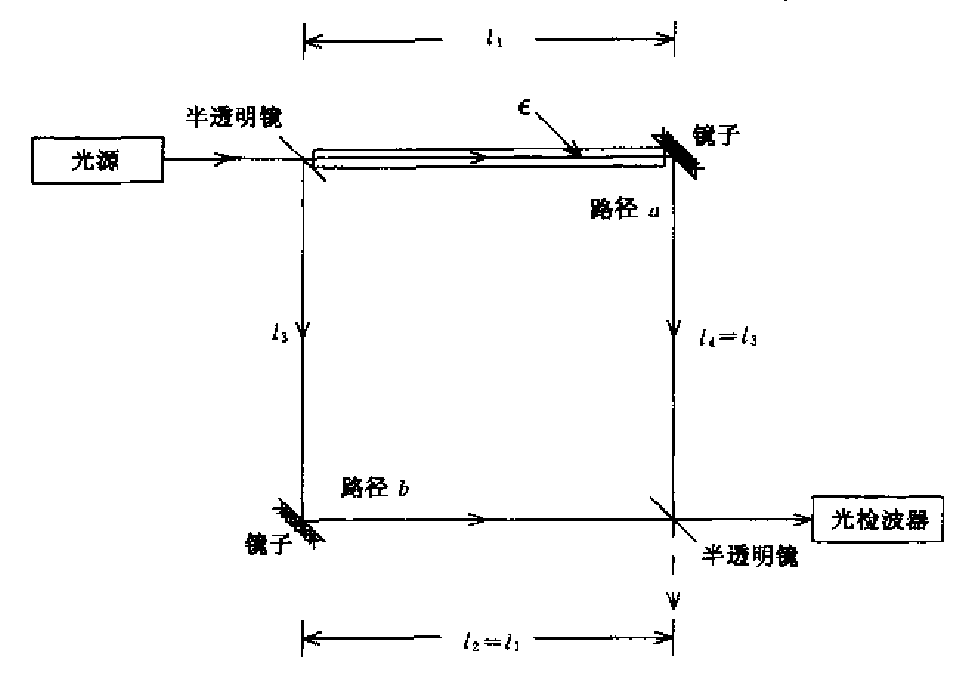


图 5.6-1 简单的干涉仪

现考虑单个光子入射于此系统的情况。对半透明镜定义一个酉算子如下：

$$U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & i\\ i & 1\end{bmatrix}$$

干涉测量的路由以路径 a 和 b 标出。

①设有一个光子从路径 a 人射，没有光子从路径 b 人射的状态以 $|10>=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 表示。试求光子在穿越过半透明镜子后的状态。

②设介质填充路径 l_1 使光子得到一相位项 $e^{i\phi}$，并定义一个酉算子

$$U_p=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{i\phi}\end{bmatrix}$$

试求在穿过反射镜后的光子状态。

③试求第二面半透明镜后光子的最终状态。当 $\phi=0$ 时光子将在何处？

5.6.2 对给定的能态 $|n>$，电磁场算子 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{D}^2$ 的期望值各是什么？

5.6.3 设 A，B 和 C 均为 Hermite 算子，且 $[A,B]=iC$。又设

$$\alpha=A-\langle A\rangle;\qquad \beta=B-\langle B\rangle$$
$$\alpha|\psi>=|\phi>;\qquad \beta|\psi>=|\chi>$$
$$(\Delta A)^2=<\phi|\phi>;\qquad (\Delta B)^2=<\chi|\chi>$$

相对于状态函数 $|\psi>$，定义

$$(\Delta A)^2=<\psi|(A-\langle A\rangle)^2|\psi> \text{ 和 } (\Delta B)^2=<\psi|(B-\langle B\rangle)^2|\psi>$$

为均方偏差。其中 $\langle A\rangle=<\psi|A|\psi>$ 和 $\langle B\rangle=<\psi|B|\psi>$ 是 A 和 B 的期望值。试由施瓦茨(Schwartz)不等式

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2 = <\phi\mid\phi><\chi\mid\chi> \geqslant \mid<\phi\mid\chi>\mid^2$$

证明

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geqslant \frac{1}{4}\mid<\psi\mid C\mid\psi>\mid^2$$

设 $C=\hbar$，试求 A 和 B 的转换关系所隐含的测不准值 $\Delta A\Delta B$。

5.6.4　相干态为

$$\mid e> = \mathrm{e}^{-\lambda^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\mid n>$$

试计算 $(\Delta A)^2 = <e\mid A^2\mid e> - \langle A\rangle^2$ 和 $(\Delta D)^2 = <e\mid D^2\mid e> - \langle D\rangle^2$。测不准原理给出测不准值 $(\Delta A)^2(\Delta D)^2 \geqslant \frac{\hbar}{4}$。试证明相干态是具有 $(\Delta A)\cdot(\Delta D)=\hbar/2$ 的最小测不准状态。

5.6.5　试求 $a+a^+$ 和 $a-a^+$ 的特征值和特征矢量。

5.6.6　给定 $[a+a^+]=1$，试计算，$[a,(a^+)^n]$ 和 $[a,e^{a+}]$。

5.6.7　时谐振荡器的哈密顿算子由下式给出

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2x^2)$$

定义 $a=(m\omega x+\mathrm{i}p)/\sqrt{2m\hbar\omega}$，$a^+=(m\omega x-\mathrm{i}p)/\sqrt{2m\hbar\omega}$。又给定 $[x,p]=\mathrm{i}\hbar$，那么，对 a 和 a^+，哈密顿算子和转换关系是什么？试利用哈密顿算子的能态，证明 $(\Delta p)^2=\frac{m\hbar\omega}{2}(2n+1)$ 和 $(\Delta x)^2=\frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1)^2$。

5.6.8　试证明由海森伯格图变换为薛定谔图的酉变换受如下微分方程约束

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \mathbf{V}_s U$$

式中，$\mathbf{V}_s$ 是薛定谔图中的海森伯格算子。

5.6.9　薛定谔方程为

$$\mathrm{i}\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mid\psi_s> = \mu_s\mid\psi_s>$$

将薛定谔图中的哈密顿算子写为

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{V}_{os} + \mathbf{V}_{is}$$

式中 $\mathbf{V}_{os}$ 是与时间无关的，而 $\mathbf{V}_{is}$ 被称为互作用哈密顿算子。用酉变换 V 变换到互作用图，就是使 $\mathbf{V}_{ii} = V\mathbf{V}_{is}V^+$，以及

$$\mathrm{i}h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mid\psi_i> = \mathbf{V}_{ii}\mid\psi_i>$$

其中，$\mathbf{V}_{ii}$ 是互作用图中的互作用哈密顿算子。试证明此微分方程相当于下述积分方程：

$$\mid\psi_i(t)> = \mid\psi_i(0) + \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_0^t\mathrm{d}\tau'\,\mathbf{V}_{ii}(\tau)\mid\psi_i(\tau)>$$

对一阶微扰，$\mid\psi_i(t)>$ 以 $\mid\psi_i(0)>$ 近似。因此

$$\mid\psi_i(t)> = 1 + \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_0^t\mathrm{d}\tau\,\mathbf{V}_{ii}(\tau)\mid\psi_i(0)>$$

对二阶微扰，将此解代入积分方程，可得

$$\mid\psi_i(t)> = \left\{1 + \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_0^t\mathrm{d}\tau\,\mathbf{V}_{ii}(\tau)\left[1 + \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_0^t\mathrm{d}\tau'\,\mathbf{V}_{ii}(\tau')\right]\right\}\mid\psi_i(0)>$$

此过程可继续进行。从 $\mid\psi_i(0)>$ 状态至 $\mid\psi_i(t)>$ 状态的跃迁，受散射算子 S 的支配，$\mid\psi_i(t)>\mid = S\mid\psi_i(0)>$。试证明在一阶微扰理论下，初始态 $\mid E_i>$ 与最终态 $\mid E_f>$ 之间的跃迁幅度为

$$\begin{aligned}S_{fi} &= <E_f\mid S\mid E_i> \\ &= 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_f-E_i)t/2\hbar}<E_f\mid\mathbf{V}_{ii}\mid E_i>\frac{\sin[(E_f-E_i)t/2\hbar]}{E_f-E_i}\end{aligned}$$

其中，$\mid E_f>$ 和 $\mid E_i>$ 是未微扰哈密顿算子 $\mathbf{V}_{os}$ 的能量特征矢量。

5.6.10 如$[a,a^+]=1$，试证明 $e^{xa}e^{xa^+}=e^{xa^+}e^{xa}e^{x^2}$。

5.6.11 在不同的时空点上，场矢量的转换关系是什么？解释这些关系，并使用它从假设的哈密顿算子推导麦克斯韦方程组。

5.6.12 根据镜像定理，导电平面上的垂直单极天线等效于移去此导体时的偶极子。在无线电广播电台，地面被用作为导电平面。试计算导电平面上单极子的功率和增益。

部分习题答案

5.1.1

$Z_{11}=Z_{22}^*,\quad Z_{12}=-Z_{12}^*,\quad Z_{21}=-Z_{21}^*$。

5.1.5

$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\mathrm{i}\omega\epsilon 2E_0\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}(\hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\phi\cos\theta-\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\phi)\dfrac{4}{k_xk_y}\sin(k_x\dfrac{x_0}{2})\sin(k_y\dfrac{y_0}{2})$。其中，

$k_x=k\sin\theta\cos\phi;\qquad k_y=k\sin\theta\sin\phi$。

5.1.6

a 和 b 比波长小时，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=-E_0\omega\epsilon a\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}k(b^2-a^2)\pi\sin\theta-\hat{\phi}$。

5.1.7

在后向散射方向，$\theta_0=0$ 上 $\boldsymbol{E}_s=-\hat{\boldsymbol{y}}\dfrac{E_0a}{2r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr-2\mathrm{i}ka}$；$A_e=\lim\limits_{r\to\infty}(4\pi r^2\dfrac{P_s}{P_i})=\pi a^2$。

5.1.8

$Z_a=\dfrac{\eta^2}{4Z_m}=\dfrac{(377)^2}{4(73)}\Omega=486\,\Omega$。

5.1.9

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\mathrm{i}k\cos\theta\hat{\boldsymbol{y}}2E_0\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}b\dfrac{2\dfrac{\pi}{d}\cos k_x\dfrac{d}{2}}{(\dfrac{\pi^2}{d^2}-k_x^2)}$。

5.1.13

$\sin(kxw/2z)$的第一个零点出现于 $kxw/2z=\pi$，由此得出 $2\pi w\theta/2\lambda=\pi$，因此 $\theta=\lambda/w$。

对第 N 个旁瓣 $kxw/2z=kw\theta/2=N\pi$，由此得出 $\theta_N=N\lambda/w$。基于 $\theta\approx x/z<1$ 的假设，因此得出 $N<\lambda/w$。

5.1.14

设信号处理时辐射天线照射的地面尺寸是 L。从天线至地面的距离是 R。小天线的波束宽度是 λ/l。已有 $L=R\lambda/l$。因为尺寸为 L 的合成天线的波束宽度为 λ/L，因此，地面的分辨率是 $R\lambda/L=R\lambda/(R\lambda/l)=l$。为了达到大距离 R 时的分辨率，必须有大的 L。这将要求有一个与 l 成反比的、很强的处理能力。

5.2.1

(1)双轴介质是无损耗和互易的。

(2)运动的双轴介质是无损耗和非互易的，其互补介质是在反方向上运动的介质。

(3)手征介质是无损耗和可互易的。

(4)具有实数 χ 的双各向同性介质是有损耗和互易的。

(5)铁氧体在直流磁场中是非互易的，其互补介质是在具有反向直流磁场中的介质。

5.2.3

$k^2=\dfrac{\iiint \mathrm{d}V(\nabla\times\boldsymbol{H})^2}{\iiint \mathrm{d}V|\boldsymbol{H}|^2}$ 及 $Aa=-0.65432929$，$k^2a^2=\dfrac{2+4Aa+\dfrac{9}{4}A^2a^2}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{5}Aa+\dfrac{1}{6}A^2a^2}=5.80305$。

5.2.4

$\omega_c^2 = \dfrac{2\pi^2}{a^2\mu(\epsilon_1+\epsilon_2)}$。

5.2.5

$A_r = 0.86\lambda^2$。

5.2.6

变化百分比 $\dfrac{\Delta\omega_r}{\omega_{r0}} = \dfrac{\sqrt{0.410}-1.0}{1.0} = -0.360 = -36\%$。谐振频率低 36%。

5.3.2

$V(t) \simeq -2\cos\omega t$。

5.3.3

①由单位面积面电流产生的单位面积的时间平均功率是 $\langle P_g\rangle = -\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\{E_{x|_{z=0}}J_s^*\} = \dfrac{\eta}{4}|J_s|^2$。

$z>0$ 处平面波所带有的单位面积的时间平均功率是 $\langle S_{z+}\rangle = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\} = \dfrac{\eta}{8}|J_s|^2$。

$z<0$ 处的平面波带有相同的数量。因此，面电流所产生的功率等于两平面波所带有的总辐射功率。

②产生了凋落波。电流比不产生每单位面积上的时间平均功率。

5.4.1

$$\frac{E(\rho)}{E(0)} = \sqrt{\frac{P(\rho)}{P(0)}} = \frac{1}{n-1}\sqrt{\frac{(n\cos\theta-1)^3}{n-\cos\theta}}。$$

5.4.2

$$\theta_0 \approx 66^\circ$$

5.6.1

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & i\\ i & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}$。

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{i\phi}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ ie^{i\phi}\end{bmatrix}$

(3) $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & i\\ i & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ ie^{i\phi}\end{bmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1-e^{i\phi}\\ i+ie^{i\phi}\end{bmatrix} = ie^{i\phi/2}\begin{bmatrix}-\sin\phi/2\\ \cos\phi/2\end{bmatrix}$。

当 $\phi=0$ 时，光子通过路径 b 到达光检波器。

5.6.2

$< n\,|\,D(\boldsymbol{k})\,|\,n > = \dfrac{i}{\alpha}\sqrt{\dfrac{\hbar}{2}}(< n\,|\,a(\boldsymbol{k})\,|\,n > - < n\,|\,a^+(-\boldsymbol{k})\,|\,n >) = 0$。

$< n\,|\,D^2(\boldsymbol{k})\,|\,n > = \dfrac{\hbar k}{2\eta} < n\,|\,a^+a + aa^+\,|\,n > \dfrac{\hbar k}{2\eta}(2n+1)$。

5.6.3　测不准关系 $\Delta A\Delta B \geqslant \hbar/2$。

5.6.6

$[a,(a^+)^n] = n(a^+)^{n-1}$，　　$[a,e^{a+}] = e^{a^+}$。

5.6.12

$P_r = 20I_0^2$，　　$G(\theta) = 3\sin^2\theta$。

第6章 散 射

6.1 球形粒子的散射

6.1.1 瑞利(Rayleigh)散射

瑞利(Rayleigh)散射描述了尺寸远小于波长的粒子对电磁波的散射。考察一个球形粒子，介电常数 ϵ_s，磁导率 μ_s，半径 a，位于坐标系原点(见图6.1-1)。一个 $\hat{z}$ 方向极化的平面波入射到粒子上，$\boldsymbol{E}=\hat{z}E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$。由于粒子很小，散射场基本上可以看成是由点源散射产生的。$\hat{z}$ 方向的电场在粒子上感应出偶极矩，因此粒子作为一个偶极子天线产生再辐射。其解具有如下形式。

$$\boldsymbol{E}=\frac{-\mathrm{i}\omega\mu Il\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\left\{\hat{\boldsymbol{r}}\left[\left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^2+\frac{\mathrm{i}}{kr}\right]2\cos\theta+\hat{\boldsymbol{\theta}}\left[\left(\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)^2+\frac{\mathrm{i}}{kr}+1\right]\sin\theta\right\} \tag{6.1.1a}$$

$$\boldsymbol{H}=\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{-\mathrm{i}kIl\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\left(\frac{\mathrm{i}}{kr}+1\right)\sin\theta \tag{6.1.1b}$$

偶极矩 Il 由 E_0 和 ϵ_s 决定。

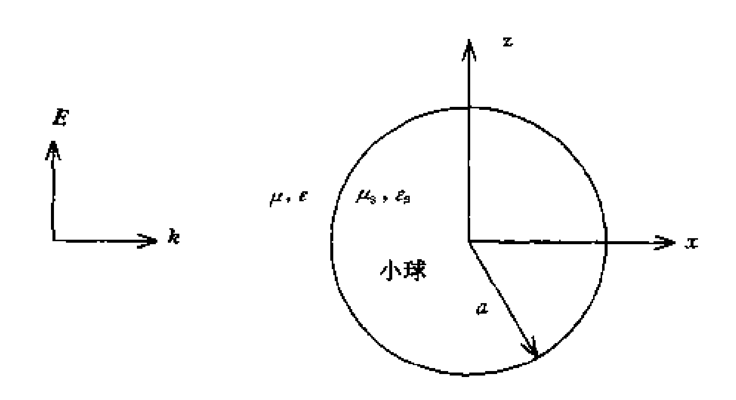


图 6.1-1 小球的瑞利散射

在非常靠近原点的地方 $kr\ll 1$，因为 $k=\omega/c$，所以这个关系也适合频率很低时的静态极限情况。偶极子的解在本质上是电场，磁场在静态极限时就消失了。因为当 Il 正比于 ω 时，有 $\boldsymbol{H}\simeq Il$ 和 $\boldsymbol{E}\simeq Il/k$。静态极限的电场为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&\approx\frac{\mathrm{i}\omega\mu Il}{4\pi r}\frac{1}{(kr)^2}(\hat{\boldsymbol{r}}2\cos\theta+\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta)\\&=(\hat{\boldsymbol{r}}2\cos\theta+\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^3E_s\end{aligned} \tag{6.1.2a}$$

其中，

$$E_s = \frac{i\eta Il}{4\pi k a^3} \tag{6.1.2b}$$

而且 $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$。该解满足静电场的麦克斯韦方程,即$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$和$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$。

假设小球内部的场是均匀的,而且与入射场方向相同,有:

$$\boldsymbol{E} = \hat{z}E_i = (\hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta)E_i \qquad r \leqslant a$$

这个解也满足静电场的麦克斯韦方程。

在小球表面 $r = a$,边界条件要求切向电场 $\boldsymbol{E}$ 与法向电位移矢量$\boldsymbol{D}$ 在边界上连续,因此有

$$-E_0 + E_s = -E_i \tag{6.1.3a}$$

$$\epsilon E_0 + 2\epsilon E_s = \epsilon_s E_i \tag{6.1.3b}$$

如果用入射场幅度 E_0 表示,可以将以上两式写为

$$E_s = \frac{\epsilon_s - \epsilon}{\epsilon_s + 2\epsilon}E_0 \tag{6.1.4a}$$

$$E_i = \frac{3\epsilon}{\epsilon_s + 2\epsilon}E_0 \tag{6.1.4b}$$

从式(6.1.2b)和(6.1.4a)的解得到 Il 为

$$Il = -i4\pi k a^3\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\left(\frac{\epsilon_s - \epsilon}{\epsilon_s + 2\epsilon}\right)E_0$$

将此式代入式(6.1.1)中,就得到了瑞利散射的电磁场。

现在我们研究当 $kr \gg 1$ 时的散射场。公式(6.1.1)给出

$$E_\theta = -\left(\frac{\epsilon_s - \epsilon}{\epsilon_s + 2\epsilon}\right)k^2 a^2 E_0 \frac{a}{r}e^{ikr}\sin\theta \tag{6.1.5a}$$

$$H_\phi = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}E_\theta \tag{6.1.5b}$$

小球总的散射功率为

$$P_s = \frac{1}{2}\int_0^\pi r^2\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\phi E_\theta H_\phi^* = \frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\left(\frac{\epsilon_s - \epsilon}{\epsilon_s + 2\epsilon}k^2 a^3 E_0\right)^2 \tag{6.1.6}$$

散射截面积可以计算为

$$\Sigma_s = \frac{P_s}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\,|E_0|^2} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{\epsilon_s - \epsilon}{\epsilon_s + 2\epsilon}\right)^2 k^2 a^2 \tag{6.1.7}$$

因此总的散射功率与波数的4次方成正比,高频波比低频波散射更强。散射功率也与半径的6次方成正比。

当小球为完全导体时,其内部电场 $\boldsymbol{E}_i$ 恒等于零。从式(6.1.2b)和(6.1.3a)可以得到:

$$Il = -i4\pi k a^3\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}E_0 \tag{6.1.8}$$

用法向 $\boldsymbol{D}$ 场的边界条件可以得到表面电荷密度 ρ_s。要注意在式(6.1.4)中,如果使 ϵ_s 趋向无穷大,可以得到式(6.1.8)。由于有表面电荷的存在,它们的时间变化引起表面电流,于是产生了磁偶极子。磁偶极子附近的磁场为式(6.1.2)中电偶极子的对偶场。

$$\boldsymbol{H} \simeq \frac{ikKl}{4\pi r}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\frac{1}{(kr)^2}(\hat{\boldsymbol{r}}2\cos\theta_y + \hat{\boldsymbol{\theta}}_y\sin\theta_y) \tag{6.1.9}$$

这里 Kl 为偶极子的磁偶极矩。应该注意,如果入射磁场为 $\hat{\boldsymbol{y}}$ 方向,角 θ_y 指的是与 y 轴的夹

角,这时 y 轴对应电偶极子中的 z 轴。边界条件要求法向磁场 $\boldsymbol{B}$ 为零,切向磁场 $\boldsymbol{H}$ 的不连续性给出表面电荷密度 $\boldsymbol{J}_s$。可以得到

$$Kl = -\mathrm{i}2\pi ka^3\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}H_0 \tag{6.1.10}$$

这里 H_0 是入射平面波幅度。因此散射场相当于沿 y 轴的磁偶极子的散射场。

应该记住,以上对于瑞利散射的分析只对小球半径很小时才有效;对于较大半径的粒子,散射过程叫做米氏(Mie)散射。事实上,下面将给出具有介电常数 ϵ_s 和磁导率 μ_s 的任意大小球形粒子的平面波散射,其可以由闭式精确解出。

6.1.2　米氏(Mie)散射

小球的平面波散射问题可以通过匹配边界条件严格解出。为方便求解,可将球面波分解为 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 方向的 TM 波和 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 方向的 TE 波,为此,引入德拜(Debye)电势 π_e 和磁势 π_m。

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{r}\,\pi_e \tag{6.1.11a}$$

$$\boldsymbol{H} = \nabla\times\boldsymbol{A} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\,\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\phi}\pi_e - \hat{\boldsymbol{\phi}}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\pi_e \tag{6.1.11b}$$

对于 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 方向的 TM 波和对于 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 方向的 TE 波,规定

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{r}\,\pi_m \tag{6.1.12a}$$

$$\boldsymbol{E} = \nabla\times\boldsymbol{Z} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\,\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\phi}\,\pi_m - \hat{\boldsymbol{\phi}}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,\pi_m \tag{6.1.12b}$$

德拜电势 π_e 和磁势 π_m 满足球面坐标系下的亥姆霍兹方程

$$(\nabla^2 + k^2)\begin{Bmatrix}\pi_e\\ \pi_m\end{Bmatrix} = 0 \tag{6.1.13}$$

其中,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{6.1.14}$$

这个方程的解可以分解为球面贝塞尔函数、连带勒让德多项式和正弦函数的叠加。应用麦克斯韦方程和式(6.1.13),可以得到具有以下形式的球面坐标场分量。

$$E_r = \frac{\mathrm{i}}{\omega\epsilon}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}r\,\pi_e + k^2 r\,\pi_e\right) \tag{6.1.15a}$$

$$E_\theta = \frac{\mathrm{i}}{\omega\epsilon}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\,r\,\pi_e + \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\phi}\,\pi_m \tag{6.1.15b}$$

$$E_\phi = \frac{\mathrm{i}}{\omega\epsilon}\,\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial r\partial\phi}\,r\,\pi_e - \frac{\partial}{\partial\theta}\,\pi_m \tag{6.1.15c}$$

$$H_r = -\frac{\mathrm{i}}{\omega\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}r\,\pi_m + k^2\,r\,\pi_m\right) \tag{6.1.16a}$$

$$H_\theta = -\frac{\mathrm{i}}{\omega\mu}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\,r\,\pi_m + \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\phi}\,\pi_e \tag{6.1.16b}$$

$$H_\phi = -\frac{\mathrm{i}}{\omega\mu}\,\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial r\partial\phi}\,r\,\pi_m - \frac{\partial}{\partial\theta}\,\pi_e \tag{6.1.16c}$$

这样总的电磁场就分解为 TE 和 TM 波分量，并用德拜电势 π_e 和磁势 π_m 表示出来。

考虑一个半径为 a 的小球位于坐标系原点（见图 6.1-2），且具有介电常数 ϵ_s 和磁导率 μ_s。一束平面波，

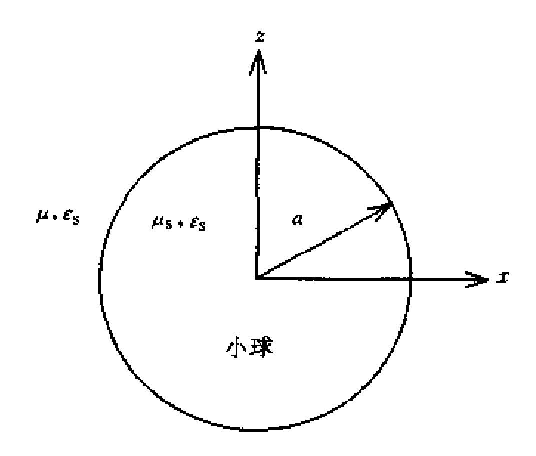
$$E = \hat{x}E_0 e^{ikz} = \hat{x}E_0 e^{ikr\cos\theta}$$

$$H = \hat{y}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}E_0 e^{ikr\cos\theta}$$

入射到球面上，平面波沿 $\hat{z}$ 方向传播。这个坐标系与瑞利散射的坐标系不同，那里的 z 轴是线性极化电场的方向。

为了与球面边界条件相匹配，利用波变换的方法将入射波以球面谐波的形式表示。

$$e^{ikr\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}(-i)^{-n}(2n+1)j_n(kr)P_n(\cos\theta) \tag{6.1.17}$$



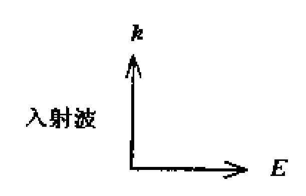


图 6.1-2 米氏散射

为确定入射波的德拜电势，注意，

$$\begin{aligned} E_r &= E_0\sin\theta\cos\phi e^{ikr\cos\theta} \\ &= -\frac{iE_0\cos\phi}{(kr)^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^{-n}(2n+1)\hat{J}_n(kr)P_n^{(1)}(\cos\theta) \end{aligned}$$

其中，

$$\hat{J}_n(kr) = krj_n(kr)$$

因为 $P_0^{(1)}(\cos\theta)=0$，所以从 $n=1$ 开始求和。电势 π_e 满足式(6.1.15)，可以表示为

$$\pi_e = \frac{E_0\cos\phi}{\omega\mu r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^{-n}(2n+1)}{n(n+1)}\hat{J}_n(kr)P_n^{(1)}(\cos\theta) \tag{6.1.18a}$$

通过对偶过程，磁势 π_m 为

$$\pi_m = \frac{E_0\sin\phi}{kr}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^{-n}(2n+1)}{n(n+1)}\hat{J}_n(kr)P_n^{(1)}(\cos\theta) \tag{6.1.18b}$$

因此散射场可以用德拜电势和磁势表示为

$$\pi_e^s = \frac{E_0\cos\phi}{\omega\mu r}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\hat{H}_n^{(1)}(kr)P_n^{(1)}(\cos\theta) \tag{6.1.19a}$$

$$\pi_m^s = \frac{E_0\sin\phi}{kr}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\hat{H}_n^{(1)}(kr)P_n^{(1)}(\cos\theta) \tag{6.1.19b}$$

其中，

$$\hat{H}_n^{(1)}(kr) = krh_n^{(1)}(kr)$$

小球外部的总场等于入射场和散射场的和。小球内部电场可以用德拜电势表示为

$$\pi_e^i = \frac{E_0\cos\phi}{\omega\mu_s r}\sum_{n=1}^{\infty}c_n\hat{J}_n(k_s r)P_n^{(1)}(\cos\theta) \tag{6.1.20a}$$

$$\pi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{i}} = \frac{E_0\sin\phi}{k_{\mathrm{s}}r}\sum_{n=1}^{\infty} d_n \hat{J}_n(k_{\mathrm{s}}r)P_n^1(\cos\theta) \tag{6.1.20b}$$

在 $r=a$ 处的边界条件要求 $E_\theta, E_\phi, H_\theta, H_\psi$ 连续,因此4个方程是可解得未知数 a_n, b_n, c_n, d_n。根据式(6.1.15),(6.1.16),4个系数可以为:

$$a_n = \frac{(-\mathrm{i})^{-n}(2n+1)}{n(n+1)}\cdot\frac{-\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{s}}\mu}\,\hat{J}'_n(ka)\hat{J}_n(k_{\mathrm{s}}a)+\sqrt{\varepsilon\mu_{\mathrm{s}}}\hat{J}_n(ka)\hat{J}'_n(k_{\mathrm{s}}a)}{\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{s}}\mu}\hat{H}^{(1)}{}_n{}'(ka)\hat{J}_n(k_{\mathrm{s}}a)-\sqrt{\varepsilon\mu_{\mathrm{s}}}\hat{H}_n^{(1)}(ka)\hat{J}'_n(k_{\mathrm{s}}a)} \tag{6.1.21a}$$

$$b_n = \frac{(-\mathrm{i})^{-n}(2n+1)}{n(n+1)}\cdot\frac{-\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{s}}\mu}\hat{J}_n(ka)\ \hat{J}'_n(k_{\mathrm{s}}a)+\sqrt{\varepsilon\mu_{\mathrm{s}}}\hat{J}'_n(ka)\hat{J}_n(k_{\mathrm{s}}a)}{\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{s}}\mu}\hat{H}_n^{(1)}(ka)\hat{J}'_n(k_{\mathrm{s}}a)-\sqrt{\varepsilon\mu_{\mathrm{s}}}\hat{H}_n^{(1)\prime}(ka)\hat{J}_n(k_{\mathrm{s}}a)} \tag{6.1.21b}$$

$$c_n = \frac{(-\mathrm{i})^{-n}(2n+1)}{n(n+1)}\cdot\frac{\mathrm{i}\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{s}}\mu}}{\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{s}}\mu}\hat{H}_n^{(1)\prime}(ka)\hat{J}_n(k_{\mathrm{s}}a)-\sqrt{\varepsilon\mu_{\mathrm{s}}}\hat{H}_n^{(1)}(ka)\hat{J}'_n(k_{\mathrm{s}}a)} \tag{6.1.21c}$$

$$d_n = \frac{(-\mathrm{i})^{-n}(2n+1)}{n(n+1)}\cdot\frac{-\mathrm{i}\sqrt{\varepsilon\mu_{\mathrm{s}}}}{\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{s}}\mu}\hat{H}_n^{(1)}(ka)\hat{J}'_n(k_{\mathrm{s}}a)-\sqrt{\varepsilon\mu_{\mathrm{s}}}\hat{H}_n^{(1)\prime}(ka)\hat{J}_n(ka)} \tag{6.1.21d}$$

在小球的情况下,$ka \ll 1$, $k_{\mathrm{t}}a \ll 1$,只有 $n=1$ 一项起主要作用,因此 $a_n \to -(ka)^3(\varepsilon_{\mathrm{s}}-\varepsilon)/(\varepsilon_{\mathrm{s}}+2\varepsilon)$,$b_n \to -(ka)^3(\mu_{\mathrm{s}}-\mu)/(\mu_{\mathrm{s}}+2\mu)$,结果就成为瑞利散射的形式。对于有限半径球的电磁波散射,当瑞利散射的限制条件 $ka \ll 1$ 不满足时,发生的现象叫做米氏散射。

以上结果也可以简化到完全导电球的情况。在 $\varepsilon_{\mathrm{s}} \to \infty$ 和 $E_{\mathrm{i}}=0$ 的完全导体情况下,无源安培定律 $\nabla\times\boldsymbol{H} = -\mathrm{i}\omega\varepsilon_{\mathrm{s}}\boldsymbol{E}$ 给出有限的 $\boldsymbol{H}$。从法拉第定律 $\nabla\times\boldsymbol{E}=\mathrm{i}\omega\boldsymbol{B}$ 看到有限的 $\boldsymbol{B}$ 场给出有限的 $\boldsymbol{E}$ 场,这违反了完全导电体要求 $\boldsymbol{E}$ 为0的定义。因此,$\boldsymbol{B}$ 必须为0。但是,数学上没有明确要求 $\boldsymbol{H}$ 必须为零。如果使完全导电体的磁导率为 μ_{s},由于 $\boldsymbol{B}=\mu_{\mathrm{s}}\boldsymbol{H}$,可以看出 $\mu_{\mathrm{s}}=0$。因此对一般情况下具有介电常数 ε_{s} 和磁导率 μ_{s} 的介质求解时,通过在数学上使 $\varepsilon_{\mathrm{s}}\to\infty$ 和 $\mu_{\mathrm{s}}=0$ 的方法,取代对完全导电体0电场的定义。作为一个对偶情况,也可以这样定义一个完全磁导体,即要求 $\boldsymbol{H}$ 恒等于零,这样就导出数学上的极限 $\mu_{\mathrm{s}}\to\infty$ 和 $\varepsilon_{\mathrm{s}}=0$。

习题

6.1.1

(1) 对于电流偶极矩为 $Il=-\mathrm{i}\omega p$ 的赫兹偶极子的电磁场解,如果使 $\omega\to 0$,试给出当 $\boldsymbol{H}=0$ 时,偶极矩为 p 的静态偶极子的电场 $\boldsymbol{E}$。

(2) 考虑尺寸远小于波长的粒子对电磁波的瑞利散射,例如空气分子对阳光的散射。将粒子模拟为一个半径为 a,介电常数为 ε_{p} 的小球。当粒子被光波照射时,如果入射场强 E_0 沿 z 方向,求感应偶极矩 p。

(3) 求作为赫兹偶极子的粒子再辐射的总功率 P_{s},并证明散射截面积为 $2\eta P/E_0^2$。以上结果通常用于解释天空为什么是蓝色的(请想一想为什么不是紫色)。

(4) 考虑一个截面积为 A 的光纤。在光纤内传播的电磁波被构成光纤材料的原子和分子散射。由于散射粒子的尺寸远远小于光波的波长,散射过程又可以被描述为瑞利散射。假设光波强度为 E_0,波长为 10^{-6}m,散射粒子半径 $a=10^{-10}$m,$\mu=\mu_0$,$\varepsilon=2\varepsilon_0$。求在1km的距离内,光波被传输的功率和总的散射功率。散射功率与传输功率的比率为光纤的特征损耗,利用以上数据,估算由于瑞利散射的缘故,光纤每公里的损耗(以dB/km表示)。

(5) 雨滴的微波散射是瑞利散射的一个例子。如果假设频率10 GHz的平面波入射到半径1 mm的雨滴上,雨滴具有介电常数 $\varepsilon+\mathrm{i}\sigma/\omega$,其中 $\sigma=\omega\varepsilon$,$\varepsilon=40\varepsilon_0$。除了粒子散射的功率,还有由于粒子介电常数虚部

吸收的功率。吸收的功率可以计算为

$$P_{\text{diss}} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}V\sigma \mid E_o \mid^2$$

那么,散射和吸收损耗哪一个是主要的微波功率损耗。

6.2 导体柱的散射

6.2.1 精确解

考虑一束平面波入射到一个导体柱上,如图 6.2-1 所示。入射波是线性极化的,电场矢量 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}$ 平行于圆柱体轴线。入射矢量 $\boldsymbol{k}$ 垂直于轴线,用圆柱坐标系描述,有

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}} = \hat{z}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} = \hat{z}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\rho\cos\phi} \tag{6.2.1}$$

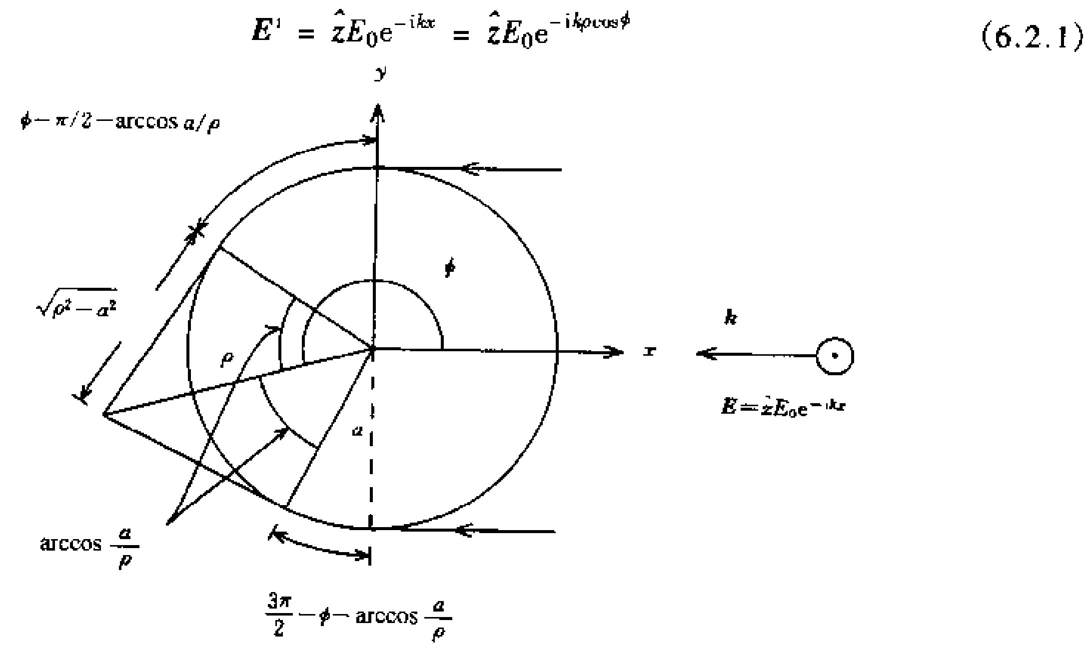


图 6.2-1 导体柱的散射

为了在 $\rho = a$ 处匹配边界条件,可将平面波的解转换成满足圆柱坐标系的亥姆霍兹波动方程的柱面波的叠加,因此有

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\rho\cos\phi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m J_m(k\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$$

其中,a_m 可以由 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$的正交关系确定,在上式两端都乘以 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\phi}$并在 0 到 2π 范围内积分。考虑到贝塞尔函数的积分表达式

$$J_n(k\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\rho\cos\phi-\mathrm{i}n\phi+\mathrm{i}n\pi/2}$$

得到 $a_n = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi/2}$和

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\rho\cos\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi-\mathrm{i}n\pi/2} \tag{6.2.2}$$

这个表达式被认为是波转换方程,它是用柱面波来表示平面波。

散射波也可以表示为满足亥姆霍兹波方程的柱面波的叠加。我们期望得到向外辐射的波,因此将解用第一类汉开尔函数表示。入射波与散射波的和满足边界条件,即在 $\rho = a$ 处切

向电场消失。得到的完整解为：

$$\boldsymbol{E}=\hat{z}E_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[J_n(k\rho)-\frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}H_n^{(1)}(k\rho)\right]e^{in\phi-in\pi/2} \tag{6.2.3}$$

求和式中的第一项代表入射波，第二项为散射波。在 $\rho=a$ 处，根据式(6.2.3)，$\boldsymbol{E}(\rho=a)=0$。

在远场区，$k\rho\gg1$，利用 $H_n^{(1)}(k\rho)$的渐近公式，得到以下形式的散射场：

$$\boldsymbol{E}_s\approx-\hat{z}E_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}}\frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}e^{ik\rho+in(\phi-\pi)-i\pi/4}$$

根据 ka 扩展这个结果，为

$$\boldsymbol{E}_s=\hat{z}iE_0\sqrt{\frac{\pi}{2k\rho}}\left[\frac{1}{\ln ka}+(ka)^2\cos\phi-\frac{(ka)^4}{8}\cos2\phi+\cdots\right]e^{ik\rho-i\pi/4} \tag{6.2.4}$$

可以观察到在圆柱半径远远小于波长($ka\ll1$)时，这个级数迅速收敛，其中第一项与角度无关，表明由细线产生的散射波是各向同性的。然而需要指出的是，当入射波磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 平行于圆柱轴线时，散射波不再是各向同性的，而是与角度有关。

6.2.2 维特森(Watson)变换

在圆柱半径与波长相当的情况下，式(6.2.4)中的级数收敛得很慢。这时，用维特森(Watson)变换将精确解转换成快速收敛的级数。维特森变换将剩余级数和围线积分联系起来，如图6.2-2所示，将围线 C 在复平面 ν 中画出，假设 B_ν 在实轴上没有奇点，得到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\phi}B_n=\frac{i}{2}\oint_C d\nu\frac{e^{i\nu(\phi-\pi)}}{\sin\nu\pi}B_\nu \tag{6.2.5}$$

由 $\sin\nu\pi$ 引起的奇点都是位于实轴上的一阶极点，在 $\nu=0,\pm1,\pm2,\cdots$，时注意到由于围线的方向性，积分等于 $-2\pi i$ 乘以函数 $e^{i\nu(\phi-\pi)}B_\nu/\sin\nu\pi$ 的余项。对 n 的所有整数值余项为 $e^{in\phi}B_n/\pi$。

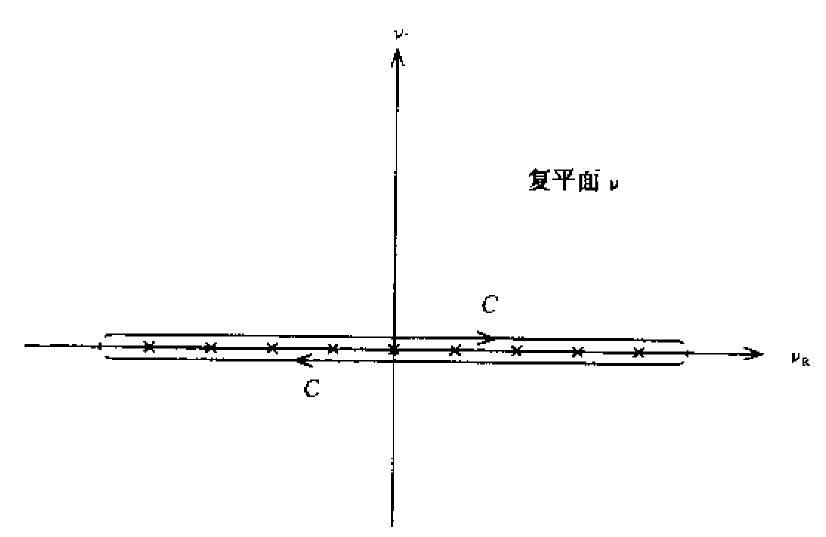


图6.2-2 维特森转换

为了利用维特森变换，根据式(6.2.3)，可以确定 B_n 为

$$B_n=\frac{E_0}{H_n^{(1)}(ka)}[J_n(k\rho)H_n^{(1)}(ka)-J_n(ka)H_n^{(1)}(k\rho)]e^{-in\pi/2}$$

$$=\frac{E_0}{2H_n^{(1)}(ka)}[H_n^{(2)}(k\rho)H_n^{(1)}(ka)-H_n^{(2)}(ka)H_n^{(1)}(k\rho)]e^{-in\pi/2} \tag{6.2.6}$$

B_n 的奇点由 $H_n^{(1)}(ka)$的零点引起,如图 6.2-3 所示。

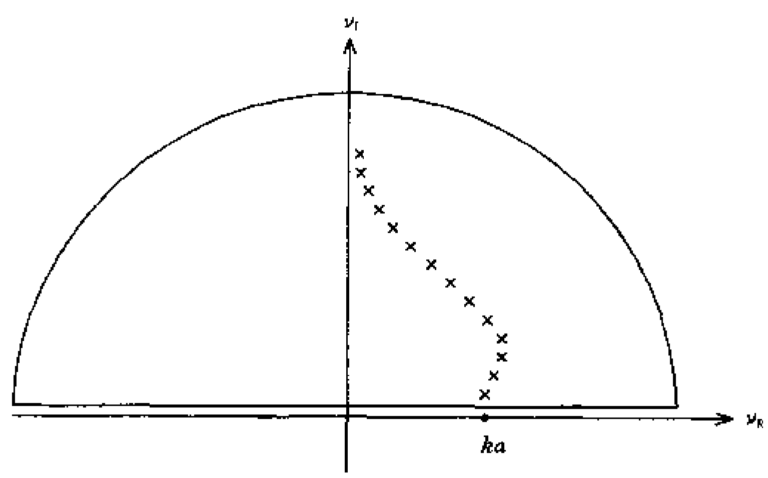


图 6.2-3 在复平面 ν 上的积分

在式(6.2.5)右边的围线积分可以通过将其转换成从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的积分求得。然后在上半平面闭合围线(见图 6.2-3)。从公式(6.2.5)可以得到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\phi} B_n = \lim_{\delta\to 0} \frac{i}{2}\left(\int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} + \int_{\infty-i\delta}^{-\infty-i\delta}\right) d\nu \, \frac{e^{i\nu(\phi-\pi)}}{\sin\nu\pi} B_\nu$$
$$= \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} d\nu \, \frac{1}{\sin\nu\pi}\left[e^{i\nu(\phi-\pi)} B_\nu + e^{-i\nu(\phi-\pi)} B_{-\nu}\right]$$

应用下面的关系:

$$H_{-\nu}^{(1)}(\xi) = e^{i\nu\pi} H_\nu^{(1)}(\xi)$$
$$H_{-\nu}^{(2)}(\xi) = e^{-i\nu\pi} H_\nu^{(2)}(\xi)$$

得到 $B_{-\nu} = B_\nu$。可以证明,沿大半圈的积分对求解没有贡献,全部贡献来自 B_ν 的奇点。因此方程(6.2.5)变为

$$E = \hat{z} i \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \, \frac{\cos\nu(\phi-\pi)}{\sin\nu\pi} B_\nu$$
$$= \hat{z}\pi E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{\nu_n}^{(2)}(ka)}{\left[\partial H_\nu^{(1)}(ka)/\partial\nu\right]_{\nu=\nu_n}} \frac{\cos\nu_n(\phi-\pi) e^{-i\nu_n\pi/2}}{\sin\nu_n\pi} H_{\nu_n}^{(1)}(k\rho) \qquad (6.2.7)$$

其中,ν_n 表示汉开尔函数 $H_n^{(1)}(ka)$的零点。要注意,在式(6.2.6)中 B_n 的第一项没有贡献,因为分子和分母上的 $H_n^{(1)}(ka)$互相抵消了。

6.2.3 爬行波

当 $\pi/2 < \phi < 3\pi/2$ 时,式(6.2.7)中的级数迅速收敛。这个结果基于以下事实。

$$\frac{\cos\nu_n(\phi-\pi) e^{-i\nu_n\pi/2}}{\sin\nu_n\pi} = \frac{-i\left[e^{i\nu_n(\phi-\pi/2)} + e^{i\nu_n(3\pi/2-\phi)}\right]}{1 - e^{i\nu_n 2\pi}} \qquad (6.2.8a)$$

其中,ν_n 采用正的虚部值。收敛范围在圆柱体的阴影区。可以对式中包含的项给出一个有趣的解释。当 $k\rho > \nu_n \gg 1$ 条件满足时,应用 $H_{\nu_n}^{(1)}(k\rho)$的渐近公式

$$H_{\nu_n}^{(1)}(k\rho) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi(k^2\rho^2 - \nu_n^2)^{1/2}}} e^{i\left(\sqrt{k^2\rho^2-\nu_n^2} - \nu_n \arccos(\nu_n/k\rho) - \pi/4\right)} \qquad (6.2.8b)$$

要注意,ν_n 的虚部是正的,它随 n 的增加而增加。对于最前面的几个控制项,我们将 ν_n 近似

为 ka，

$$\sqrt{k^2\rho^2 - \nu_n^2} \approx k\sqrt{\rho^2 - a^2}$$

以及

$$\arccos\frac{\nu_n}{k\rho} \approx \arccos\frac{a}{\rho}$$

根据式(6.2.8)，式(6.2.7)指数依赖关系采用以下形式。

$$e^{ik\sqrt{\rho^2-a^2}}\{e^{i\nu_n[\phi-(\pi/2)-\arccos(a/\rho)]} + e^{i\nu_n[3\pi/2-\phi-\cos(a/\rho)]}\} \tag{6.2.9}$$

现在考虑射线或光子在切点处入射到圆柱体上，并沿表面传播，然后离开圆柱表面到达观察点(ρ,ϕ)，如图 6.2-1 所示。项$(\phi-\pi/2-\arccos a/\rho)$和$(3\pi/2-\phi-\arccos a/\rho)$对应沿圆柱体表面两条光线的路经。两条光线的衰减由 ν_n 的虚部确定。项 $k(\rho^2-a^2)^{1/2}$对应射线离开圆柱表面继续传播的路径。两条射线在阴影区的 ρ 点结合，由于这样的路径如同一个生动的画面，所以这种波叫做爬行波。

在被照亮的区域，$-\pi/2<\phi<\pi/2$，应用关系

$$e^{i\nu(\phi-\pi)} + e^{-i\nu(\phi-\pi)} = -i2e^{i\nu\phi}\sin\nu\pi + 2e^{i\nu\pi}\cos\nu\phi$$

可以得到一个有用的公式，即式(6.2.5)中的围线积分变成

$$\boldsymbol{E} = \hat{z}\left(\int_{-\infty}^{\infty} d\nu e^{i\nu\phi}B_\nu + i\int_{-\infty}^{\infty} d\nu\frac{\cos\nu\phi}{\sin\nu\pi}e^{i\nu\pi}B_\nu\right)$$

该式可以取代(6.2.7)式。在上半平面闭合围线时，第二项积分可以从 $H_n^{(1)}(ka)$的剩余项中计算出来。因为 $H_n^{(1)}(ka)$的零点有正的虚部项，它的贡献没有括号中第一项积分大。第一项积分的计算留给读者练习，结果是

$$\boldsymbol{E} \simeq \hat{z}E_0\left[e^{-ik\rho\cos\phi} - \sqrt{\frac{a\cos\phi/2}{2\rho}}e^{ik(\rho-2a\cos\phi/2)}\right] \tag{6.2.10}$$

这可以用几何光学来解释。第一项是入射波，第二项对应射线在圆柱表面的反射。当射线在 $\rho=a$ 点到达圆柱表面时，它有一相位因子 $e^{-i(ka\cos\phi/2)}$。当从圆柱面反射到观察点时，又得到另一相位因子 $e^{-i(k\rho-ka\cos\phi/2)}$。

习题

6.2.1 考虑一个半径为 a 的导体，圆柱的散射和入射波的磁场 $\boldsymbol{H}$ 平行于圆柱体的轴线，

$$\boldsymbol{H}^i = \hat{z}H_0e^{-ikx} = \hat{z}H_0e^{-ik\rho\cos\phi}$$

应用波变换公式：

$$\boldsymbol{H}^i = \hat{z}H_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(k\rho)e^{in\phi-in\pi/2}$$

确定入射波的电场。散射波可以表示为汉开尔函数的叠加：

$$\boldsymbol{H}^s = \hat{z}\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_nH_n^{(1)}(k\rho)e^{in\phi-in\pi/2}$$

确定散射波的电场。电场的切向分量应该在 $\rho=a$ 处消失，证明

$$\boldsymbol{H}^s = -H_0\hat{z}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{J'_n(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)}H_n^{(1)}(k\rho)e^{in\phi-in\pi/2}$$

对于 $ka\ll1$ 的情况，应用 $x\to0$ 时贝塞尔函数和汉开尔函数的小参数近似

$$\frac{J'_0(x)}{H_0^{(1)'}(x)} = 0$$

$$\frac{J'_n(x)}{H_0^{(1)'}(x)} = \mathrm{i}\frac{\pi x^{2n}}{2^{2n}(n-1)!n!}$$

求出当 $ka \ll 1$ 时远区的散射场。

6.2.2 考虑一个半径为 b，长度为 $2a$ 的圆柱体，它的内部有沿 z 轴流动的均匀电流，如图 6.2-4 所示（这样一个电流分布可以认为是电子束）。为了求出在原点，即在电流分布中心的电场，可以利用矢势 $\boldsymbol{A}$ 和标势 ϕ。首先用一个小腔 ΔV 包围原点 O。矢量势 $\boldsymbol{A}$ 满足均匀介质的亥姆霍兹方程，由下式给出，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_0) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_{V-\Delta V}\mathrm{d}V\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$$

标势由下式给出，

$$\phi(\boldsymbol{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\left[\iiint_{V-\Delta V}\mathrm{d}V\rho(\boldsymbol{r})\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} + \iint_S \mathrm{d}S\frac{J(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\right]$$

其中，$\rho(\boldsymbol{r}) = \nabla\cdot\boldsymbol{J}/\mathrm{i}\omega = 0$，并且在 $z = \pm a$ 点 $\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{J} = J$。

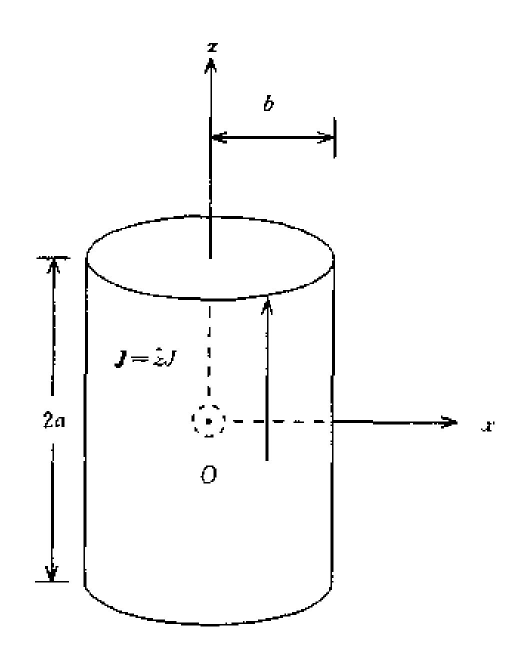


图 6.2-4 圆柱体

(1) 证明当 $\Delta V \to 0$ 时，原点的电场为

$$\boldsymbol{E}(0) = \hat{z}J\left[\frac{\mathrm{i}}{\omega\epsilon}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka}-1) + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\int_0^a \mathrm{d}z\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\sqrt{z^2+b^2}}\right] + \hat{z}\frac{\mathrm{i}Ja}{\omega\epsilon}\left[-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka}}{a} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$$

其中，第一项是由矢量势 $\boldsymbol{A}$ 引起，第二项由标量势 ϕ 引起。应注意到以上结果与 ΔV 的形状无关。对于圆柱体内的任意 $\boldsymbol{r}_0$ 计算 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_0)$，并利用

$$\boldsymbol{E} = \mathrm{i}\omega\left(\boldsymbol{I} + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)\cdot\boldsymbol{A}$$

求用 $\boldsymbol{A}$ 表示的 $\boldsymbol{E}$。

(2) 为了利用并矢格林函数的形式解决这个问题，我们首先知道

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \mathrm{i}\omega\mu\iiint_V \mathrm{d}V'\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \\ &= \mathrm{i}\omega\mu\iiint_V \mathrm{d}V'\left[\boldsymbol{II} + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right]\cdot\frac{\hat{z}J\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\end{aligned}$$

证明第一项与(1)中计算的相同。

(3) 积分号内的第二项并不收敛，这是由于要对在分母上的 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ 求导数。积分计算要先去掉包围原点的一块小体积 ΔV，得到一个主要值，然后再使 $\Delta V \to 0$。这个结果取决于 ΔV 的形状。为了说明这种情况，假设 ΔV 为一个半径为 δ 的小球。证明第二项为

$$\boldsymbol{E} = \hat{z}\frac{\mathrm{i}Ja}{\omega\epsilon}\left(-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka}}{a} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{3a}\right)$$

要注意，上式中附加的 $1/3a$ 一项与(1)中的第二项可以相比较。因此，当观察点在源区时，为了利用并矢格林函数，必须要非常小心。对于源区的 r_0，电场可以写为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0) = \mathrm{PV}\iiint_V \mathrm{d}V\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') + \boldsymbol{E}_c(\boldsymbol{r}_0)$$

其中，PV 表示主要值，$\boldsymbol{E}_c(\boldsymbol{r}_0)$ 表示校正项，它依赖于 ΔV 的形状。最后的结果是 PV 积分与 $\boldsymbol{E}_c(\boldsymbol{r}_0)$ 的和，与 ΔV 的形状无关。

6.2.3 我们将研究在外加静电场作用下，可极化介质中腔体内部电场的状态，假设外加电场沿 z 方向、

$E_a=\hat{z}E_0$，而且极化矢量为 P。证明：

(1) 如果腔体的形状为球形，内部电场为 $E=E_a+P/3\epsilon_0$。

(2) 如果腔体形状为圆盘形，如图 6.2-5 所示(椭圆面垂直于电场的极限情况)，内部电场为 $E=E_a+P/\epsilon_0$。

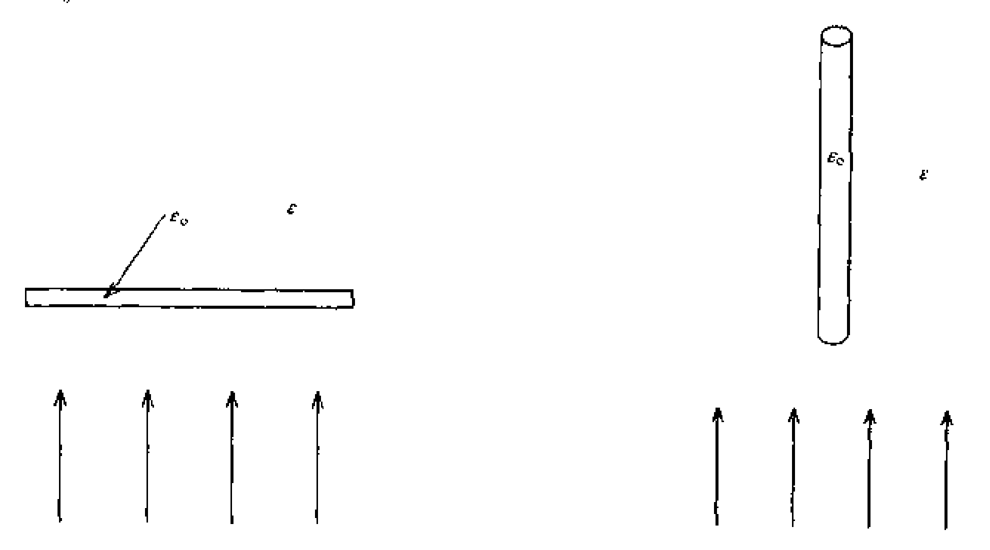


图 6.2-5 外部电场施加给圆盘形腔体　　图 6.2-6 外部电场施加给针形腔体

(3)如果一个腔体的形状为针形(椭圆面的两个轴趋于 0 的极限情况)，其方向与外加电场方向相同，如图 6.2-6 所示。腔体内部电场为 $E=E_a$。

当观察点在源区时，腔体内部电场与并矢格林函数的奇异性有关。为了克服这个困难，定义一个主要值积分。因此，观察点在源区时的电场由下式给出：

$$E(r)=\mathrm{i}\omega\mu_0\mathrm{PV}\int \overline{\overline{G}}(r,r')\cdot J(r')\mathrm{d}V'+\frac{L\cdot J(r)}{\mathrm{i}\omega\epsilon_0}$$

其中，主要值积分通过计算源区的体积分获得，但要去掉一个叫做排除体的小腔体，排除体有一定的形状，且包含观察点。它的大小允许最终收缩为 0。因此，第一项可以认为是当源在排除体外时产生的场。后面一项是当源在排除体内时产生的场，可以证明当排除体收缩为 0 时，这一项也不会消失。在这个定义上，$E(r)$是惟一的，然而在方程右边的两项中，每一项的值都依赖于所选择的排除体的形状。通过求不同腔体形状时的 L 值，可以明显地看出这一点。由于排除体小到可以忽略，假设 $J(r)$在腔体内是均匀的，证明如下 4 个问题。

①如果选择排除体的形状为球形，那么，$L=\overline{\overline{I}}/3$，其中 $\overline{\overline{I}}$ 是单位并矢。

②如果排除体的形状为圆盘，那么，$L=\hat{z}\hat{z}$。

③如果排除体为长圆柱体，$L=\overline{\overline{I}}^t/2$，其中 $\overline{\overline{I}}^t$ 是垂直于圆柱体轴线的单位并矢。如果假设 $J_p=-\mathrm{i}\omega P$，腔内部的场是主要值积分，可由 $E(r)=L\cdot P/\epsilon_0$ 给出。

④解释长圆柱体情况下结果明显不一致的原因。

6.3 周期性粗糙表面的散射

6.3.1 周期波纹状导体表面的散射

考察一个被周期性地开出矩形槽的波纹状理想导体表面，如图 6.3-1 所示。这些槽在 y 方向无限长，但是其宽度 w 和深度 d 有限，矩形槽波纹的周期是 p，研究这样的粗糙表面对平面波的散射。设平面波具有入射波矢量 $k=\hat{x}k_x-\hat{z}k_z$，散射波可以用 Floquet 模的形式展开，该模式是周期性结构的特征波。对于 TM 入射波，表面以上半空间的磁场为

$$H = \hat{y}H_0\left[e^{ik_x x - ik_z z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{i(k_x + 2n\pi/p)x + ik_{zn}z} \right] \tag{6.3.1a}$$

其中，

$$k_{zn} = \sqrt{k^2 - (k_x + 2n\pi/p)^2} \tag{6.3.1b}$$

式(6.3.1a)中的第一项表示入射波；求和项表示 Floquet 模的叠加。电场由如下麦克斯韦方程求出。

$$E = \frac{i}{\omega\epsilon}\nabla \times H \tag{6.3.2}$$

可以看到对于 $k^2 < [k_x + (2n\pi/p)]^2$，Floquet 模是沿 z 方向呈指数衰减并逐渐消失的波。其中，$n=0$ 模表示镜面反射波。

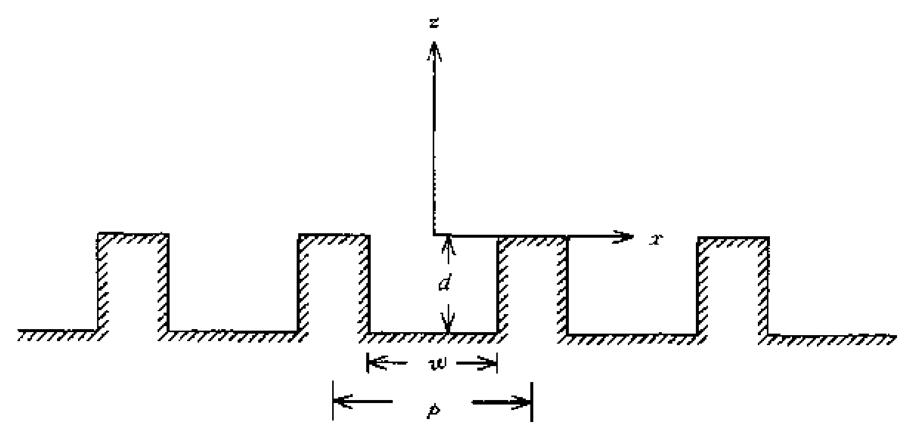


图 6.3-1 周期波纹状表面的散射

矩形槽内的场可用波导模式展开为

$$H = \hat{y}H_0 \sum_{m=0}^{\infty} G_m \cos\frac{m\pi}{w}(x + \omega/2)\frac{\cos k_{zm}^{(2)}(z+d)}{\cos k_{zm}^{(2)} d} \qquad z < 0 \tag{6.3.3a}$$

其中，

$$k_{zm}^{(2)} = \sqrt{k^2 - (2m\pi/w)^2} \tag{6.3.3b}$$

电场可由麦克斯韦方程从磁场得到，为

$$\begin{aligned} E &= \frac{i}{\omega\epsilon}\nabla \times H = \frac{i}{\omega\epsilon}\left(\hat{z}\frac{\partial}{\partial x}H_y - \hat{x}\frac{\partial}{\partial z}H_y\right) \\ &= \hat{x}\frac{ik_{zm}}{\omega\epsilon}H_0\sum_{m=0}^{\infty}G_m\cos\frac{m\pi}{w}(x+\omega/2)\frac{\sin k_{zm}^{(2)}(z+d)}{\cos k_{zm}^{(2)}d} \\ &\quad - \hat{z}\frac{im\pi}{\omega\epsilon w}H_0\sum_{m=0}^{\infty}G_m\sin\frac{m\pi}{w}(x+\omega/2)\frac{\cos k_{zm}^{(2)}(z+d)}{\cos k_{zm}^{(2)}d} \end{aligned} \tag{6.3.4}$$

根据上式可以直接看出，矩形槽内的场确实满足在理想导体表面切向电场消失的边界条件。

考察当 $k_x = 0$ 时垂直入射的特殊情况。在 $z=0$ 面，边界条件要求在 $-w/2 \leqslant x \leqslant w/2$ 区间内，切向磁场连续，因此有

$$1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{i2n\pi x/p} = \sum_{m=0}^{\infty} G_m \cos\frac{m\pi}{w}(x + w/2) \tag{6.3.5a}$$

切向电场在此区间也是连续的，有

$$1 - \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{k_{zn}}{k_z}R_n e^{i2n\pi x/p} = -\sum_{m=0}^{\infty} i\frac{k_{zm}^{(2)}}{k_z}G_m \tan(k_{zm}^{(2)}d)\cos\frac{m\pi(x+w/2)}{w} \tag{6.3.5b}$$

在 $w/2 \leqslant |x| \leqslant p/2$ 区间内，切向电场消失，即：

$$1 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k_{zn}}{k_z} R_n e^{i2n\pi x/p} = 0 \tag{6.3.5c}$$

现在要从式(6.3.5)中求出 R_n 和 G_m。可利用余弦函数的正交性来求解，在式(6.3.5a)两端都乘以 $\cos[m\pi(x+w/2)/w]$，并在区间 $-w/2 \leqslant x \leqslant w/2$ 内积分，得到下式。

$$(1+\delta_{m0})\frac{w}{2}G_m = \int_{-w/2}^{w/2} dx \cos\frac{m\pi(x+w/2)}{w}\left(1+\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{i2n\pi x/p}\right) \tag{6.3.6}$$

在式(6.3.5b)两端乘以 $e^{-i2n\pi x/p}$，并在区间 $-p/2 \leqslant x \leqslant p/2$ 内积分。根据式(6.3.5c)，得知仅在区间 $-w/2 \leqslant x \leqslant w/2$ 内，上式右端不为零。因此有：

$$p\left(\delta_{n0} - \frac{k_{zn}}{k_z}R_n\right) = -i\int_{-w/2}^{w/2} dx e^{-2n\pi x/p} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k_{zm}^{(2)}}{k_z} G_m \tan(k_{zm}^{(2)}d)\cos\frac{m\pi(x+w/2)}{w} \tag{6.3.7}$$

我们定义

$$P_{mn} = \int_{-w/2}^{w/2} dx e^{i2m\pi x/p}\cos\frac{n\pi(x+w/2)}{w} = \begin{cases} \dfrac{4m\pi/p}{(2m\pi/p)^2-(n\pi/w)^2}\sin\dfrac{m\pi w}{p} & n = \text{偶数} \\ i\dfrac{4m\pi/p}{(2m\pi/p)^2-(n\pi/w)^2}\cos\dfrac{m\pi w}{p} & n = \text{奇数} \\ w\,\delta_{0n} & n = 0 \end{cases} \tag{6.3.8}$$

因此式(6.3.6)和(6.3.7)可以写为

$$(1+\delta_{m0})\frac{\omega}{2}G_m = P_{0m} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{nm}R_n \tag{6.3.9}$$

$$R_n = \left[\frac{k_z}{k_{zn}}\delta_{n0} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{ik_{zm}^{(2)}}{pk_{zn}}\tan(k_{zm}^{(2)}d)P_{nm}^{*}G_m\right] \tag{6.3.10}$$

这表明对于 R_n 需求解一系列的矩阵方程。将式(6.3.10)代入式(6.3.9)中，得到

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left[(1+\delta_{l0})\frac{w}{2}\delta_{ml} - i\tan(k_{zl}^{(2)}d)Q_{ml}\right]G_l = 2P_{0m} \tag{6.3.11}$$

其中，

$$Q_{ml} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{k_{zl}^{(2)}}{pk_{zn}}P_{nm}P_{nl}^{*} = \begin{cases}\dfrac{1}{p}\left(P_{0m}P_{0l}^{*} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{k_{zl}^{(2)}}{k_{zn}}P_{nm}P_{nl}^{*}\right) & m+l = \text{偶数} \\ 0 & m+l = \text{奇数}\end{cases} \tag{6.3.12}$$

模幅度 G_l 可以直接由矩阵求逆解出。计算反射系数 R_n 所需的矩形槽模数目由矩形槽宽度 w 确定。

对于相当窄的槽，$kw \ll 1$。可用最低阶模的幅度 G_0 计算 R_n，当 $m=0$ 时，式(6.3.6)和(6.3.7)变为

$$G_0 = 1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n\frac{p}{n\pi w}\sin\frac{n\pi w}{p} \tag{6.3.13}$$

和

$$R_n = \frac{k_z}{k_{zn}}\delta_{n0} + \mathrm{i}\frac{k}{k_{zn}}\frac{\tan kd}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi w}{p}\right)G_0 \tag{6.3.14}$$

将式(6.3.14)代入(6.3.13)中,得到

$$G_0 = 2\left[1 - \mathrm{i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{kp\tan kd}{(n\pi)^2 k_{zn} w}\sin^2\frac{n\pi w}{p}\right]^{-1} \tag{6.3.15}$$

将上式再代回到式(6.3.14),得到反射系数 R_n。

这种模配的方法对解包含周期结构的问题常常是有用的。Floquet 模的应用也大大方便了对散射波的讨论。再考虑另外一个例子,有一种由宽度为$(p-w)$、间隔距离为 w 的平行导体板组成的类似结构,相当于将图 6.3-1 中 $z=-d$ 的导体面移走后剩下的结构。对于具有 y 方向磁场的 TM 入射波,在平行板区域 TEM 波导模被激励起来,反射率总小于 1。对于具有 y 方向电场的 TE 入射波,在平行板区域激励的导行波都是 TE 模。因此,如果平板的间隔足够小,使得 $kw<\pi$,则所有的波导波模将消失,入射波将全部被散射。

6.3.2 周期介质表面的散射

考虑一束平面波入射到由 $f(x)=f(x+p)$ 表示的周期表面上,其中 p 表示表面沿 x 方向的周期,见图 6.3-2。使入射场为:

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}} = \hat{y}E_{\mathrm{i}y}(\boldsymbol{r}) = \hat{y}E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{6.3.16}$$

其中,$\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}} = \hat{x}k_{\mathrm{i}x} - \hat{z}k_{\mathrm{i}z}$ 为入射波矢量。

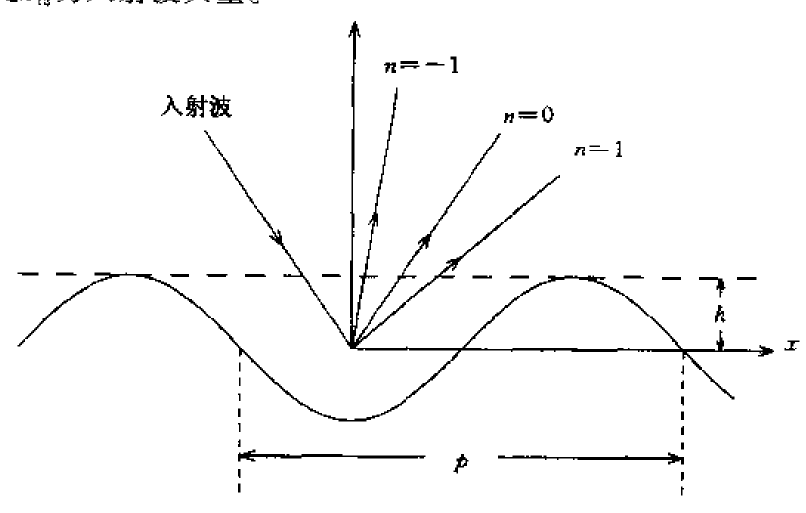


图 6.3-2 周期粗糙表面的散射

为了求得散射问题的解,可首先利用惠更斯原理的标量形式导出消光定理。根据式(5.1.66)并在区域 0 应用标量格林函数,得到区域 0 和区域 1 的总电场为:

$$E_{\mathrm{i}y}(\boldsymbol{r}) + \iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}S'\{E_y(\boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla'_s g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla'_s E_y(\boldsymbol{r}')\}$$

$$= \begin{cases} E_y(\boldsymbol{r}) & z > f(x) \\ 0 & z < f(x) \end{cases} \tag{6.3.17}$$

其中,

$$\mathrm{d}S'\hat{\boldsymbol{n}} = \left[\hat{z} - \hat{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x'}f(x')\right]\mathrm{d}x' \tag{6.3.18}$$

公式(6.3.17)表明区域0的总电场等于入射场和表面感应电流产生的散射场之和。根据惠更斯原理,区域I的入射场与散射场的和为零,这个结果被称为消光定理。

式(6.3.17)中的表面积分是在无限区域上进行的,但是也可以将其压缩在一个周期上。首先需认识到表面场有周期特性,可以表示为

$$E_y(\boldsymbol{r}' + \hat{\boldsymbol{x}}np) = E_y(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{ix}np} \tag{6.3.19}$$

根据傅里叶级数理论,可以用复指数的无限相加和表示狄拉克 δ 函数的周期序列,如下式所示。

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{ix}-k_x)mp} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{p}\delta\left(k_x - k_{ix} - \frac{2m\pi}{p}\right) \tag{6.3.20}$$

区域0的格林函数为

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(k\,|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\,|) = \frac{\mathrm{i}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_x\,\frac{1}{k_z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x(x-x')+\mathrm{i}k_z|z-z'|} \tag{6.3.21}$$

为了将式(6.3.17)中的表面积分减少到只有一个周期,利用从式(6.3.20)和(6.3.21)得出的恒等式,以及在式(6.3.19)和格林函数中的转换相位因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{ix}mp}$,得到

$$\begin{aligned}\sum_{m=-\infty}^{\infty} & g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}' + \hat{\boldsymbol{x}}mp)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{ix}mp} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_x\,\frac{1}{k_z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x(x-x')+\mathrm{i}k_z|z-z'|}\sum_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{ix}-k_x)mp} \\ &= g_p(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{\mathrm{i}}{2p}\sum_n \frac{1}{k_{zn}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{xn}(x-x')+\mathrm{i}k_{zn}|z-z'|}\end{aligned} \tag{6.3.22}$$

其中,

$$k_{xn} = k_{ix} + n\frac{2\pi}{p} \tag{6.3.23a}$$

$$k_{zn} = (k^2 - k_{xn}^2)^{1/2} \tag{6.3.23b}$$

当 $k_{xp}^2 > k^2$ 时,选择 $k_{zn} = \mathrm{i}(k_{xn}^2 - k^2)^{1/2}$。将式(6.3.19)和(6.3.22)代入式(6.3.17)中,得到

$$\begin{aligned}E_{iy}(\boldsymbol{r}) + \int_p \mathrm{d}S'\{E_y(\boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla'_s g_p(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - g_p(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla'_s E_y(\boldsymbol{r}')\} \\ = \begin{cases}E_y(\boldsymbol{r}) & z > f(x)\\ 0 & z < f(x)\end{cases}\end{aligned} \tag{6.3.24}$$

因此这个积分现在只有一个周期的积分区间。

关于区域1中的格林函数式(6.3.24)与式(6.3.22)类似,有

$$\begin{aligned}\sum_{m=-\infty}^{\infty} g_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}' + \hat{\boldsymbol{x}}mp)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{ix}mp} &= g_{1p}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2p}\sum_n \frac{1}{k_{1zn}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{xn}(x-x')+\mathrm{i}k_{1zn}|z-z'|}\end{aligned} \tag{6.3.25}$$

其中,

$$k_{1zn} = (k_1^2 - k_{xn}^2)^{1/2} \tag{6.3.26}$$

和

$$\begin{aligned}-\int_p \mathrm{d}S'[E_{1y}(\boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla'_s g_{1p}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - g_{1p}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla'_s E_{1y}(\boldsymbol{r}')] \\ = \begin{cases}0 & z > f(x)\\ E_{1y}(\boldsymbol{r}) & z < f(x)\end{cases}\end{aligned} \tag{6.3.27}$$

要注意,积分号前的减号表明,单位矢量 $\hat{n}$ 是由表面垂直指向区域 0 和惠更斯原理要求表面垂直向外指向场点。

从式(6.3.22)和(6.3.25)中周期格林函数的表达式,可以看出散射波以离散 Floquet 模传播,传播方向由式(6.3.23)和(6.3.26)确定。定义 θ_{rn} 为第 n 阶反射 Floquet 模的角,θ_{tn} 为第 n 阶透射 Floquet 模的角,它们的大小由下式确定:

$$k\sin\theta_{rn} = k_{xn} = k\sin\theta_i + n\frac{2\pi}{p} \tag{6.3.28a}$$

$$k_1\sin\theta_{tn} = k_{tx} = k\sin\theta_i + n\frac{2\pi}{p} \tag{6.3.28b}$$

式(6.3.28)中的相位匹配结果示于图 6.3-3。根据图中给出的入射波矢量 k_0,反射波和透射波的 0 阶模式与在平面上一样是相同的。

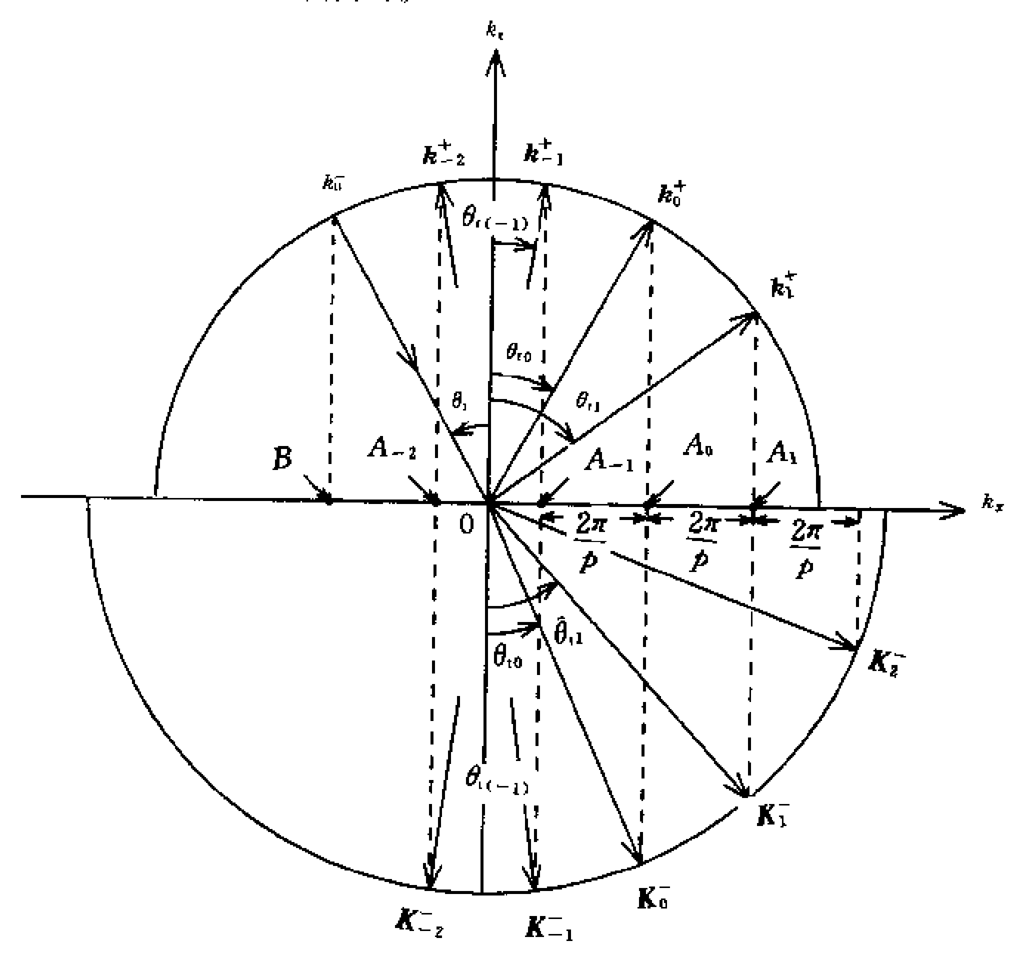


图 6.3-3 k 空间示意图

式(6.3.24)可以通过使 z 大于 f_{max} 或小于 f_{min} 而得到简化,其中 f_{max} 和 f_{min} 分别为表面起伏 $f(x)$ 的最大和最小值。对于 $z > f_{max}$,$|z - z'|$ 成为 $z - z'$;对于 $z < f_{min}$,$|z - z'|$ 成为 $-(z - z')$。因此有:

$$E_y(\boldsymbol{r}) = E_{iy}(\boldsymbol{r}) + \sum_n b_n \frac{e^{i\boldsymbol{k}_n^+\cdot\boldsymbol{r}}}{\sqrt{k_{zn}}} \qquad z > f_{max} \tag{6.3.29a}$$

$$0 = E_{iy}(\boldsymbol{r}) - \sum_n a_n \frac{e^{i\boldsymbol{k}_n^-\cdot\boldsymbol{r}}}{\sqrt{k_{zn}}} \qquad z < f_{min} \tag{6.3.29b}$$

其中,

$$\boldsymbol{k}_n^{\pm} = \hat{\boldsymbol{x}}k_{xn} \pm \hat{\boldsymbol{z}}k_{zn} \tag{6.3.30}$$

为 Floquet 模的波矢量。系数 b_n 和 a_n 与下列积分确定的表面场有关，分别为：

$$b_n = \frac{\mathrm{i}}{2p}\int_p \mathrm{d}S'\left[E_y(\boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla'_s\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_n^+\cdot\boldsymbol{r}'}}{\sqrt{k_{zn}}} - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_n^+\cdot\boldsymbol{r}'}}{\sqrt{k_{zn}}}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla'_s E_y(\boldsymbol{r}')\right] \tag{6.3.31}$$

和

$$a_n = -\frac{\mathrm{i}}{2p}\int_p \mathrm{d}S'\left[E_y(\boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla'_s\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_n^-\cdot\boldsymbol{r}'}}{\sqrt{k_{zn}}} - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_n^-\cdot\boldsymbol{r}'}}{\sqrt{k_{zn}}}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla'_s E_y(\boldsymbol{r}')\right] \tag{6.3.32}$$

类似地，利用式(6.3.27)可以得到：

$$0 = -\sum_n B_n\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{1n}^+\cdot\boldsymbol{r}}}{\sqrt{k_{1zn}}} \qquad z > f_{\max} \tag{6.3.33a}$$

$$E_{1y}(\boldsymbol{r}) = \sum_n A_n\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{1n}^-\cdot\boldsymbol{r}}}{\sqrt{k_{1zn}}} \qquad z < f_{\min} \tag{6.3.33b}$$

其中，

$$\boldsymbol{k}_{1n}^{\pm} = \hat{\boldsymbol{x}}k_{1xn} \pm \hat{\boldsymbol{z}}k_{1zn} \tag{6.3.34}$$

$$B_n = \frac{\mathrm{i}}{2p}\int_p \mathrm{d}S'\left[E_{1y}(\boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla'_s\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{1n}^+\cdot\boldsymbol{r}'}}{\sqrt{k_{1zn}}} - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{1n}^+\cdot\boldsymbol{r}'}}{\sqrt{k_{1zn}}}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla'_s E_{1y}(\boldsymbol{r}')\right] \tag{6.3.35}$$

和

$$A_n = -\frac{\mathrm{i}}{2p}\int_p \mathrm{d}S'\left[E_{1y}(\boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla'_s\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{1n}^-\cdot\boldsymbol{r}'}}{\sqrt{k_{1zn}}} - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{1n}^-\cdot\boldsymbol{r}'}}{\sqrt{k_{1zn}}}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla'_s E_{1y}(\boldsymbol{r}')\right] \tag{6.3.36}$$

其中式(6.3.29b)和(6.3.33a)被称为扩展边界条件(EBC)。如果使观察点在周期表面的开槽区域外，从式(6.3.29b)可以得到

$$E_{iy}(\boldsymbol{r}) = \sum_n a_n\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_n^-\cdot\boldsymbol{r}}}{\sqrt{k_{zn}}} \qquad z < f_{\min}$$

由该式可以导出

$$a_n = \delta_{n0}\sqrt{k_z}E_0 \tag{6.3.37}$$

从式(6.3.33a)得到

$$B_n = 0 \tag{6.3.38}$$

知道了 a_n 和 B_n，就能从式(6.3.32)和(6.3.35)中解出未知表面场，从式(6.3.31)和(6.3.36)又可由表面场确定散射场幅度 b_n 和 A_n。

我们现在应用周期表面 S' 上的切面场边界条件。切向电场的连续性要求

$$E_y(x, z = f(x)) = E_{1y}(x, z = f(x)) \tag{6.3.39}$$

切向磁场的连续性要求

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\nabla_s\times\hat{\boldsymbol{y}}E_y = \hat{\boldsymbol{n}}\times\nabla_s\times\hat{\boldsymbol{y}}E_{1y}$$

或等效为

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla_s E_y = \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla_s E_{1y} \tag{6.3.40}$$

其中，

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\hat{z} - \hat{x}\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{1 + (\mathrm{d}f/\mathrm{d}x)^2}}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\left[\hat{z} - \hat{x}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right]$$

注意,表面场只与 x 有关,将未知场用傅里叶级数展开的形式表示为:

$$E_y(\boldsymbol{r}) = \sum_n 2\alpha_n^s \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{ix} + nK)x} \tag{6.3.41}$$

$$\mathrm{d}S\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla_s E_y(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{i}\mathrm{d}x \sum 2\beta_n^s \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{ix} + nK)x} \tag{6.3.42}$$

其中,$K = 2\pi/p$。选择这种形式的基函数序列比较合适,因为当表面场乘以 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{ix}x}$ 项时,就成为 x 的周期函数(Chuang and Kong,1983)。

将式(6.3.41),(6.3.42)代入式(6.3.32),并定义 $Q_{D1}^{\pm}$和 $Q_{N1}^{\pm}$为具有以下元素的 Dirichlet 和 Neumann 矩阵,这些矩阵元素为:

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{Q}_D^{\pm}]_{mn} &= \pm\frac{1}{p}\int_p \mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_m^{\pm}\cdot\boldsymbol{r}}}{\sqrt{k_{zm}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_{ix} + nK]x} \\ &= \pm\frac{1}{p\sqrt{k_{zm}}}\int_p \mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[(m-n)Kx \pm k_{zm}f(x)]}\end{aligned} \tag{6.3.43a}$$

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{Q}_N^{\pm}]_{mn} &= \pm\frac{(-\mathrm{i})}{p}\int_p \mathrm{d}S\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \left(\nabla_s\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_m^{\pm}\cdot\boldsymbol{r}}}{\sqrt{k_{zm}}}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_{ix} + nK]x} \\ &= \pm\frac{(-1)}{p\sqrt{k_{zm}}}\int_p \mathrm{d}x\left[k_{xm}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \mp k_{zm}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[(m-n)Kx \pm k_{zm}f(x)]} \\ &= \pm\frac{(-1)}{p\sqrt{k_{zm}}}\int_p \mathrm{d}x\left[\frac{k_{xm}(m-n)K}{k_{zm}} \mp k_{zm}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[(m-n)Kx \pm k_{zm}f(x)]} \\ &= \pm\frac{(-k^2 + k_{xm}k_{xn})}{k_{zm}p\sqrt{k_{zm}}}\int_p \mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[(m-n)Kx \pm k_{zm}f(x)]}\end{aligned} \tag{6.3.43b}$$

因此得到矩阵方程为:

$$\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{Q}_D^- \cdot \boldsymbol{\beta}^s - \boldsymbol{Q}_N^- \cdot \boldsymbol{\alpha}^s \tag{6.3.44}$$

类似地,通过式(6.3.35)也可导出矩阵方程,为

$$-\boldsymbol{Q}_{D1}^+ \cdot \boldsymbol{\beta}^s - \boldsymbol{Q}_{N1}^- \cdot \boldsymbol{\alpha}^s = \boldsymbol{B} = 0 \tag{6.3.45}$$

其中,

$$[\boldsymbol{Q}_{D1}^{\pm}]_{mn} = \pm\frac{1}{p\sqrt{k_{1zm}}}\int_p \mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[(m-n)Kx \pm k_{1zm}f(x)]} \tag{6.3.46a}$$

$$[\boldsymbol{Q}_{N1}^{\pm}]_{mn} = \pm\frac{(-k_1^2 + k_{1xm}k_{1xn})}{k_{1zm}\sqrt{k_{1zm}}p}\int_p \mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[(m-n)Kx \pm k_{1zm}f(x)]} \tag{6.3.46b}$$

将式(6.3.45)和(6.3.46)结合,可以从以下的矩阵方程中确定 $\boldsymbol{\alpha}^s$ 和 $\boldsymbol{\beta}^s$:

$$-\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_N^- & \boldsymbol{Q}_D^- \\ \boldsymbol{Q}_{N1}^+ & \boldsymbol{Q}_{D1}^+\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}^s \\ \boldsymbol{\beta}^s\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a} \\ 0\end{bmatrix} \tag{6.3.47}$$

应注意到式右端的 $\boldsymbol{a}$ 已经计算出来并由式(6.3.37)给出。

由式(6.3.47)确定 $\boldsymbol{\alpha}^s$和 $\boldsymbol{\beta}^s$之后,应用式(6.3.43)和(6.3.46)中定义的 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵,式(6.3.31)和(6.3.36)中的散射场幅度就可以计算出来了。向上传播的场的幅度为

$$\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{Q}_D^+ \cdot \boldsymbol{\beta}^b - \boldsymbol{Q}_N^+ \cdot \boldsymbol{\alpha}^b \tag{6.3.48}$$

向下传播的场的幅度为

$$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{Q}_{D1}^- \cdot \boldsymbol{\beta}^b - \boldsymbol{Q}_{N1}^- \cdot \boldsymbol{\alpha}^b \tag{6.3.49}$$

因此,TE 波入射到一个周期介质表面的散射问题得到了完全的解决。TM 入射波的情况可以用相似的方法求解。

对于具有如下正弦变化的粗糙表面

$$f(x) = -h\cos\left(\frac{2\pi}{p}x\right) \tag{6.3.50}$$

$\boldsymbol{Q}^{\pm}$ 矩阵可以用式(6.3.43)和(6.3.47)中的积分计算出来,用贝塞尔函数的形式表示为:

$$[\boldsymbol{Q}_D^{\pm}]_{mn} = \pm\frac{1}{\sqrt{k_{zm}}}(\pm \mathrm{i})^{|m-n|}J_{|m-n|}(k_{zm}h) \tag{6.3.51a}$$

$$[\boldsymbol{Q}_N^{\pm}]_{mn} = \left[\frac{(-k^2 + k_{xm}k_{xn})}{k_{zm}\sqrt{k_{zm}}}\right](\pm \mathrm{i})^{|m-n|}J_{|m-n|}(k_{zm}h) \tag{6.3.51b}$$

$$[\boldsymbol{Q}_{D1}^{\pm}]_{mn} = \pm\frac{1}{\sqrt{k_{1zm}}}(\pm \mathrm{i})^{|m-n|}J_{|m-n|}(k_{1zm}h) \tag{6.3.51c}$$

$$[\boldsymbol{Q}_{N1}^{\pm}]_{mn} = \left[\frac{(-k_1^2 + k_{xm}k_{xn})}{k_{1zm}\sqrt{k_{1zm}}}\right](\pm \mathrm{i})^{|m-n|}J_{|m-n|}(k_{1zm}h) \tag{6.3.51d}$$

对于由单值函数 $z=f(x)$ 定义的一般形式的周期表面,可以用 EBC 方法通过对式(6.3.43)和(6.3.46)进行数值积分来计算 $\boldsymbol{Q}^{\pm}$ 矩阵中的单元。在实际问题中,当表面波纹较深或由周期划分的波纹深度较大时,再应用这些矩阵可能会产生麻烦。

习 题

6.3.1 对于下面的周期表面高度,计算 $\boldsymbol{Q}_D^{\pm}$, $\boldsymbol{Q}_N^{\pm}$, $\boldsymbol{Q}_{D1}^{\pm}$ 和 $\boldsymbol{Q}_{N1}^{\pm}$。

$$f(x) = \begin{cases} h/2 & 0 \leqslant x < p/2 \\ -h/2 & p/2 \leqslant x < p \end{cases}$$

6.4 随机粗糙表面的散射

应用两种解析方法可研究随机粗糙表面的电磁波散射。在基尔霍夫(Kirchhoff)近似方法(KA)中,表面任意一点的场由该点的切面场来近似,因此切面近似要求表面每一点的曲率半径要远大于入射波长。在小扰动方法(SPM)中,假设表面的起伏变化远小于入射波长,并且粗糙表面的坡度也相对较小。

考虑一束平面波入射到一个随机粗糙表面上(见图 6.4-1)。入射波的电场为

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}} = \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}\cdot\boldsymbol{r}}$$

其中,$\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}$ 为入射波矢量,$\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}$ 为电场矢量的极化方向。粗糙表面用随机高度分布 $z=f(\boldsymbol{r}_{\perp})$ 来表示。其中 $\langle f(\boldsymbol{r}_{\perp})\rangle = 0$ 是具有 0 均值的高斯随机变量 $f(\boldsymbol{r}_{\perp}) \geqslant 0$。根据惠更斯原理,观察点的场由边界面的场表示,因此得到区域 0 的散射场和区域 1 的透射场为

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}) = \iint_{S'} \mathrm{d}S' \, \{\mathrm{i}\omega\mu_0 \boldsymbol{G}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot [\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')] + \nabla \times \boldsymbol{G}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot [\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\} \tag{6.4.1a}$$

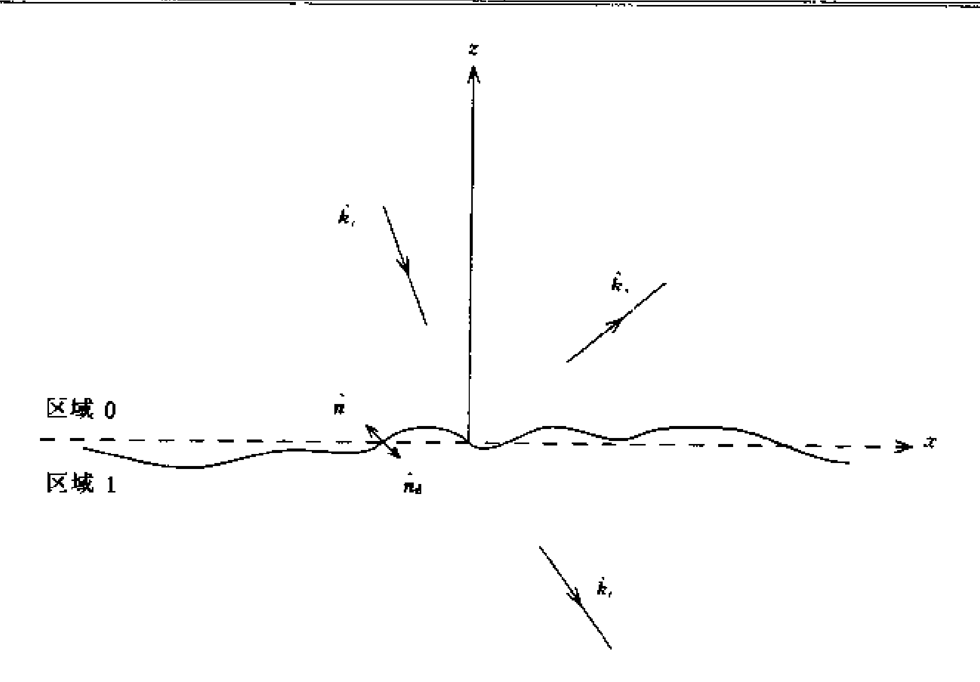


图 6.4-1 随机粗糙表面的散射

$$\boldsymbol{E}_t(\boldsymbol{r}) = \iint_{S'} \mathrm{d}S' \, \{ \mathrm{i}\omega\mu_0 \boldsymbol{GG}_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot [\hat{\boldsymbol{n}}_d \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')] + \nabla \times \boldsymbol{GG}_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot [\hat{\boldsymbol{n}}_d \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')] \} \tag{6.4.1b}$$

其中，S' 为进行表面积分的粗糙表面，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{n}}_d$ 为垂直于粗糙表面的单位矢量，分别指向反射和透射区域（如图 6.4-1）。均匀半空间区域 0 和 1 的并矢格林函数 $\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 和 $\boldsymbol{GG}_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 分别为

$$\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \left[\boldsymbol{II} + \frac{1}{k^2} \nabla\nabla \right] \frac{\mathrm{e}^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{6.4.2a}$$

$$\boldsymbol{GG}_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \left[\boldsymbol{II} + \frac{1}{k_1^2} \nabla\nabla \right] \frac{\mathrm{e}^{ik_1|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{6.4.2b}$$

其中，$k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$，$k_1=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}$。如果观察点在远区，则并矢格林函数可以简化为

$$\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \simeq (\boldsymbol{II} - \hat{\boldsymbol{k}}_s\hat{\boldsymbol{k}}_s) \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{4\pi r} \exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_s \cdot \boldsymbol{r}') \tag{6.4.3}$$

$$\boldsymbol{GG}_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \simeq (\boldsymbol{II} - \hat{\boldsymbol{k}}_t\hat{\boldsymbol{k}}_t) \frac{\mathrm{e}^{ik_1r}}{4\pi r} \exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_t \cdot \boldsymbol{r}') \tag{6.4.4}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{k}}_s$ 和 $\hat{\boldsymbol{k}}_t$ 分别表示区域 0 和 1 的散射和透射方向。

将式(6.4.3)和(6.4.4)代入绕射积分式(6.4.1)，得到反射方向 $\hat{\boldsymbol{k}}_s$ 和透射方向 $\hat{\boldsymbol{k}}_t$ 的场为：

$$\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{i}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}(\boldsymbol{II} - \hat{\boldsymbol{k}}_s\hat{\boldsymbol{k}}_s) \cdot \iint_{S'} \mathrm{d}S' \{ \hat{\boldsymbol{k}}_s \times [\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')] + \eta [\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')] \} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_s \cdot \boldsymbol{r}'} \tag{6.4.5a}$$

$$\boldsymbol{E}_t(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{i}k_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1r}}{4\pi r}(\boldsymbol{II} - \hat{\boldsymbol{k}}_t\hat{\boldsymbol{k}}_t) \cdot \iint_{S'} \mathrm{d}S' \{ \hat{\boldsymbol{k}}_t \times [\hat{\boldsymbol{n}}_d \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')] + \eta_1 [\hat{\boldsymbol{n}}_d \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')] \} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_t \cdot \boldsymbol{r}'} \tag{6.4.5b}$$

其中，η 和 η_1 分别为区域 0 和 1 中的波阻抗。

6.4.1 基尔霍夫(Kirchhoff)近似

首先建立点 $\boldsymbol{r}'$ 的直角坐标系$(\hat{\boldsymbol{p}}_i,\hat{\boldsymbol{q}}_i,\hat{\boldsymbol{k}}_i)$,坐标轴定义为

$$\hat{\boldsymbol{q}}_i=\frac{\hat{\boldsymbol{k}}_i\times\hat{\boldsymbol{n}}}{|\hat{\boldsymbol{k}}_i\times\hat{\boldsymbol{n}}|}\tag{6.4.6a}$$

$$\hat{\boldsymbol{p}}_i=\hat{\boldsymbol{q}}_i\times\hat{\boldsymbol{k}}_i\tag{6.4.6b}$$

其中,$\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r}')=-\hat{\boldsymbol{n}}_d(\boldsymbol{r}')$为在 $\boldsymbol{r}'$点垂直表面指向区域 0 的方向。这些单位矢量是在 $\boldsymbol{r}'$点局作为界面的无限大平面的边界值问题。入射场被分解为局部垂直和局部平行极化场。

入射场的 TE 分量为$(\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{q}}_i)\hat{\boldsymbol{q}}_iE_o\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}'}$,局部反射场为 $R^{\mathrm{TE}}(\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{q}}_i)\hat{\boldsymbol{q}}_iE_o\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}'}$,这里 R^{TE}是 TE 分量的局部菲涅耳反射系数

$$R^{\mathrm{TE}}=\frac{k\cos\theta_{l_i}-\sqrt{k_1^2-k^2\sin^2\theta_{l_i}}}{k\cos\theta_{l_i}+\sqrt{k_1^2-k^2\sin^2\theta_{l_i}}}$$

其中,θ_{l_i}为 $\boldsymbol{r}'$点的局部入射角。与入射场和反射场相对应的磁场为 $\hat{\boldsymbol{k}}_i\times(\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{q}}_i)\hat{\boldsymbol{q}}_iE_o\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}'}/\eta$ 和 $R^{\mathrm{TE}}\hat{\boldsymbol{k}}_r\times(\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{q}}_i)\hat{\boldsymbol{q}}_iE_o\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}'}/\eta$。其中,$\hat{\boldsymbol{k}}_r$为局部反射方向,它与入射方向的关系是

$$\hat{\boldsymbol{k}}_r=\hat{\boldsymbol{k}}_i-2\hat{\boldsymbol{n}}(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_i)\tag{6.4.7}$$

因此,在 $\boldsymbol{r}'$点垂直场分量的切面电场为:

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}=(\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{q}}_i)(\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{q}}_i)(1+R^{\mathrm{TE}})E_o\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}'}\tag{6.4.8a}$$

相应的磁场为:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}&=\frac{1}{\eta}(\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{q}}_i)\hat{\boldsymbol{n}}\times[(\hat{\boldsymbol{k}}_i\times\hat{\boldsymbol{q}}_i)+R^{\mathrm{TE}}(\hat{\boldsymbol{k}}_r\times\hat{\boldsymbol{q}}_i)]E_o\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}'}\\&=-(1-R^{\mathrm{TE}})(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_i)\frac{(\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{q}}_i)}{\eta}\hat{\boldsymbol{q}}_iE_o\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}'}\end{aligned}\tag{6.4.8b}$$

其中,利用了 $\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{q}}_i=0$ 和 $\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_r=-\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_i$ 这个关系。对于局部 TM 波分量,可以重复以上计算。TM 波的局部反射系数为

$$R^{\mathrm{TM}}=\frac{\varepsilon_1k\cos\theta_{l_i}-\varepsilon_0\sqrt{k_1^2-k^2\sin^2\theta_{l_i}}}{\varepsilon_1k\cos\theta_{l_i}+\varepsilon_0\sqrt{k_1^2-k^2\sin^2\theta_{l_i}}}\tag{6.4.9}$$

将局部垂直和局部平行极化的入射波相加,得到

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')=E_o[&(\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{q}}_i)(\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{q}}_i)(1+R^{\mathrm{TE}})+\\&(\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{p}}_i)(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_i)\hat{\boldsymbol{q}}_i(1-R^{\mathrm{TM}})]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}'}\end{aligned}\tag{6.4.10a}$$

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')=\frac{E_o}{\eta}[&-(\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{q}}_i)(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_i)\hat{\boldsymbol{q}}_i(1-R^{\mathrm{TE}})+\\&(\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{p}}_i)(\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{q}}_i)(1+R^{\mathrm{TM}})]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}'}\end{aligned}\tag{6.4.10b}$$

局部入射角可以由下式计算得到

$$\cos\theta_{l_i}=-\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_i\tag{6.4.11}$$

$\boldsymbol{r}'$点的法向矢量为

$$\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r}')=\frac{-\hat{x}\alpha-\hat{y}\beta+\hat{z}}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}}\tag{6.4.12}$$

其中,α,β 分别为$\hat{x}$ 和 $\hat{y}$ 方向的局部坡度,定义为

$$\alpha = \frac{\partial f(x', y')}{\partial x'} \tag{6.4.13a}$$

$$\beta = \frac{\partial f(x', y')}{\partial y'} \tag{6.4.13b}$$

将式(6.4.10)代入(6.4.5)中，经过代数乘法，得到：

$$\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{r}') = \frac{\mathrm{i}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}E_0(\boldsymbol{I\!I} - \hat{\boldsymbol{k}}_s\hat{\boldsymbol{k}}_s)\cdot\int_{A_0}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_\perp \boldsymbol{F}(\alpha,\beta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_s)\boldsymbol{r}'} \tag{6.4.14a}$$

与此类似，对于透射场，可以得到：

$$\boldsymbol{E}_t(\boldsymbol{r}') = -\frac{\mathrm{i}k_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 r}}{4\pi r}E_0(\boldsymbol{I\!I} - \hat{\boldsymbol{k}}_t\hat{\boldsymbol{k}}_t)\cdot\int_{A_0}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_\perp \boldsymbol{N}(\alpha,\beta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_t)\boldsymbol{r}'} \tag{6.4.14b}$$

其中，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(\alpha,\beta) = (1+\alpha^2+\beta^2)^{1/2}\{&-(\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{q}}_i)(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_i)\hat{\boldsymbol{q}}_i(1-R^{\mathrm{TE}}) + \\ &(\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{p}}_i)(\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{q}}_i)(1+R^{\mathrm{TM}}) + \\ &(\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{q}}_i)[\hat{\boldsymbol{k}}_s\times(\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{q}}_i)](1+R^{\mathrm{TE}}) + \\ &(\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{p}}_i)(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_i)(\hat{\boldsymbol{k}}_s\times\hat{\boldsymbol{q}}_i)(1-R^{\mathrm{TM}})\}\end{aligned} \tag{6.4.15a}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}(\alpha,\beta) = (1+\alpha^2+\beta^2)^{1/2}\Big\{&-\frac{\eta_1}{\eta}(\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{q}}_i)(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_i)\hat{\boldsymbol{q}}_i(1-R^{\mathrm{TE}}) + \\ &\frac{\eta_1}{\eta}(\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{p}}_i)(\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{q}}_i)(1+R^{\mathrm{TM}}) + \\ &(\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{q}}_i)[\hat{\boldsymbol{k}}_t\times(\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{q}}_i)](1+R^{\mathrm{TE}}) + \\ &(\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{p}}_i)(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_i)(\hat{\boldsymbol{k}}_s\times\hat{\boldsymbol{q}}_i)(1-R^{\mathrm{TM}})\Big\}\end{aligned} \tag{6.4.15b}$$

要注意，在式(6.4.14)中，绕射积分的积分号内除了相应因子外，其余的项都不是 $\boldsymbol{r}'$ 的显函数，而是坡度 α 和 β 的显函数，而 α 和 β 是 $\boldsymbol{r}'$ 的函数。如同式(6.4.14)中所表示的那样，切面近似的绕射积分不包含阴影和多重散射效应。

展开0坡度的积分项 $\boldsymbol{F}(\alpha,\beta)$ 和 $\boldsymbol{N}(\alpha,\beta)$，得到

$$\boldsymbol{F}(\alpha,\beta) = \boldsymbol{F}(0,0) + \alpha\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha,\beta=0} + \beta\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\beta}\bigg|_{\alpha,\beta=0} + \cdots \tag{6.4.16}$$

$$\boldsymbol{N}(\alpha,\beta) = \boldsymbol{N}(0,0) + \alpha\frac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha,\beta=0} + \beta\frac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial\beta}\bigg|_{\alpha,\beta=0} + \cdots \tag{6.4.17}$$

其中，$\boldsymbol{F}(0,0)$ 和 $\boldsymbol{N}(0,0)$ 是在 $\alpha=\beta=0$ 时的值。对于接近垂直入射的波和具有较小均方根坡度的表面，菲涅耳反射系数随局部入射角的变化较小。如果只保留式(6.4.16)和(6.4.17)中的第一项，可从式(6.4.14)得到：

$$\boldsymbol{E}_s = \frac{\mathrm{i}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}E_0(\boldsymbol{I\!I} - \hat{\boldsymbol{k}}_s\hat{\boldsymbol{k}}_s)\cdot\boldsymbol{F}(0,0)I \tag{6.4.18a}$$

$$\boldsymbol{E}_t = \frac{\mathrm{i}k_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 r}}{4\pi r}E_0(\boldsymbol{I\!I} - \hat{\boldsymbol{k}}_t\hat{\boldsymbol{k}}_t)\cdot\boldsymbol{N}(0,0)I_t \tag{6.4.18b}$$

其中，积分 I 和 I_t 由下式给出：

$$I = \iint_{A_0}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_\perp\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_s)\boldsymbol{r}'} \tag{6.4.19a}$$

$$I_t = \iint_{A_0} d\boldsymbol{r}'_\perp e^{i(\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_t)\cdot\boldsymbol{r}'} \tag{6.4.19b}$$

散射场和透射场可以被分解为一个平均场和场的波动部分，

$$\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_{sm}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\varepsilon}_{sf}(\boldsymbol{r}) \tag{6.4.20a}$$

$$\boldsymbol{E}_t(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_{tm}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\varepsilon}_{tf}(\boldsymbol{r}) \tag{6.4.20b}$$

其中，

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{sf}(\boldsymbol{r})\rangle = \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{tf}(\boldsymbol{r})\rangle = 0$$

$\boldsymbol{E}_{sm}$和 $\boldsymbol{E}_{tm}$分别表示散射场和透射场。总的散射场强度为相干与不相干散射强度的和。

$$\langle |\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{r})|^2\rangle = |\boldsymbol{E}_{sm}|^2 + \langle |\boldsymbol{\varepsilon}_{sf}(\boldsymbol{r})|^2\rangle \tag{6.4.21a}$$

$$\langle |\boldsymbol{E}_t(\boldsymbol{r})|^2\rangle = |\boldsymbol{E}_{tm}|^2 + \langle |\boldsymbol{\varepsilon}_{tf}(\boldsymbol{r})|^2\rangle \tag{6.4.21b}$$

根据式(6.4.18)和(6.4.19)，并且要注意$(\hat{\boldsymbol{p}}_i,\hat{\boldsymbol{q}}_i,\hat{\boldsymbol{k}}_i)$、$(\hat{\boldsymbol{v}}_s,\hat{\boldsymbol{h}}_s,\hat{\boldsymbol{k}}_s)$和$(\hat{\boldsymbol{v}}_t,\hat{\boldsymbol{h}}_t,\hat{\boldsymbol{k}}_t)$是入射、散射和透射系统的三个直角坐标系，将散射场和透射场分别分解为

$$|\boldsymbol{E}_{sm}(\boldsymbol{r})|^2 = \frac{k^2|E_o|^2}{16\pi^2r^2}\left[|\hat{\boldsymbol{v}}_s\cdot\boldsymbol{F}(0,0)|^2 + |\hat{\boldsymbol{h}}_s\cdot\boldsymbol{F}(0,0)|^2\right]|\langle I\rangle|^2 \tag{6.4.22a}$$

$$\langle |\boldsymbol{\varepsilon}_{sf}(\boldsymbol{r})|^2\rangle = \frac{k^2|E_o|^2}{16\pi^2r^2}\left[|\hat{\boldsymbol{v}}_s\cdot\boldsymbol{F}(0,0)|^2 + |\hat{\boldsymbol{h}}_s\cdot\boldsymbol{F}(0,0)|^2\right]D_I \tag{6.4.22b}$$

$$|\boldsymbol{E}_{tm}(\boldsymbol{r})|^2 = \frac{k_1^2|E_o|^2}{16\pi^2r^2}\left[|\hat{\boldsymbol{v}}_t\cdot\boldsymbol{N}(0,0)|^2 + |\hat{\boldsymbol{h}}_t\cdot\boldsymbol{N}(0,0)|^2\right]|\langle I_t\rangle|^2 \tag{6.4.23a}$$

$$\langle |\boldsymbol{\varepsilon}_{tf}(\boldsymbol{r})|^2\rangle = \frac{k_1^2|E_o|^2}{16\pi^2r^2}\left[|\hat{\boldsymbol{v}}_t\cdot\boldsymbol{N}(0,0)|^2 + |\hat{\boldsymbol{h}}_t\cdot\boldsymbol{N}(0,0)|^2\right]D_{I_t} \tag{6.4.23b}$$

其中，

$$D_I = \langle |I|^2\rangle - |\langle I\rangle|^2 \tag{6.4.24a}$$

$$D_{I_t} = \langle |I_t|^2\rangle - |\langle I_t\rangle|^2 \tag{6.4.24b}$$

现在可通过假设一个静态高斯过程确定高度分布函数 $f(\boldsymbol{r}_\perp)$，因此 $f(\boldsymbol{r}_\perp)$的概率密度与粗糙面上的位置 $\boldsymbol{r}_\perp$无关，只具有高斯分布，为

$$p(f(\boldsymbol{r}_\perp)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-f^2/2\sigma^2} \tag{6.4.25}$$

其中，σ 为粗糙表面的标准差。对于表面上的任意两点 $\boldsymbol{r}_{\perp 1}$和 $\boldsymbol{r}_{\perp 2}$，它们的联合概率密度为(Davenport and Root, 1958)

$$p(f_1(\boldsymbol{r}_{\perp 1}),f_2(\boldsymbol{r}_{\perp 2})) = \frac{e^{-(f_1^2-2Cf_1f_2+f_2^2)/2\sigma^2(1-C^2)}}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-C^2}} \tag{6.4.26}$$

其中，C 为两点的相关系数，并且是 $\boldsymbol{r}_{\perp 1}$和 $\boldsymbol{r}_{\perp 2}$的函数。对于一个统计均匀的各向同性表面，C 仅为ρ 的函数，$\rho=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$，因此，

$$\langle f(\boldsymbol{r}_{\perp 1})f(\boldsymbol{r}_{\perp 2})\rangle = \sigma^2 C(\rho) \tag{6.4.27}$$

其中，$C(0)=1$ 和 $C(\infty)=0$。很容易得到

$$\langle e^{i\nu f(\boldsymbol{r}_\perp)}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} df\, p(f)e^{i\nu f} = e^{-\sigma^2\nu^2/2} \tag{6.4.28}$$

$$\langle e^{i\nu[f_1(\boldsymbol{r}_{\perp 1})-f_2(\boldsymbol{r}_{\perp 2})]}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} df_1 df_2\, p(f_1,f_2)e^{i\nu(f_1-f_2)}$$

$$= e^{-\sigma^2 v^2[1-C(\rho)]} \tag{6.4.29}$$

$|\langle I\rangle|^2, D_1, |\langle I_1\rangle|^2$ 和 D_{I_1} 的表达式可以根据高度分布的统计矩得到。

积分 I 由下式给出：

$$I = \iint_{A_o} \mathrm{d}\boldsymbol{r}'_\perp e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{d\perp}\cdot \boldsymbol{r}'_\perp} e^{\mathrm{i}k_{dz} f(\boldsymbol{r}'_\perp)} \tag{6.4.30}$$

其中，

$$\boldsymbol{k}_\mathrm{d} = \boldsymbol{k}_\mathrm{i} - \boldsymbol{k}_\mathrm{s} = \hat{x}k_\mathrm{dx} + \hat{y}k_\mathrm{dy} + \hat{z}k_\mathrm{dz} \tag{6.4.31}$$

I 的集平均为

$$\langle I\rangle = \iint_{A_o} \mathrm{d}\boldsymbol{r}'_\perp e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{d\perp}\cdot \boldsymbol{r}'_\perp}\langle e^{\mathrm{i}k_{dz} f(\boldsymbol{r}'_\perp)}\rangle$$

$$= 4L_xL_y e^{-k_{dz}^2\sigma^2/2}\operatorname{sinc}(k_\mathrm{dx}L_x)\operatorname{sinc}(k_\mathrm{dy}L_y) \tag{6.4.32}$$

其中 sinc $x = \sin x/x$。而且 $2L_x$ 和 $2L_y$ 是粗糙表面在 $\hat{x}$，$\hat{y}$ 方向被照亮的长度，所以 $A_o = 4/L_xL_y$。如果使上式中的 L_x 和 L_y 趋于无穷，得到

$$|\langle I\rangle|^2 = 4\pi^2 A_o e^{-k_{dz}^2\sigma^2}\delta(k_\mathrm{dx})\delta(k_\mathrm{dy}) \tag{6.4.33}$$

其中利用了恒等式

$$\lim_{L_x, L_y\to\infty}\frac{L_xL_y}{\pi^2}\operatorname{sinc}(k_\mathrm{dx}L_x)\operatorname{sinc}(k_\mathrm{dy}L_y) = \delta(k_\mathrm{dx})\delta(k_\mathrm{dy})$$

$\langle II^*\rangle$ 的积分由下式给出

$$\langle II^*\rangle = \iint_{A_o}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_\perp \iint_{A_o}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_\perp e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{d\perp}\cdot(\boldsymbol{r}_\perp - \boldsymbol{r}'_\perp)}\langle e^{\mathrm{i}k_{dz}[f(\boldsymbol{r}_\perp)-f(\boldsymbol{r}'_\perp)]}\rangle$$

应用式(6.4.29)，并对求差项进行通常的变量变换，将求和坐标减少一半，得到

$$\langle II^*\rangle = \int_{-2L_x}^{2L_x}\mathrm{d}x\int_{-2L_y}^{2L_y}\mathrm{d}y(2L_x - |x|)(2L_y - |y|)\cdot$$

$$e^{\mathrm{i}k_{dx}x+\mathrm{i}k_{dy}y} e^{-k_{dz}^2\sigma^2[1-C(\rho)]} \tag{6.4.34}$$

假设相关函数 $C(\rho)$ 具有高斯形式，为

$$C(\rho) = e^{-\rho^2/l^2} \tag{6.4.35}$$

其中，l 是横截面上的随机变量 $f(\boldsymbol{r}_\perp)$ 的相关长度。

积分 I 的标准差现在可以解析地给出。首先要注意 $|\langle I\rangle|^2$ 也可以表示为

$$|\langle I\rangle|^2 = \int_{-2L_x}^{2L_x}\mathrm{d}x\int_{-2L_y}^{2L_y}\mathrm{d}y(2L_x - |x|)(2L_y - |y|)e^{\mathrm{i}k_{dx}x+\mathrm{i}k_{dy}y}e^{-\sigma^2k_{dz}^2} \tag{6.4.36}$$

由式(6.4.35)，我们注意到积分 $\langle II^*\rangle - |\langle I\rangle|^2$ 的贡献来自于 l 同级数的 $|x|$ 和 $|y|$。而且对于大于几个 l 的 $\rho = (x^2+y^2)^{1/2}$，被积函数实际上为零。假设被照射的粗糙表面包含多个相关长度，$L_x, L_y \gg l$，因此得到：

$$D_I = \langle II^*\rangle - |\langle I\rangle|^2$$

$$= A_o\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\{e^{-\sigma^2k_{dz}^2[1-C(\rho)]} - e^{-\sigma^2k_{dz}^2}\}e^{\mathrm{i}k_{dx}x+\mathrm{i}k_{dy}y} \tag{6.4.37}$$

将式(6.4.37)中的积分转换到柱坐标系，并且完成对 $\mathrm{d}\phi$ 的积分，得到贝塞尔函数 $J_0(k_\rho\rho)$，其中被积函数中的 $k_\rho = (k_\mathrm{dx}^2 + k_\mathrm{dy}^2)^{1/2}$。进一步作级数展开

$$e^{-\sigma^2 k_{dz}^2[1-C(\rho)]} - e^{-\sigma^2 k_{dz}^2} = e^{-\sigma^2 k_{dz}^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\sigma^2 k_{dz}^2)^m}{m!} e^{-m\rho^2/l^2} \tag{6.4.38}$$

利用积分恒等式

$$\int_0^{\infty} d\rho \rho J_0(k_\rho \rho) e^{-m\rho^2/l^2} = \frac{l^2}{2m} e^{-k_\rho^2 l^2/4m} \tag{6.4.39}$$

在式(6.4.37)中应用式(6.4.38)和(6.4.39),得到

$$D_I = \langle II^* \rangle - |\langle I \rangle|^2$$
$$= \pi A_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(k_{dz}^2 \sigma^2)^m}{m!m} l^2 e^{-(k_{dx}^2 + k_{dy}^2) l^2/4m} e^{-\sigma^2 k_{dz}^2} \tag{6.4.40}$$

与此类似,也可以得到$|\langle I_t \rangle|^2$和D_{I_t}的表达式,分别为

$$|\langle I_t \rangle|^2 = 4\pi^2 A_0 e^{-\sigma^2 k_{tdz}^2} \delta(k_{tdx}) \delta(k_{tdy}) \tag{6.4.41}$$

$$D_{I_t} = \pi A_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(k_{tdz}^2 \sigma^2)^m}{m!m} l^2 e^{-(k_{tdx}^2 + k_{tdy}^2) l^2/4m} e^{-\sigma^2 k_{tdz}^2} \tag{6.4.42}$$

其中,

$$\boldsymbol{k}_{td} = \boldsymbol{k}_i - \boldsymbol{k}_t = \hat{x} k_{tdx} + \hat{y} k_{tdy} + \hat{z} k_{tdz}$$

对于反射强度的双基地散射系数定义为

$$\gamma_{ab}^r(\hat{\boldsymbol{k}}_s, \hat{\boldsymbol{k}}_i) = \frac{4\pi r^2 (S_r)_a}{A_0 \cos\theta_i (S_0)_b} \qquad (a, b = v, h) \tag{6.4.43}$$

其中,下标b代表入射波的极化,下标a代表散射波的极化,S_0为入射波的坡印廷功率密度,S_r为散射波的功率密度,A_0是投影到x-y粗糙表面的面积,θ_i为入射角。从式(6.4.18)和(6.4.22),可以计算相应于垂直极化和水平极化入射场的相干和不相干散射强度。使

$$\boldsymbol{F}_b(0,0) = \boldsymbol{F}(0,0)|_{\hat{e}_i = \hat{b}_i}$$

$\boldsymbol{F}(0,0)$可以通过设置式(6.4.12)和(6.4.15a)中的$\alpha = \beta = 0$计算。下面将其与$\hat{\boldsymbol{v}}_s$和$\hat{\boldsymbol{h}}_s$点乘,因此有

$$\hat{\boldsymbol{h}}_s \cdot \boldsymbol{F}_h(0,0) = [(1 - R_0^{TE})\cos\theta_i - (1 + R_0^{TE})\cos\theta_s]\cos(\phi_s - \phi_i) \tag{6.4.44a}$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}_s \cdot \boldsymbol{F}_h(0,0) = [(1 - R_0^{TE})\cos\theta_i \cos\theta_s - (1 + R_0^{TE})]\sin(\phi_s - \phi_i) \tag{6.4.44b}$$

$$\hat{\boldsymbol{h}}_s \cdot \boldsymbol{F}_v(0,0) = [(1 + R_0^{TM}) - (1 - R_0^{TM})\cos\theta_i \cos\theta_s]\sin(\phi_s - \phi_i) \tag{6.4.44c}$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}_s \cdot \boldsymbol{F}_v(0,0) = [-(1 + R_0^{TM})\cos\theta_s + (1 - R_0^{TM})\cos\theta_i]\cos(\phi_s - \phi_i) \tag{6.4.44d}$$

其中,R_0^{TM}和R_0^{TE}分别是垂直极化和水平极化入射波情况下光滑平面的菲涅耳反射系数。考虑到式(6.4.21a),双基地散射系数γ_{ab}^r可以分解为相干部分和非相干部分

$$\gamma_{ab}^r(\hat{\boldsymbol{k}}_s, \hat{\boldsymbol{k}}_i) = \frac{k^2}{4\pi A_0 \cos\theta_i} |\hat{\boldsymbol{a}}_s \cdot \boldsymbol{F}_b(0,0)|^2 \{|\langle I \rangle|^2 + D_I\} \tag{6.4.45}$$

其中,第一项是相干项。利用式(6.4.33)和(6.4.44)以及

$$\delta(k_{dx})\delta(k_{dy}) = \frac{\delta(\theta_s - \theta_i)\delta(\phi_s - \phi_i)}{(k^2 \sin\theta_i \cos\theta_i)} \tag{6.4.46}$$

得到相干项为

$$\frac{k^2}{4\pi A_0 \cos\theta_i} |\hat{\boldsymbol{a}}_s \cdot \boldsymbol{F}_b(0,0)|^2 |\langle I \rangle|^2$$

$$= \frac{4\pi \mid R_{bo} \mid^2}{\sin\theta_i} e^{-4k^2\sigma^2\cos^2\theta_i} \cdot \delta(\theta_s - \theta_i)\delta(\phi_s - \phi_i)\delta_{ab} \tag{6.4.47}$$

因此相干波只在镜面方向存在。对于透射波,也有类似的推导和现象。

6.4.2 几何光学解

式(6.4.14)中的绕射积分也可由驻留相位法计算,该方法可导出几何光学解。此式中的指数相位因子为

$$\psi = \boldsymbol{k}_d \cdot \boldsymbol{r}' = k_{dx}x' + \cdot k_{dy}y' + k_{dz}f(x', y')$$

设$\partial\psi/\partial x' = 0$,和$\partial\psi/\partial y' = 0$,则得到驻留相位点为

$$\alpha_o = -\frac{k_{dx}}{k_{dz}}$$

$$\beta_o = -\frac{k_{dy}}{k_{dz}}$$

其中,α_o, β_o是镜面反射时入射波和散射波方向的坡度。这可以从式(6.4.12)中看出

$$\hat{\boldsymbol{n}}(\alpha_o, \beta_o) = (\hat{\boldsymbol{k}}_s - \hat{\boldsymbol{k}}_i) / \mid \hat{\boldsymbol{k}}_d \mid$$

如果用α_o, β_o代替表面坡度α, β,则从式(6.4.14)得到

$$\langle \mid \boldsymbol{E}_s \mid^2 \rangle = \frac{k^2 \mid E_o \mid^2}{16\pi^2 r^2} \left| (\boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{k}}_s \hat{\boldsymbol{k}}_s) \cdot \boldsymbol{F}(\alpha_o, \beta_o) \right|^2 \langle H^* \rangle \tag{6.4.48}$$

其中,

$$\langle H^* \rangle = \langle \iint_{A_o} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_\perp \iint_{A_o} \mathrm{d}\boldsymbol{r}'_\perp e^{i\boldsymbol{k}_{d\perp} \cdot (\boldsymbol{r}_\perp - \boldsymbol{r}'_\perp)} e^{ik_{dz}[f(\boldsymbol{r}_\perp) - f(\boldsymbol{r}'_\perp)]} \rangle \tag{6.4.49}$$

以上积分可以用渐近方法解出。对于较大的k值,积分的贡献主要来自靠近(x, y)的(x', y')区域。将$f(x', y')$对(x, y)展开如下。

$$f(x', y') = f(x, y) + \alpha(x' - x) + \beta(y' - y) + \cdots$$

然后替换积分变量

$$u = k(x - x')$$

$$v = k(y - y')$$

得到

$$\langle H^* \rangle = \frac{1}{k^2} A_o \iint \mathrm{d}u \mathrm{d}v e^{iu(qx + \alpha qz) + iv(qy + \beta qz) + O(1/k)}$$

忽略$O(1/k)$和更高阶的项,得到

$$\langle H^* \rangle = \frac{4\pi^2 A_o}{k^2} \langle \delta(q_x + \alpha q_z) \delta(q_y + \beta q_z) \rangle$$

因此,有

$$\langle \lim_{k \to \infty} H^* \rangle = \frac{4\pi^2 A_o}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta \delta(q_x + \alpha q_z) \delta(q_y + \beta q_z) p(\alpha, \beta)$$

其中$p(\alpha, \beta)$为表面坡度的概率密度函数。进一步计算得到

$$\langle \lim_{k \to \infty} H^* \rangle = \frac{4\pi^2 A_o}{k_{dz}^2} p\left(-\frac{k_{dx}}{k_{dz}}, -\frac{k_{dy}}{k_{dz}} \right) \tag{6.4.50}$$

对于高斯随机粗糙表面,有

$$p(\alpha,\beta)=\frac{1}{2\pi\sigma^2|C''(0)|}\exp\left[-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\sigma^2|C''(0)|}\right]\tag{6.4.51}$$

其中,σ 为粗糙表面高度的标准差,$C''(0)$为点 $\rho=0$ 处相关函数的二次导数。因此 $\sigma^2|C''(0)|$ 为均方表面坡度 s^2,对于如同式(6.4.35)中的具有相关长度 l 的高斯相关表面,s^2 为

$$s^2=\sigma^2|C''(0)|=2\frac{\sigma^2}{l^2}$$

将式(6.4.51)代入(6.4.50)中,得到

$$\langle H^*\rangle=\frac{2\pi A_0}{k_{dz}^2\sigma^2|C''(0)|}e^{-(k_{dz}^2+k_{dy}^2)/2k_{dz}^2\sigma^2|C''(0)|}\tag{6.4.52}$$

计算$\langle H^*\rangle$的另一方法是首先进行集平均,然后用近似方法计算积分。根据式(6.4.34)得到下式。

$$\langle H^*\rangle=\int_{-2L_x}^{2L_x}dx\int_{-2L_y}^{2L_y}dy(2L_x-|x|)(2L_y-|y|)e^{i\boldsymbol{k}_{d\perp}\cdot\boldsymbol{r}}-e^{-k_{dz}^2\sigma^2[1-C(\rho)]}\tag{6.4.53}$$

因为 $k_{dz}^2\delta^2\gg1$,积分的大部分贡献来自原点附近。因此,展开关于原点的积分得到 $1-C(\rho)\approx\rho^2|C''(0)|/2$,并将其代入式(6.4.53),利用式(6.4.39)中的积分恒等式可以很容易计算上式的积分。$\langle H^*\rangle$的最后结果与式(6.4.52)相同。

对于 b 极化入射场,a_s 极化的散射强度由下式给出

$$\langle|E_s(\boldsymbol{r})|^2\rangle=\frac{k^2|E_0|^2}{16\pi^2r^2}|\hat{\boldsymbol{a}}_s\cdot\boldsymbol{F}_b(\alpha_0,\beta_0)|^2\langle H^*\rangle\tag{6.4.54}$$

其中,

$$\boldsymbol{F}_b(\alpha_0,\beta_0)=\boldsymbol{F}(\alpha_0,\beta_0)\big|_{\hat{e}_i=\hat{b}}$$

应用式(6.4.15a),得到

$$|\hat{\boldsymbol{a}}_s\cdot\boldsymbol{F}_b(\alpha_0,\beta_0)|^2=\frac{|\boldsymbol{k}_d|^4}{k^2|\hat{\boldsymbol{k}}_i\times\hat{\boldsymbol{k}}_s|^4k_{dz}^2}f_{ba}$$

其中,

$$f_{vv}=|(\hat{\boldsymbol{h}}_s\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_i)(\hat{\boldsymbol{h}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_s)R^{TE}+(\hat{\boldsymbol{v}}_s\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_i)(\hat{\boldsymbol{v}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_s)R^{TM}|^2\tag{6.4.55a}$$

$$f_{hv}=|(\hat{\boldsymbol{v}}_s\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_i)(\hat{\boldsymbol{h}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_s)R^{TE}+(\hat{\boldsymbol{h}}_s\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_i)(\hat{\boldsymbol{v}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_s)R^{TM}|^2\tag{6.4.55b}$$

$$f_{vh}=|(\hat{\boldsymbol{h}}_s\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_i)(\hat{\boldsymbol{v}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_s)R^{TE}-(\hat{\boldsymbol{v}}_s\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_i)(\hat{\boldsymbol{h}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_s)R^{TM}|^2\tag{6.4.55c}$$

$$f_{hh}=|(\hat{\boldsymbol{v}}_s\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_i)(\hat{\boldsymbol{v}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_s)R^{TE}+(\hat{\boldsymbol{h}}_s\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_i)(\hat{\boldsymbol{h}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_s)R^{TM}|^2\tag{6.4.55d}$$

其中,R^{TM}和 R^{TE}是在 $\boldsymbol{n}$ 方向计算得到的。

$$\hat{\boldsymbol{n}}=\frac{\hat{\boldsymbol{x}}k_{dx}/k_{dz}+\hat{\boldsymbol{y}}k_{dy}/k_{dz}+\hat{\boldsymbol{z}}}{(k_{dx}^2/k_{dz}^2+k_{dy}^2/k_{dz}^2+1)^{1/2}}$$

考虑到式(6.4.43)和(6.4.52),反射强度的双基站散射系数为:

$$\gamma_{ab}^r(\hat{\boldsymbol{k}}_s,\hat{\boldsymbol{k}}_i)=\frac{f_{ab}|\boldsymbol{k}_d|^4}{\cos\theta_i|\hat{\boldsymbol{k}}_i\times\hat{\boldsymbol{k}}_s|^4k_{dz}^4}\frac{e^{-(k_{dx}^2+k_{dy}^2)/2k_{dz}^2\sigma^2|C''(0)|}}{2\sigma^2|C''(0)|}\tag{6.4.56}$$

在后向散射方向,$\hat{\boldsymbol{k}}_s=-\hat{\boldsymbol{k}}_i$。后向散射截面定义为:

$$\sigma_{ab}(\hat{\boldsymbol{k}}_i)=\cos\theta_i\gamma_{ab}^r(-\hat{\boldsymbol{k}}_i,\hat{\boldsymbol{k}}_i)\tag{6.4.57}$$

从式(6.4.56)可以得到:

$$\sigma_{hh}(\theta_i)=\sigma_{vv}(\theta_i)=\frac{|R|^2e^{\arctan^2\theta_i/2\sigma^2|C''(0)|}}{\cos^4\theta_i2\sigma^2|C''(0)|}\tag{6.4.58}$$

$$\sigma_{vh}(\theta_i) = \sigma_{hv}(\theta_i) = 0 \tag{6.4.59}$$

其中,R 是垂直入射的反射系数。可以从式(6.4.59)中看出,后向散射方向没有发生退极化现象。

6.4.3 小扰动方法

在小扰动方法中,应用惠更斯原理和消光定理,可以得到以下公式

$$\iint_{S'} \mathrm{d}S' \left\{ \mathrm{i}\omega\mu_o \boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot [\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')] + \nabla \times \boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot [\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')] \right\}$$

$$+ \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r}) & z > f(\boldsymbol{r}_\perp) \quad (6.4.60\text{a}) \\ 0 & z > f(\boldsymbol{r}_\perp) \quad (6.4.60\text{b}) \end{cases}$$

$$\iint_{S'} \mathrm{d}S' \left\{ \mathrm{i}\omega\mu_1 \boldsymbol{GG}_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot [\hat{\boldsymbol{n}}_d \times \boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{r}')] + \nabla \times \boldsymbol{GG}_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot [\hat{\boldsymbol{n}}_d \times \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}')] \right\}$$

$$= \begin{cases} 0 & z > f(\boldsymbol{r}_\perp) \quad (6.4.61\text{a}) \\ \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}) & z > f(\boldsymbol{r}_\perp) \quad (6.4.61\text{b}) \end{cases}$$

因为切面场是连续的,定义表面场的末知参数为

$$\mathrm{d}S'\eta\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}') = \mathrm{d}\boldsymbol{r}'_\perp \hat{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{r}'_\perp) = \mathrm{d}S'\eta\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{r}') \tag{6.4.62a}$$

$$\mathrm{d}S'\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') = \mathrm{d}\boldsymbol{r}'_\perp \hat{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{r}'_\perp) = \mathrm{d}S'\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}') \tag{6.4.62b}$$

下面应用并矢格林函数的积分形式(6.6.26)(Zuniga and Kong,1980)。

$$\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\hat{z}\hat{z}\frac{\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{k_0^2} + \begin{cases} \dfrac{\mathrm{i}}{8\pi^2}\displaystyle\iint \mathrm{d}^2\boldsymbol{k}_\perp \frac{1}{k_z}[\hat{\boldsymbol{e}}(k_z)\hat{\boldsymbol{e}}(k_z) + \hat{\boldsymbol{h}}(k_z)\hat{\boldsymbol{h}}(k_z)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} & z > z' \\ \dfrac{\mathrm{i}}{8\pi^2}\displaystyle\iint \mathrm{d}^2\boldsymbol{k}_\perp \frac{1}{k_z}[\hat{\boldsymbol{e}}(-k_z)\hat{\boldsymbol{e}}(-k_z) + \hat{\boldsymbol{h}}(-k_z)\hat{\boldsymbol{h}}(-k_z)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} & z < z' \end{cases}$$

其中,$\hat{\boldsymbol{e}}(-k_z) = \hat{\boldsymbol{e}}(k_z)$,$\hat{\boldsymbol{h}}(-k_z) = \hat{\boldsymbol{e}} \times \hat{\boldsymbol{k}}_1 k$。对于 $z < f_{\min}$计算式(6.4.60b),对于 $z > f_{\max}$计算式(6.4.61a),因此得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_i(r) = {} & \frac{\mathrm{i}}{8\pi^2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}_\perp \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}_\perp}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}\frac{k}{k_z}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'_\perp \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}'_\perp}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z f(\boldsymbol{r}'_\perp)} \cdot \\ & \{[\hat{\boldsymbol{e}}(-k_z)\hat{\boldsymbol{e}}(-k_z) + \hat{\boldsymbol{h}}(-k_z)\hat{\boldsymbol{h}}(-k_z)] \cdot \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}'_\perp) + \\ & [-\hat{\boldsymbol{h}}(-k_z)\hat{\boldsymbol{e}}(-k_z) + \hat{\boldsymbol{e}}(-k_z)\hat{\boldsymbol{h}}(-k_z)] \cdot \boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}_\perp{}')\} \end{aligned} \tag{6.4.63a}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{\mathrm{i}}{8\pi^2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}_\perp \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}_\perp}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1z} z}\frac{k_1}{k_{1z}}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'_\perp \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}'_\perp}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{1z} f(\boldsymbol{r}'_\perp)} \cdot \\ & \left\{\frac{k}{k_1}\left[\hat{\boldsymbol{e}}_1(k_{1z})\hat{\boldsymbol{e}}_1(k_{1z}) + \hat{\boldsymbol{h}}_1(k_{1z})\hat{\boldsymbol{h}}_1(k_{1z})\right] \cdot \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}'_\perp) + \right. \\ & \left. \left[-\hat{\boldsymbol{h}}_1(k_{1z})\hat{\boldsymbol{e}}_1(k_{1z}) + \hat{\boldsymbol{e}}_1(k_{1z})\hat{\boldsymbol{h}}_1(k_{1z})\right] \cdot \boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}'_\perp)\right\} \end{aligned} \tag{6.4.63b}$$

以上两式是扩展的边界条件,可以将其与式(6.4.62)的以下结果一起用于解决表面场的问题。从式(6.4.62)能够得出

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}'_\perp) \cdot \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}'_\perp) = 0 \tag{6.4.64a}$$

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}'_\perp) \cdot \boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}'_\perp) = 0 \tag{6.4.64b}$$

应用式(6.4.12),(6.4.64)可以重新写为

$$a_z(\boldsymbol{r}'_\perp) = \left[\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial f(\boldsymbol{r}'_\perp)}{\partial x'} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial f(\boldsymbol{r}'_\perp)}{\partial y'}\right]\cdot \boldsymbol{a}_\perp(\boldsymbol{r}'_\perp) \tag{6.4.65a}$$

$$b_z(\boldsymbol{r}'_\perp) = \left[\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial f(\boldsymbol{r}'_\perp)}{\partial x'} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial f(\boldsymbol{r}'_\perp)}{\partial y'}\right]\cdot \boldsymbol{b}_\perp(\boldsymbol{r}'_\perp) \tag{6.4.65b}$$

其中，a_z 和 b_z 是 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的 z 分量。

一旦得到了表面场，可以立即从式(6.4.60a)得到区域 0 的散射场为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{8\pi^2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}_\perp\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}_\perp+\mathrm{i}k_z z}\frac{k}{k_z}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'_\perp\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}'_\perp-\mathrm{i}k_z f(\boldsymbol{r}'_\perp)}\cdot \\ \{[\hat{\boldsymbol{e}}(k_z)\hat{\boldsymbol{e}}(k_z)+\hat{\boldsymbol{h}}(k_z)\hat{\boldsymbol{h}}(k_z)]\cdot\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}'_\perp)+ \\ [-\hat{\boldsymbol{h}}(k_z)\hat{\boldsymbol{e}}(k_z)+\hat{\boldsymbol{e}}(k_z)\hat{\boldsymbol{h}}(k_z)]\cdot\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}'_\perp)\}\end{aligned} \tag{6.4.66}$$

为了解出表面场，小扰动方法利用了级数展开，定义

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}'_\perp) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\boldsymbol{a}^{(m)}(\boldsymbol{r}'_\perp) \tag{6.4.67a}$$

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}'_\perp) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\boldsymbol{b}^{(m)}(\boldsymbol{r}'_\perp) \tag{6.4.67b}$$

其中，$\boldsymbol{a}^m$ 和 $\boldsymbol{b}^m$ 是 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的 $\boldsymbol{m}$ 阶解。另外的一组展开式定义为：

$$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}k_z f(\boldsymbol{r}'_\perp)} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}[\pm \mathrm{i}k_z f(\boldsymbol{r}'_\perp)]^m \tag{6.4.68a}$$

$$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}k_{1z} f(\boldsymbol{r}'_\perp)} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}[\pm \mathrm{i}k_{1z} f(\boldsymbol{r}'_\perp)]^m \tag{6.4.68b}$$

在小扰动方法(SPM)中，f 和它的各级导数被看为小参数。将式(6.4.67)(6.4.68)代入式(6.4.63)，得到关于不同阶数解的一组方程。从式(6.4.65)和(6.4.67)可以得到：

$$a_z^{(0)}(\boldsymbol{r}'_\perp) = b_z^{(0)}(\boldsymbol{r}'_\perp) = 0 \tag{6.4.69a}$$

$$a_z^{(m)}(\boldsymbol{r}'_\perp) = m\left(\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial f(\boldsymbol{r}'_\perp)}{\partial x'} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial f(\boldsymbol{r}'_\perp)}{\partial y'}\right)\cdot \boldsymbol{a}_\perp^{(m-1)}(\boldsymbol{r}'_\perp) \tag{6.4.69b}$$

$$b_z^{(m)}(\boldsymbol{r}'_\perp) = m\left(\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial f(\boldsymbol{r}'_\perp)}{\partial x'} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial f(\boldsymbol{r}'_\perp)}{\partial y'}\right)\cdot \boldsymbol{b}_\perp^{(m-1)}(\boldsymbol{r}'_\perp) \tag{6.4.69c}$$

总而言之，SPM 的假设条件是

$$k_z f(\boldsymbol{r}'_\perp),\ k_{1z} f(\boldsymbol{r}'_\perp),\quad \frac{\partial f}{\partial x'},\quad \frac{\partial f}{\partial y'} \ll 1 \tag{6.4.70}$$

将式(6.4.67)和(6.4.68)代入到式(6.4.63)和(6.4.65)中，并使相同阶数的项相等，可以求出各阶解。下面将计算零阶和一阶的散射场。

零阶解

我们首先定义如下的直角坐标系$(\hat{\boldsymbol{q}}_i,\hat{\boldsymbol{p}}_i,\hat{\boldsymbol{z}}_i)$：

$$\hat{\boldsymbol{q}}_i = \hat{\boldsymbol{x}}\frac{k_{iy}}{k_{i\rho}} - \hat{\boldsymbol{y}}\frac{k_{ix}}{k_{i\rho}} = \hat{\boldsymbol{e}}(k_{iz}) \tag{6.4.71}$$

并且 $\hat{\boldsymbol{z}}_i=\hat{\boldsymbol{z}}$，$\hat{\boldsymbol{p}}_i=\hat{\boldsymbol{z}}_i\times\hat{\boldsymbol{q}}_i=(\hat{\boldsymbol{x}}k_{ix}+\hat{\boldsymbol{y}}k_{iy})/k_{\rho i}$。其中，$k_{\rho i}^2=k_{ix}^2+k_{iy}^2$并使

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}'_\perp) = \hat{\boldsymbol{q}}_i a_q(\boldsymbol{r}'_\perp) + \hat{\boldsymbol{p}}_i a_p(\boldsymbol{r}'_\perp) + \hat{\boldsymbol{z}}_i a_z(\boldsymbol{r}'_\perp) \tag{6.4.72a}$$

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}'_\perp) = \hat{\boldsymbol{q}}_i b_q(\boldsymbol{r}'_\perp) + \hat{\boldsymbol{p}}_i b_p(\boldsymbol{r}'_\perp) + \hat{\boldsymbol{z}}_i b_z(\boldsymbol{r}'_\perp) \tag{6.4.72b}$$

还已知入射电场为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}) &= \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}} E_{0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}\perp}\cdot \boldsymbol{r}_{\perp} - \mathrm{i}k_{\mathrm{i}z}z} \\ &= \frac{\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}}{4\pi^{2}} \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}_{\perp}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\perp}\cdot \boldsymbol{r}_{\perp} - \mathrm{i}k_{z}z} \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'_{\perp}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}\perp}\cdot \boldsymbol{r}'_{\perp} - \mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\perp}\cdot \boldsymbol{r}'_{\perp}} \end{aligned} \tag{6.4.73}$$

将式(6.4.73)代入式(6.4.63a)中,得到

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}\perp}\cdot \boldsymbol{r}'_{\perp}} = \frac{k}{2k_{\mathrm{i}z}} \{ & [\hat{\boldsymbol{e}}(-k_{\mathrm{i}z})\hat{\boldsymbol{e}}(-k_{\mathrm{i}z}) + \hat{\boldsymbol{h}}(-k_{\mathrm{i}z})\hat{\boldsymbol{h}}(-k_{\mathrm{i}z})] \cdot \boldsymbol{a}_{\perp}^{(0)}(\boldsymbol{r}'_{\perp}) + \\ & [-\hat{\boldsymbol{h}}(-k_{\mathrm{i}z})\hat{\boldsymbol{e}}(-k_{\mathrm{i}z}) + \hat{\boldsymbol{e}}(-k_{\mathrm{i}z})\hat{\boldsymbol{h}}(k_{\mathrm{i}z})]\} \cdot \boldsymbol{b}_{\perp}^{(0)}(\boldsymbol{r}'_{\perp}) \} \end{aligned} \tag{6.4.74a}$$

代入(6.4.63b),我们得到

$$\begin{aligned} & [\hat{\boldsymbol{e}}_{1}(k_{1\mathrm{i}z})\hat{\boldsymbol{e}}_{1}(k_{1\mathrm{i}z}) + \hat{\boldsymbol{h}}_{1}(k_{1\mathrm{i}z})\hat{\boldsymbol{h}}_{1}(k_{1\mathrm{i}z})] \cdot \boldsymbol{a}_{\perp}^{(0)}(\boldsymbol{r}_{\perp}{}') \frac{k}{k_{1}} + \\ & [-\hat{\boldsymbol{h}}_{1}(k_{1\mathrm{i}z})\hat{\boldsymbol{e}}_{1}(k_{1\mathrm{i}z}) + \hat{\boldsymbol{e}}_{1}(k_{1\mathrm{i}z})\hat{\boldsymbol{h}}_{1}(k_{1\mathrm{i}z})] \cdot \boldsymbol{b}_{\perp}^{(0)}(\boldsymbol{r}_{\perp}{}') = 0 \end{aligned} \tag{6.4.74b}$$

根据下面的关系

$$\hat{\boldsymbol{e}}(k_{\mathrm{i}z}) = \frac{\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{i}} \times \hat{z}}{|\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{i}} \times \hat{z}|} = \frac{1}{k_{\mathrm{i}\rho}}(\hat{x}k_{\mathrm{i}y} - \hat{y}k_{\mathrm{i}x})$$

$$\hat{\boldsymbol{h}}(k_{\mathrm{i}z}) = \frac{1}{k^{2}}\hat{\boldsymbol{e}} \times \hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{i}} = \frac{k_{\mathrm{i}z}}{kk_{\mathrm{i}\rho}}(\hat{x}k_{\mathrm{i}x} + \hat{y}k_{\mathrm{i}y}) + \hat{z}\frac{k_{\mathrm{i}\rho}}{k}$$

并应用式(6.4.69),(6.4.72),可以从式(6.4.74a)得到

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}\perp}\cdot \boldsymbol{r}'} = \frac{k}{2k_{\mathrm{i}z}} \Big\{ & \hat{\boldsymbol{e}}(-k_{\mathrm{i}z}) \Big[a_{q}^{(0)}(\boldsymbol{r}') + \frac{k_{\mathrm{i}z}}{k} b_{p}^{(0)}(\boldsymbol{r}'_{\perp}) \Big] + \\ & \hat{\boldsymbol{h}}(-k_{\mathrm{i}z}) \Big[\frac{k_{\mathrm{i}z}}{k} a_{p}^{(0)}(\boldsymbol{r}'_{\perp}) - b_{q}^{(0)}(\boldsymbol{r}'_{\perp}) \Big] \Big\} \end{aligned} \tag{6.4.75a}$$

再结合式(6.4.74b),得到

$$k a_{q}^{(0)}(\boldsymbol{r}') - k_{1\mathrm{i}z} b_{p}^{(0)}(\boldsymbol{r}') = 0 \tag{6.4.75b}$$

$$\frac{kk_{1\mathrm{i}z}}{k_{1}^{2}} a_{p}^{(0)}(\boldsymbol{r}') + b_{q}^{(0)}(\boldsymbol{r}') = 0 \tag{6.4.75c}$$

由于式(6.4.75a)包含两个标量方程,因此式(6.4.75)给出了4个未知数 $a_{p}^{(0)}, a_{q}^{(0)}, b_{p}^{(0)}, b_{q}^{(0)}$ 的4个方程。解这些方程,并将它们代回到 $a^{(0)}(\boldsymbol{r}'_{\perp})$ 和 $b^{(0)}(\boldsymbol{r}'_{\perp})$ 中,得到

$$\boldsymbol{a}^{(0)}(\boldsymbol{r}'_{\perp}) = \boldsymbol{a}^{(0)}(\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}\perp}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}\perp}\cdot \boldsymbol{r}'_{\perp}} \tag{6.4.76a}$$

$$\boldsymbol{b}^{(0)}(\boldsymbol{r}'_{\perp}) = \boldsymbol{b}^{(0)}(\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}\perp}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}\perp}\cdot \boldsymbol{r}'_{\perp}} \tag{6.4.76b}$$

其中,

$$\boldsymbol{a}_{q}^{(0)}(\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}\perp}) = [\hat{\boldsymbol{e}}(-k_{\mathrm{i}z}) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}] \frac{k_{\mathrm{i}z}}{k}(1 - R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{TE}}) \tag{6.4.77a}$$

$$\boldsymbol{a}_{p}^{(0)}(\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}\perp}) = [\hat{\boldsymbol{h}}(-k_{\mathrm{i}z}) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}](1 + R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{TM}}) \tag{6.4.77b}$$

$$\boldsymbol{b}_{q}^{(0)}(\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}\perp}) = -[\hat{\boldsymbol{h}}(-k_{\mathrm{i}z}) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}] \frac{k_{\mathrm{i}z}}{k}(1 - R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{TM}}) \tag{6.4.77c}$$

$$\boldsymbol{b}_{p}^{(0)}(\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}\perp}) = [\hat{\boldsymbol{e}}(-k_{\mathrm{i}z}) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}](1 + R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{TE}}) \tag{6.4.77d}$$

其中,$R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{TE}}$ 和 $R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{TM}}$ 是TE波和TM波的菲涅耳反射系数,它们的表达式为

$$R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{TE}} = \frac{k_{\mathrm{i}z} - k_{1\mathrm{i}z}}{k_{\mathrm{i}z} + k_{1\mathrm{i}z}} \tag{6.4.78a}$$

$$R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{TM}} = \frac{\varepsilon_{1}k_{\mathrm{i}z} - \varepsilon_{\mathrm{o}}k_{1\mathrm{i}z}}{\varepsilon_{1}k_{\mathrm{i}z} + \varepsilon_{\mathrm{o}}k_{1\mathrm{i}z}} \tag{6.4.78b}$$

在式(6.4.66)中应用式(6.4.76),得到0阶散射场为

$$\boldsymbol{E}_s^{(0)} = \{R_0^{\mathrm{TE}}[\hat{\boldsymbol{e}}(-k_{iz})\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_i]\hat{\boldsymbol{e}}(k_{iz}) + R_0^{\mathrm{TM}}[\hat{\boldsymbol{h}}(-k_{iz})\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_i]\hat{\boldsymbol{h}}(k_{iz})\}E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{i\perp}\cdot\boldsymbol{r}_\perp+\mathrm{i}k_{iz}z} \tag{6.4.79}$$

这是一个平面的反射场。

一阶解

表面场的一阶解可以通过将式(6.4.67)和(6.4.68)代入式(6.4.63),(6.4.65),(6.4.66)和(6.4.69)中,并使一阶项相等得到。从式(6.4.69a)和 (6.4.76a)可以得出下式。

$$a_z^{(1)}(\boldsymbol{r}'_\perp) = \left(\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial f(\boldsymbol{r}'_\perp)}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}'} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial f(\boldsymbol{r}'_\perp)}{\partial \hat{\boldsymbol{y}}'}\right)\cdot \boldsymbol{a}_\perp^{(0)}(\boldsymbol{k}_{i\perp})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{i\perp}\cdot\boldsymbol{r}'_\perp} \tag{6.4.80}$$

为了简化式(6.4.80),我们引入了傅里叶变换:

$$F(\boldsymbol{k}_\perp) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'_\perp f(\boldsymbol{r}'_\perp)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}'_\perp} \tag{6.4.81}$$

$$\boldsymbol{A}^{(1)}(\boldsymbol{k}_\perp) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'_\perp \boldsymbol{a}^{(1)}(\boldsymbol{r}'_\perp)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}'_\perp} \tag{6.4.82a}$$

$$\boldsymbol{B}^{(1)}(\boldsymbol{k}_\perp) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'_\perp \boldsymbol{b}^{(1)}(\boldsymbol{r}'_\perp)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}'_\perp} \tag{6.4.82b}$$

严格地说,随机函数的傅里叶变换并不存在,随机傅里叶 Stieltjes 积分需要被定义(Tatarskii, 1971;Ishimaru, 1978),但是,散射强度的最后结果不受影响。

将式(6.4.80)乘以 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}'_\perp}/(2\pi)^2$,并在 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_\perp$ 上积分。通过应用 $F(\boldsymbol{k}_\perp)$表示$\partial f(\boldsymbol{r}'_\perp)/\partial x'$和$\partial f(\boldsymbol{r}'_\perp)/\partial y'$,得到

$$A_z^{(1)}(\boldsymbol{k}_\perp) = \left\{\frac{k_x k_{iy} - k_y k_{ix}}{k_{i\rho}}a_q^{(0)}(\boldsymbol{k}_{i\perp}) + \left(\frac{k_x k_{ix} - k_y k_{iy}}{k_{i\rho}} - k_{i\rho}\right)a_p^{(0)}(\boldsymbol{k}_{i\perp})\right\}\mathrm{i}F(\boldsymbol{k}_\perp - \boldsymbol{k}_{i\perp}) \tag{6.4.83a}$$

类似地,从式(6.4.69b)得到

$$B_z^{(1)}(\boldsymbol{k}_\perp) = \left\{\frac{k_x k_{iy} - k_y k_{ix}}{k_{i\rho}}b_q^{(0)}(\boldsymbol{k}_{i\perp}) + \left(\frac{k_x k_{ix} + k_y k_{iy}}{k_{i\rho}} - k_{i\rho}\right)b_p^{(0)}(\boldsymbol{k}_{i\perp})\right\}\mathrm{i}F(\boldsymbol{k}_\perp - \boldsymbol{k}_{i\perp}) \tag{6.4.83b}$$

下面使公式(6.4.63a)两端的一阶项相等,可以看到,

$$\begin{aligned}&\left[\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'_\perp \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}'_\perp}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z f(\boldsymbol{r}'_\perp)}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}'_\perp)\right]\\ &= \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'_\perp \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}'_\perp}[\mathrm{i}k_z f(\boldsymbol{r}'_\perp)\boldsymbol{a}^{(0)}(\boldsymbol{k}_{i\perp})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{i\perp}\cdot\boldsymbol{r}'} + \boldsymbol{a}^{(1)}(\boldsymbol{r}')]\\ &= (2\pi)^2[\mathrm{i}\boldsymbol{k}_z F(\boldsymbol{k}_\perp - \boldsymbol{k}_{i\perp})\boldsymbol{a}^{(0)}(\boldsymbol{k}_{i\perp}) + \boldsymbol{A}^{(1)}(\boldsymbol{k}_\perp)]\end{aligned}$$

因此,从式(6.4.63a)得到的一阶方程为

$$\begin{aligned}0 = {}&[\hat{\boldsymbol{e}}(-k_z)\hat{\boldsymbol{e}}(-k_z) + \hat{\boldsymbol{h}}(-k_z)\hat{\boldsymbol{h}}(-k_z)]\cdot\\ &[\boldsymbol{A}^{(1)}(k_\perp) + \mathrm{i}k_z\boldsymbol{a}^{(0)}(k_{i\perp})F(k_\perp - k_{i\perp})] +\\ &[-\hat{\boldsymbol{h}}(-k_z)\hat{\boldsymbol{e}}(-k_z) + \hat{\boldsymbol{e}}(-k_z)\hat{\boldsymbol{h}}(-k_z)]\cdot\\ &[\boldsymbol{B}^{(1)}(k_\perp) + \mathrm{i}k_z\boldsymbol{b}^{(0)}(k_{i\perp})F(k_\perp - k_{i\perp})]\end{aligned} \tag{6.4.84}$$

类似地,从式(6.4.63b)得到

$$0=\frac{k}{k_1}[\hat{e}_1(k_{1z})\hat{e}_1(k_{1z})+\hat{h}_1(k_{1z})\hat{h}_1(k_{1z})]\cdot$$
$$[A^{(1)}(k_\perp)-\mathrm{i}k_{1z}a^{(0)}(k_{i\perp})F(k_\perp-k_{i\perp})]+$$
$$[-\hat{h}_1(k_{1z})\hat{e}_1(k_{1z})+\hat{e}_1(k_{1z})\hat{h}_1(k_{1z})]\cdot$$
$$[B^{(1)}(k_\perp)-\mathrm{i}k_{1z}b^{(0)}(k_{i\perp})F(k_\perp-k_{i\perp})] \tag{6.4.85}$$

式(6.4.84)和(6.4.85)为矢量方程,因此它们组成了具有4个未知参数 $A_q^{(1)}(k_\perp)$,$A_p^{(1)}(k_\perp)$,$B_q^{(1)}(k_\perp)$,$B_p^{(1)}(k_\perp)$的4个标量方程。一阶散射场可以从式(6.4.66)中得出,为

$$E_s^{(1)}=-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}k_\perp\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\perp\cdot r_\perp}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}\frac{k}{k_z}\Big\{[\hat{e}(k_z)\hat{e}(k_z)+\hat{h}(k_z)\hat{h}(k_z)]\cdot$$
$$[A^{(1)}(k_\perp)-\mathrm{i}k_zF(k_\perp-k_{i\perp})a^{(0)}(k_{i\perp})]+$$
$$[-\hat{h}(k_z)\hat{e}(k_z)+\hat{e}(k_z)\hat{h}(k_z)]\cdot$$
$$[B^{(1)}(k_\perp)-\mathrm{i}k_zF(k_\perp-k_{i\perp})b^{(0)}(k_{i\perp})]\Big\} \tag{6.4.86}$$

再根据以下事实:

$$\langle F(k_\perp)\rangle=\frac{1}{(2\pi)^2}\int \mathrm{d}r'_\perp \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\perp\cdot r'_\perp}\langle f(r_\perp)\rangle=0$$

得到$\langle E_s^{(1)}\rangle=\langle E_t^{(1)}\rangle=0$。因此,一阶解没有改变相干反射系数,必须计算二阶解才能得到粗糙表面对相干波造成的修正项。

最低阶的不相干系数可以从式(6.4.86)中得到。对于 $\hat{a}_i$ 极化的入射波,$\hat{b}_s$ 极化的散射强度由下式给出。

$$\langle|E_s^{(1)}|^2\rangle=\int \mathrm{d}k_\perp f'_{ba}W(|k_\perp-k_{i\perp}|)$$
$$=\int \mathrm{d}\Omega_s k^2\cos\theta_s f'_{ba}W(|k_\perp-k_{i\perp}|) \tag{6.4.87}$$

其中,$W(|k_\perp-k_{i\perp}|)$为粗糙表面的谱密度和相关函数的傅里叶转换。

谱密度为

$$W(k_\perp)=\frac{\sigma^2}{(2\pi)^2}\int \mathrm{d}r_\perp\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\perp\cdot r_\perp}C(r_\perp)$$

它满足以下关系:

$$\langle F(k'_\perp)F^*(k_\perp)\rangle=\delta(k'_\perp-k_\perp)W(|k'_\perp|)$$

对于式(6.4.35)的高斯相关函数,有如下的谱密度

$$W(|k_\perp-k_{i\perp}|)=\frac{1}{4\pi}\sigma^2l^2\mathrm{e}^{-(k_{dx}^2+k_{dy}^2)l^2/4} \tag{6.4.88}$$

其中,$k_{d\perp}=k_\perp-k_{i\perp}$,$\sigma$ 为表面高度的标准差,l 为模截面上$f(r_\perp)$的相关长度。

双基站散射系数 $\gamma_{ba}^{\mathrm{r}}(\hat{k}_s,\hat{k}_i)$被定义为:$b_s$ 极化波在 $\hat{k}_s$ 方向单位立体角的散射功率与 a_i 极化波在 k_i 方向截获的功率在4π立体角内平均的比率。因此,由式(6.4.87)得到如下的散射系数

$$\gamma_{ba}^{r}(\hat{\boldsymbol{k}}_s,\hat{\boldsymbol{k}}_i) = 4\pi\frac{k^2\cos\theta_s f'_{ba}W(|\boldsymbol{k}_{\perp}-\boldsymbol{k}_{i\perp}|)}{\cos\theta_i|E_o|^2}$$

经过对式(6.4.84)和(6.4.85)冗长的求解,并利用式(6.4.88),得到

$$\gamma_{ba}^{r}(\hat{\boldsymbol{k}}_s,\hat{\boldsymbol{k}}_i) = \pi\frac{4k^4\sigma^2l^2\cos^2\theta_s\cos^2\theta_i}{\cos\theta_i}f_{ba}e^{-k_{d\rho}^2l^2/4} \tag{6.4.89}$$

其中,

$$k_{d\rho}^2 = k^2[\sin^2\theta_s+\sin^2\theta_i-2\sin^2\theta_s\sin^2\theta_i\cos(\phi_s-\phi_i)]$$

$$f_{hh} = \left|\frac{(k_1^2-k^2)}{(k_z+k_{1z})(k_{iz}+k_{1iz})}\right|^2\cos^2(\phi_s-\phi_i)$$

$$f_{vh} = \left|\frac{(k_1^2-k^2)kk_{1z}}{(k_1^2k_z+k^2k_{1z})(k_{iz}+k_{1iz})}\right|^2\sin^2(\phi_s-\phi_i)$$

$$f_{hv} = \left|\frac{(k_1^2-k^2)kk_{1iz}}{(k_z+k_{1z})(k_1^2k_{iz}+k^2k_{1iz})}\right|^2\sin^2(\phi_s-\phi_i)$$

$$f_{vv} = \left|\frac{(k_1^2-k^2)}{(k_1^2k_z+k^2k_{1z})(k_1^2k_{iz}+k^2k_{1iz})}\cdot\right.$$
$$\left.[k_1^2k^2\sin\theta_s\sin\theta_i-k^2k_{1z}k_{1iz}\cos(\phi_s-\phi_i)]\right|^2$$

在后向散射方向 $\hat{\boldsymbol{k}}_s=-\hat{\boldsymbol{k}}_i$。单位面积的后向散射截面为

$$\sigma_{hh} = 4k^4\sigma^2l^2\cos^4\theta_i|R_o^{TE}|^2e^{-k^2l^2\sin^2\theta_i} \tag{6.4.90a}$$

$$\sigma_{vv} = 4k^8\sigma^2l^2\cos^4\theta_i\left|\frac{(k_1^2-k^2)(k_1^2\sin^2\theta_i+k_{1z}k_{1zi})}{(k_1^2k_{zi}+k^2k_{1zi})^2}\right|e^{-k^2l^2\sin^2\theta_i} \tag{6.4.90b}$$

$$\sigma_{vh} = \sigma_{hv} = 0 \tag{6.4.90c}$$

从式(6.4.90c)可以看到在后向散射方向没有发生退极化。为了计算退极化的回波,我们必须求助于二阶场的解。

习题

6.4.1 对于一个高斯随机粗糙表面,证明:$p(\alpha,\beta)=\dfrac{e^{-(\alpha^2+\beta^2)/2\sigma^2|c''(0)|}}{2\pi\sigma^2|c''(0)|}$。

6.4.2 考虑在几何光学近似条件下,试用坡度概率密度函数 $p(\alpha,\beta)$ 来表示一个高斯随机粗糙表面 $f(x,y)$ 的双基地散射系数。其中 $\alpha=\partial f/\partial x,\beta=\partial f/\partial y$。

6.4.3 利用几何光学近似方法,以入射角为变量,画出随机粗糙表面的后向散射系数图。粗糙表面的特征是 $\sigma/L=0.1$, $\epsilon_1=80\epsilon_o$。

6.5 周期介质的散射

当研究周期介质在全息摄影、超声波绕射和集成光学中各种有源和无源部件上的应用时，耦合模式被证明是求出结果的最简单方法，而且在物理上容易解释。考虑由如下介电常数描述的周期介质(图 6.5-1 中去掉 1 和 3 的区域)。

$$\varepsilon(x,z) = \varepsilon_2(1 + \eta\cos(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r})) \tag{6.5.1}$$

其中，$\boldsymbol{K} = K(\hat{\boldsymbol{x}}\sin\gamma + \hat{\boldsymbol{z}}\cos\gamma)$，$K = 2\pi/\Lambda$，$\Lambda$ 为周期。对于 $\hat{\boldsymbol{y}}$ 方向极化的 TE 波，其电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 满足以下的波动方程。

$$[\nabla^2 + \omega^2\mu\varepsilon(x,z)]E_y(x,z) = 0 \tag{6.5.2}$$

为了方便耦合模式方程的导出，将电场写为

$$E_y(x,z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\phi_m(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\pi/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{mx}z} \tag{6.5.3}$$

其中，

$$k_{mx} = k_{0x} + mK\cos\gamma \tag{6.5.4}$$

k_{0x}为零价 Floquet 模波矢量的 x 分量。

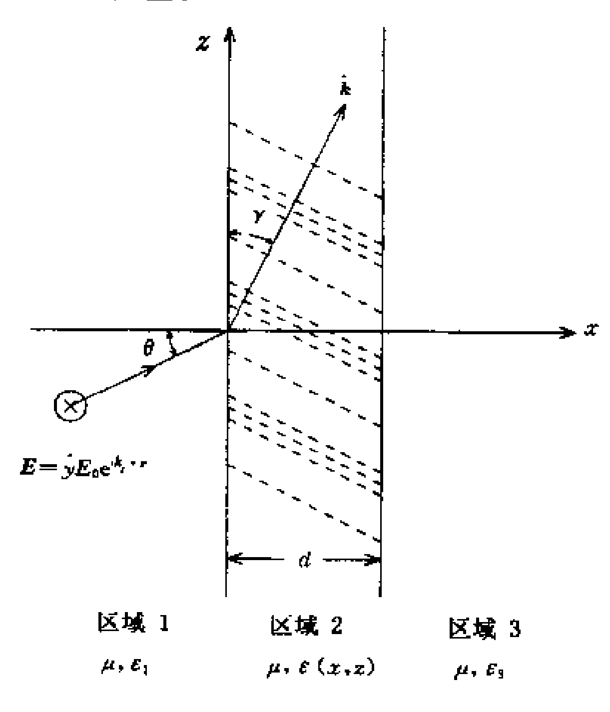


图 6.5-1 所讨论问题的几何结构

将式(6.5.3)代入式(6.5.2)中，并使 $\gamma = 0$，则有：

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi_m}{\mathrm{d}x^2} + (k_2^2 - k_{mx}^2)\phi_m + \mathrm{i}\frac{\eta}{2}k_2^2(\phi_{m+1} - \phi_{m-1}) = 0 \tag{6.5.5}$$

其中，$k_2 = \omega(\mu\varepsilon)^{1/2}$。式(6.5.5)代表了一组耦合的二阶微分方程。

在第一个布拉格(Bragg)角附近，具有强耦合的两个 Floquet 模是零阶和一阶模。如果仅保留这两个模，则式(6.5.5)变为

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi_0}{\mathrm{d}x^2} + (k_2^2 - k_{0x}^2)\phi_0 = \mathrm{i}\frac{\eta k_2^2}{2}\phi_{-1} \tag{6.5.6a}$$

$$\frac{d^2\phi_{-1}}{dx^2}+(k_2^2-k_{-1x}^2)\phi_{-1}=-\mathrm{i}\frac{\eta k_2^2}{2}\phi_0 \tag{6.5.6b}$$

这一组耦合方程可以被转换为两个未耦合的亥姆霍兹方程。有

$$U_1=\phi_0+\mathrm{i}\alpha_1\phi_{-1} \tag{6.5.7a}$$

$$U_2=\phi_0+\mathrm{i}\alpha_2\phi_{-1} \tag{6.5.7b}$$

或等效为

$$\phi_0=\frac{\alpha_2U_1-\alpha_1U_2}{\alpha_2-\alpha_1} \tag{6.5.7c}$$

$$\phi_{-1}=\mathrm{i}\,\frac{U_1-U_2}{\alpha_2-\alpha_1} \tag{6.5.7d}$$

其中,α_1,α_2 是待定的常数。将式(6.5.6b)乘以 α_j 后与式(6.5.6a)相加,其中,$j=1,2$,得到

$$\frac{d^2U_j}{dx^2}+\left(k_2^2-k_{0x}^2-\alpha_j\frac{\eta k_2^2}{2}\right)U_j=0 \tag{6.5.8}$$

和

$$\alpha_j=(1/\eta k_2^2)\{k_{-1x}^2-k_{0x}^2\pm[(k_{-1x}^2-k_{0x}^2)^2+\eta^2k_2^4]^{1/2}\} \tag{6.5.9}$$

在中括号前面的加号表示 α_1,减号表示 α_2。很明显,指数函数是式(6.5.8)的解。因此(6.5.6)式中两个耦合模式方程的4个独立解为

$$\phi_0=\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\left[\alpha_2\begin{pmatrix}W\exp(\mathrm{i}k_{2x}^a x)\\ X\exp(-\mathrm{i}k_{2x}^a x)\end{pmatrix}-\alpha_1\begin{pmatrix}Y\exp(\mathrm{i}k_{2x}^b x)\\ Z\exp(-\mathrm{i}k_{2x}^b x)\end{pmatrix}\right] \tag{6.5.10a}$$

$$\phi_{-1}=\frac{\mathrm{i}}{\alpha_2-\alpha_1}\left[\begin{pmatrix}W\exp(\mathrm{i}k_{2x}^a x)\\ X\exp(-\mathrm{i}k_{2x}^a x)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}Y\exp(\mathrm{i}k_{2x}^b x)\\ Z\exp(-\mathrm{i}k_{2x}^b x)\end{pmatrix}\right] \tag{6.5.10b}$$

其中,

$$k_{2x}^a=[(1-\alpha_1\eta/2)k_2^2-k_{0z}^2]^{1/2} \tag{6.5.11a}$$

$$k_{2x}^b=[(1-\alpha_2\eta/2)k_2^2-k_{0z}^2]^{1/2} \tag{6.5.11b}$$

对于特定的问题,常数 W,X,Y,Z 可以根据适当的边界条件来确定。

6.5.1 一阶耦合模式方程

如果使

$$\phi_m(x)=\psi_m(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{mx}x} \tag{6.5.12}$$

则我们可以从式(6.5.2)和(6.5.3)中很容易地得到一阶耦合模式方程。其中,

$$k_{mx}=k_{0x}+mK\sin\gamma \tag{6.5.13}$$

$$k_{0x}^2+k_{0z}^2=k_2^2 \tag{6.5.14}$$

忽略二阶求导项,可得到

$$\frac{d\psi_m(x)}{dx}+\mathrm{i}\frac{mK}{2k_{mx}}[mK+2(k_{0z}\cos\gamma+k_{0x}\sin\gamma)]+\frac{\eta k_2^2}{4k_{mx}}[\psi_{m+1}(x)-\psi_{m-1}(x)]=0 \tag{6.5.15}$$

当 $\gamma=0$ 时,上式变成 Klein 和 Cook(1967 年)将式(6.5.15)变为差分方程求数值解时所用的微分方程。

Raman-Nath 状态由 $\gamma=0, k_{0x}=0, k_{mx}\approx k_2$ 和忽略式(6.5.15)中的 ψ_m 项来表征。当一束波垂直入射到一个沿 $\hat{z}$ 方向具有周期性,并具有较小 K 的周期介质上时,可以实现这些条件。因此式(6.5.15)变为

$$\frac{\mathrm{d}\psi_m(x)}{\mathrm{d}x}+\frac{\eta k_2}{4}[\psi_{m+1}(x)-\psi_{m-1}(x)]=0 \tag{6.5.16}$$

此方程与贝塞尔函数的递归关系式相同,因此有

$$\psi_m(x)=J_m(\eta k_2 x/2) \tag{6.5.17}$$

要注意, $J_0^2(x)+2\sum_{m=1}^{\infty}J_m^2(x)=1$, 这是对能量守恒定律的一个表述。

现在我们假设只有 $m=0$ 和 $m=-1$ 两个模存在。这样式(6.5.15)变为

$$\frac{\mathrm{d}\psi_0}{\mathrm{d}x}-\frac{\eta k_2^2}{4k_{0x}}\psi_{-1}=0 \tag{6.5.18a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi_{-1}}{\mathrm{d}x}+\frac{K}{4k_{-1x}}[K-2(k_{0x}\cos\gamma+k_{0z}\sin\gamma)]\psi_{-1}(x)+\frac{\eta k_2^2}{4k_{-1x}}\psi_0=0 \tag{6.5.18b}$$

在 Kogelnid(1969)对厚全息图片的处理中,对于透射全息图,其要求 $\phi_0(x=0)=1,\phi_{-1}(x=0)=0$;对于反射全息图,要求 $\phi_0(x=0)=1,\phi_{-1}(x=d)=0$,其中 d 是全息图片的厚度。因为这两个控制方程中只包含一阶导数,所以只需要两个边界条件就可以求解。

Phariseau 限制条件由 $\gamma=0$ 和 $k_{0x}=K/2$ 来表征。当波以布拉格(Bragg)角在沿 $\hat{z}$ 方向具有周期性的介质中传播时将产生这个条件。从式(6.5.4)中可以看到 $k_{-1x}=k_{0x}$,因此从式(6.5.18)中得到

$$k_{0x}\frac{\mathrm{d}\psi_0(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\eta k_2^2}{4}\psi_{-1}(x) \tag{6.5.19a}$$

$$k_{0x}\frac{\mathrm{d}\psi_{-1}(x)}{\mathrm{d}x}=-\frac{\eta k_2^2}{4}\psi_0(x) \tag{6.5.19b}$$

加上边界条件 $\psi_0(x=0)=1,\psi_{-1}(x=0)=0$,可以得到如下解。

$$\psi_0(x)=\cos(\eta k_2^2 x/4k_{0x}) \tag{6.5.20a}$$

$$\psi_{-1}(x)=\sin(\eta k_2^2 x/4k_{0x}) \tag{6.5.20b}$$

因为 $\psi_0^2(x)+\psi_{-1}^2(x)=1$,所以对所有的 x,能量守恒定律都成立。

为了将波动方程简化为 Kogelnik 和 Shank(1971)在分布式反馈装置的处理中所用的一阶耦合模式方程,可使 $\gamma=\pi/2, k_{mz}=0$,和 $k_{0x}=k_2$。当空间周期沿 $\hat{x}$ 方向,波也沿 $\hat{x}$ 方向传播时,产生这种条件。可使电场为

$$E(x,z)=\psi_0(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(K/2)x}+\psi_{-1}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(K/2)x} \tag{6.5.21}$$

将上式代入式(6.5.2)中,并忽略二阶导数项,得到

$$\psi'_0(x)-(2\mathrm{i}/K)(k_2^2-K^2/4)\psi_0(x)+(\eta k_2^2/K)\psi_{-1}(x)=0 \tag{6.5.22a}$$

$$-\psi'_{-1}(x)-(2\mathrm{i}/K)(k_2^2-K^2/4)\psi_{-1}(x)+(\eta k_2^2/K)\psi_0(x)=0 \tag{6.5.22b}$$

Kogelnik 和 Shank 广泛地研究过这一组耦合模式方程。波数 $k_2=\omega(\mu\epsilon)^{1/2}$成为一个与变化的角频率 ω 对应的变量。在第一个 Bragg 频率上,$k_2=K/2$,而且式(6.5.22)变成式(6.5.19)所示的耦合方程。

6.5.2 周期结构板产生的反射和透射

考虑具有厚度 d 的周期平板介质,如前边图 6.5-1 所示。一束平面波以波矢量 $\boldsymbol{k}=\hat{x}k_x+$

$\hat{z}k_{0z}$入射到平板上,其中,$k_{0z}=k_1\sin\theta$,$k_1=\omega(\mu\varepsilon_1)^{1/2}$,$\theta$为入射角。反射波电场采取如下形式:

$$E_y = E_0\exp(\mathrm{i}k_{1x}^a x + \mathrm{i}k_{0z}z) + R_0\exp(-\mathrm{i}k_{1x}^a x + \mathrm{i}k_{0z}z) + R_{-1}\exp(-\mathrm{i}k_{1x}^b x + k_{-1x}z) \tag{6.5.23}$$

其中,

$$k_{1x}^a = (k_1^2 - k_{0z}^2)^{1/2} \tag{6.5.24a}$$

$$k_{1x}^b = (k_1^2 - k_{-1z}^2)^{1/2} \tag{6.5.24b}$$

而且 R_0 和 R_{-1}是零阶和一阶模的反射系数。透射波为

$$E_y = T_0\exp(\mathrm{i}k_{3x}^a + \mathrm{i}k_{0z}z) + T_{-1}\exp(\mathrm{i}k_{3x}^b x + \mathrm{i}k_{-1z}z) \tag{6.5.25}$$

其中,

$$k_{3x}^a = (k_3^2 - k_{0z}^2)^{1/2} \tag{6.5.26a}$$

$$k_{3x}^b = (k_3^2 - k_{-1x}^2)^{1/2} \tag{6.5.26b}$$

而且 T_0 和 T_{-1}分别是 0 阶和一阶模的透射系数。

在厚板介质内部,电场 E_y 为如下形式。

$$\begin{aligned} E_y &= \phi_0 e^{\mathrm{i}k_{0z}z} + \mathrm{i}\phi_{-1}e^{\mathrm{i}k_{-1z}z} \\ &= [1/(\alpha_2-\alpha_1)]\cdot \\ &\quad (\alpha_2 W e^{\mathrm{i}k_{2x}^a x} + \alpha_2 X e^{-\mathrm{i}k_{2x}^a x} - \alpha_1 Y e^{\mathrm{i}k_{2x}^b x} - \alpha_1 Z e^{-\mathrm{i}k_{2x}^b x})e^{\mathrm{i}k_{0z}z} - \\ &\quad [1/(\alpha_2-\alpha_1)](W e^{\mathrm{i}k_{2x}^a x} + X e^{-\mathrm{i}k_{2x}^a x} - Y e^{\mathrm{i}k_{2x}^b x} - Z e^{-\mathrm{i}k_{2x}^b x})e^{\mathrm{i}k_{-1z}z} \end{aligned} \tag{6.5.27}$$

因此共有 8 个常数 $R_0, R_{-1}, T_0, T_{-1}, W, X, Y$ 和 Z,需要由边界条件确定,这要求切向电场和切向磁场在边界 $x=0$ 和 $x=d$ 面上连续。切向磁场 H_z 根据麦克斯韦方程由 E_y 确定,为

$$H_z = \frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\frac{\partial}{\partial x}E_y \tag{6.5.28}$$

4 个边界条件对于所有的 z 都必须成立。这导致了求解未知系数的 8 个线性联立方程。经过大量的代数运算,得到了以下的透射和反射系数:

$$T_0 = \frac{4(\alpha_2-\alpha_1)k_{1x}^a(\alpha_1 A_{bb} - \alpha_2 B_{bb})e^{-\mathrm{i}k_{3x}^a d}}{(\alpha_2 A_{aa} - \alpha_1 B_{aa})(\alpha_1 A_{bb} - \alpha_2 B_{bb}) - \alpha_1\alpha_2(A_{ab} - B_{ab})(A_{ba} - B_{ba})} \tag{6.5.29}$$

$$T_{-1} = \frac{4(\alpha_2-\alpha_1)k_{1x}^a(A_{ba} - B_{ba})e^{-\mathrm{i}k_{3x}^b d}}{(\alpha_2 A_{aa} - \alpha_1 B_{aa})(\alpha_1 A_{bb} - \alpha_2 B_{bb}) - \alpha_1\alpha_2(A_{ab} - B_{ab})(A_{ba} - B_{ba})} \tag{6.5.30}$$

$$R_0 = \frac{\alpha_1\alpha_2(\alpha_{ab} - \beta_{ab})(A_{ba} - B_{ba}) - (\alpha_2\alpha_{aa} - \alpha_1\beta_{aa})(\alpha_1 A_{bb} - \alpha_2 B_{bb})}{(\alpha_2 A_{aa} - \alpha_1 B_{aa})(\alpha_1 A_{bb} - \alpha_2 B_{bb}) - \alpha_1\alpha_2(A_{ab} - B_{ab})(A_{ba} - B_{ba})} \tag{6.5.31}$$

$$R_{-1} = \frac{(\alpha_2 A_{aa} - \alpha_1 B_{aa})(\alpha_{ab} - \beta_{ab}) - (A_{ab} - B_{ab})(\alpha_2\alpha_{aa} - \alpha_1\beta_{aa})}{(\alpha_2 A_{aa} - \alpha_1 B_{aa})(\alpha_1 A_{bb} - \alpha_2 B_{bb}) - \alpha_1\alpha_2(A_{ab} - B_{ab})(A_{ba} - B_{ba})} \tag{6.5.32}$$

其中,

$$A_{\rho\sigma} = k_{2x}^a\left(1+\frac{k_{1x}^\rho}{k_{2x}^a}\right)\left(1+\frac{k_{3x}^\sigma}{k_{2x}^a}\right)(e^{-\mathrm{i}k_{2x}^a d} - R_{21}^{a\rho}R_{23}^{a\sigma}e^{\mathrm{i}k_{2x}^a d}) \tag{6.5.33}$$

$$B_{\rho\sigma} = k_{2x}^b\left(1+\frac{k_{1x}^\rho}{k_{2x}^b}\right)\left(1+\frac{k_{3x}^\sigma}{k_{2x}^b}\right)(e^{-\mathrm{i}k_{2x}^b d} - R_{21}^{b\rho}R_{23}^{b\sigma}e^{\mathrm{i}k_{2x}^b d}) \tag{6.5.34}$$

$$\alpha_{\rho\sigma} = k_{2x}^a\left(1+\frac{k_{1x}^\rho}{k_{2x}^a}\right)\left(1+\frac{k_{3x}^\sigma}{k_{2x}^a}\right)(R_{21}^{a\rho}e^{-\mathrm{i}k_{2x}^a d} - R_{23}^{a\sigma}e^{\mathrm{i}k_{2x}^a d}) \tag{6.5.35}$$

$$\beta_{\rho\sigma} = k_{2x}^{b}\left(1 + \frac{k_{1x}^{\rho}}{k_{2x}^{b}}\right)\left(1 + \frac{k_{3x}^{\sigma}}{k_{2x}^{b}}\right)\left(R_{21}^{b\rho}e^{-ik_{2x}^{b}d} - R_{23}^{b\sigma}e^{ik_{2x}^{b}d}\right) \tag{6.5.36}$$

$$R_{ij}^{\rho\sigma} = \frac{k_{ix}^{\rho} - k_{jx}^{\sigma}}{k_{ix}^{\rho} + k_{jx}^{\sigma}} \tag{6.5.37}$$

其中,下标 ρ 和 σ 代表 a 或 b,下标 i 和 j 代表 1,2,3。

我们看到,式(6.5.29)~(6.5.32)中的解在平板没有周期调制的情况时可以简化为已知解,其中 $A_{\rho\sigma} = B_{\rho\sigma}$,$\alpha_{\rho\sigma} = \beta_{\rho\sigma}$,以及

$$R_{ij}^{\rho\sigma} = R_{ij} = \frac{1 - k_{jx}/k_{ix}}{1 + k_{jx}/k_{ix}}$$

和 $R_{-1} = T_{-1} = 0$,及

$$R_0 = \frac{-R_{21} + R_{23}e^{i2k_{2x}d}}{1 - R_{21}R_{23}e^{i2k_{2x}^{a}d}} \tag{6.5.38}$$

$$T_0 = \frac{4\exp[i(k_{2x} - k_{3x})d]}{(1 + k_{2x}/k_{1x})(1 + k_{3x}/k_{2x})(1 - R_{21}R_{23}e^{i2k_{2x}^{a}d})} \tag{6.5.39}$$

容易看出 $|R_0|^2 + k_{3x}|T_0|^2/k_{1x} = 1$,这也是对能量守恒定律的表述。

当平板存在周期调制,波的入射角又正好为 Bragg 角时,$K_{0z} = K/2$ 和 $\alpha_1 = -\alpha_2 = 1$。透射和反射系数的表达式可以简化为

$$R_0 = \frac{1}{2}(R_a + R_b) \tag{6.5.40}$$

$$R_{-1} = \frac{1}{2}(R_a - R_b) \tag{6.5.41}$$

$$T_0 = \frac{1}{2}(T_a + T_b) \tag{6.5.42}$$

$$T_{-1} = \frac{1}{2}(T_a + T_b) \tag{6.5.43}$$

其中,

$$R_a = \frac{-R_{21}^{a} + R_{23}^{a}e^{i2k_{2x}^{a}d}}{1 - R_{21}^{a}R_{23}^{a}e^{i2k_{2x}^{a}d}} \tag{6.5.44}$$

$$R_b = \frac{-R_{21}^{b} + R_{23}^{b}e^{i2k_{2x}^{b}d}}{1 - R_{21}^{b}R_{23}^{b}e^{i2k_{2x}^{b}d}} \tag{6.5.45}$$

$$T_a = \frac{4\exp[i(k_{2x}^{a} - k_{3x})d]}{(1 + k_{2x}^{a}/k_{1x})(1 + k_{3x}/k_{2x}^{a})(1 - R_{21}^{a}R_{23}^{a}e^{i2k_{2x}^{a}d})} \tag{6.5.46}$$

$$T_b = \frac{4\exp[i(k_{2x}^{b} - k_{3x})d]}{(1 + k_{2x}^{b}/k_{1x})(1 + k_{3x}/k_{2x}^{b})(1 - R_{21}^{b}R_{23}^{b}e^{i2k_{2x}^{b}d})} \tag{6.5.47}$$

$$R_{2j}^{a} = \frac{k_{2x}^{a} - k_{jx}}{k_{2x}^{a} + k_{jx}} \tag{6.5.48}$$

其中,

$$k_{2x}^{a} = \left[\left(1 - \frac{1}{2}\eta\right)k_2^2 - \frac{1}{4}K^2\right]^{1/2} \tag{6.5.49}$$

$$k_{2x}^b = \left[\left(1 + \frac{1}{2}\eta\right)k_2^2 - \frac{1}{4}K^2\right]^{1/2} \tag{6.5.50}$$

可以看到零阶反射和透射系数各由类似于式(6.5.38)和式(6.5.39)的两项组成,一项对应具有等效介电常数$(1-\eta/2)^{1/2}\varepsilon_2$的平板的反射和透射,而另一项对应具有等效介电常数$(1+\eta/2)^{1/2}\varepsilon_2$的平板的反射和透射,这也可以从式(6.5.49)和(6.5.50)看出来。

因为式(6.5.44)~(6.5.47)中的解满足能量守恒定律,所以下式成立。

$$\begin{aligned}&|R_0|^2 + |R_{-1}|^2 + (k_{3x}/k_{1x})(|T_0|^2 + |T_{-1}|^2)\\&= \frac{1}{2}[|R_a|^2 + (k_{3x}/k_{1x})|T_a|^2 + |R_b|^2 + (k_{3x}/k_{1x})|T_b|^2] = 1\end{aligned} \tag{6.5.51}$$

通过要求 x 方向的时间平均坡印廷功率密度的空间导数为零,我们从式(6.5.3),(6.5.6)和(6.5.28)中也可以观察到这个结果。

6.5.3 高斯波束的远场绕射

应用二维格林函数,并从惠更斯原理可以确定透射高斯波束的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_t = \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\omega\mu}{2\eta}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}z' E_{ap}(z')H_0^{(1)}\{k_3[(z-z')^2 + (x-d)^2]\} \tag{6.5.52}$$

其中,η 为$(\mu/\varepsilon_2)^{1/2}$,$E_{ap}(z')$为 $x=d$ 处的孔径场,代表 E_0 或者 E_{-1},$k_3 = \omega(\mu\varepsilon_3)^{1/2}$,而且 $H_0^{(1)}$ 为第一类的 0 阶汉开尔函数。在辐射区,由夫琅禾费(Fraunhofor)近似产生的场为

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{y}}\left[\frac{k_3}{\mathrm{i}2\pi(x-d)}\right]^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_3x + \mathrm{i}k_3z^2/2x}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}z' E_{ap}(z')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_3z'\sin\theta}$$

这基本上是孔径场的傅里叶变换。

可计算如下的零阶波束远场方向图

$$P_0(\theta) = \int_{-z_m}^{z_m}\mathrm{d}z E_0(d,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_3z\sin\theta} \tag{6.5.53}$$

和 Bragg 散射波束的远场方向图

$$P_{-1}(\theta) = \int_{-z_m}^{z_m}\mathrm{d}z E_{-1}(d,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_3z\sin\theta} \tag{6.5.54}$$

其中,θ 为在第三种介质中从 x 轴算起的观察角。E_0 和 E_{-1}场分别为

$$E_0(x,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_{0z}G(k_{0z})T_0(k_{0z})\exp[\mathrm{i}k_{3x}^a(x-d) + \mathrm{i}k_{0z}z] \qquad x \geqslant d$$

$$E_{-1}(x,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_{0z}G(k_{0z})T_{-1}(k_{0z})\exp[\mathrm{i}k_{3x}^b(x-d) - \mathrm{i}k_{-1z}z] \qquad x \geqslant d$$

在式(6.5.53)和(6.5.54)中,$z_m = d\tan\theta_B + \omega_0$,其中 ω_0 是投射在 z 轴上的波束宽度。采用这个限制是由于 $E_0(d,z;t)$和 $E_{-1}(d,z;t)$被限制在区域$|z| < d\tan\theta_B + \omega_0 = z_m$ 中,而且$|z| > z_m$ 的场小得可以忽略。因此有

$$\begin{aligned}P_0(\theta) &= \int_{-z_m}^{z_m}\mathrm{d}z\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_{0z}G(k_{0z})T_0(k_{0z})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{0z}z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_3z\sin\theta}\\&= \int_{-\infty}^{\infty}G(k_{0z})\mathrm{d}k_{0z}T_0(k_{0z})2z_m\frac{\sin(k_{0z} - k_3\sin\theta)z_m}{(k_{0z} - k_3\sin\theta)z_m}\end{aligned} \tag{6.5.55}$$

$$\begin{aligned}P_{-1}(\theta) &= \int_{-z_m}^{z_m}\mathrm{d}z\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_{0z}G(k_{0z})T_{-1}(k_{0z})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{-1z}z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_3z\sin\theta}\\&= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_{0z}G(k_{0z})T_{-1}(k_{0z})2z_m\frac{\sin\{(k_3\sin\theta - [k_{0z} - K])\}z_m}{\{k_3\sin\theta - [k_{0z} - K]\}z_m}\end{aligned} \tag{6.5.56}$$

因子

$$2z_m \frac{\sin(k_{0z} - k_3\sin\theta)z_m}{(k_{0z} - k_3\sin\theta)z_m}$$

将远场方向图 $P_0(\theta)$有效地限制在中心为第一个 Bragg 角 $\theta = \theta_B = \arcsin(\lambda/2\Lambda\sqrt{\varepsilon_3})$的一个小角度范围内，与此类似，因子

$$2z_m \frac{\sin[k_3\sin\theta - (k_{0z} - k)]_{zm}}{[k_3\sin\theta - (k_{0z} - k)]_{zm}}$$

将远场方向图 $P_{-1}(\theta)$有效地限制在中心为负的第一个布拉格(Bragg)角 $\theta = -\theta_B$ 的范围左右。应该指出的是，两个因子在 $z_m \to \infty$ 时简化为狄拉克 δ 函数。式(6.5.55)和(6.5.56)的结果因此变为简单的 $2\pi GT_0$ 和 $2\pi GT_{-1}$。

6.6 随机介质的散射

在对地球表面上的物体如雪、冰和植被的遥感中，经常用到分层介质模型。为了解释这种分层介质产生的散射，可将它的体散射效应用一个含有随机起伏部分的介电常数表征，表示为

$$\varepsilon_1(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_1 + \varepsilon_{1f}(\boldsymbol{r}) \tag{6.6.1}$$

其中，ε_{1f}为介电常数的随机起伏部分，ε_1 为平均介电常数，即介电常数的集平均$\langle\varepsilon_1(\boldsymbol{r})\rangle = \varepsilon_1$。在区域 1 中，决定 $\boldsymbol{E}_1$ 的方程可以写为

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}) - k_1^2\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}) = Q(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}) \tag{6.6.2}$$

其中，$k_1^2 = \omega^2\mu\varepsilon_1$ 和 $Q(\boldsymbol{r}) = \omega^2\mu\varepsilon_{1f}$。因此随机变量 $Q(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r})$表示扩展的体积源。

从式(6.6.2)中，可以利用并矢格林函数 $\boldsymbol{GG}_{11}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$解出区域 1 的电场 $\boldsymbol{E}_1$，为

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_1^{(0)} + \iiint_{V_1} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{GG}_{11}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1)\cdot Q(\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}_1) \tag{6.6.3}$$

其中，V_1 为区域 1 的体积，其包含随机部分 ε_{1f}。$\boldsymbol{GG}_{11}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$为并矢格林函数，$\boldsymbol{E}_1^{(0)}$ 为没有 ε_{1f}，即 $\varepsilon_{1f}=0$ 时的 0 阶解。

区域 0 的电场为

$$\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{E}_0^{(0)} + \iiint_{V_1} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{GG}_{01}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1)\cdot Q(\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}_1) \tag{6.6.4}$$

式(6.6.4)中的第一项为没有 ε_{1f}时的零阶解，E_0 代表镜面反射波，也叫总场的相干分量。第二项为散射场 $\boldsymbol{E}_s$，写作

$$\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{r}) = \iiint_{V_1} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{GG}_{01}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1)\cdot Q(\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}_1) \tag{6.6.5}$$

方程(6.6.5)可以用迭代的方法解出。我们假设总场可以用玻恩(Born)级数的形式展开为

$$\boldsymbol{E}_l = \sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{E}_l^{(n)} \qquad l = 0,1 \tag{6.6.6}$$

将上式代入到式(6.6.4)中，可发现 n 阶电场由 $n-1$ 阶电场确定，表示为

$$\boldsymbol{E}_s^{(n)} = \iiint_{V_1} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{GG}_{01}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1)\cdot Q(\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{E}_1^{(n-1)}(\boldsymbol{r}_1) \tag{6.6.7}$$

应该注意，所有 $n\neq 0$ 的 $\boldsymbol{E}_l^{(n)}$ 都是随机起伏的场。

对 $\boldsymbol{E}_s^{(1)}$ 取绝对值的平方，然后取集平均，就得到一阶散射强度，为

$$\langle |\boldsymbol{E}_s^{(1)}(\boldsymbol{r})|^2\rangle = \iiint_{V_1} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_1 \iiint_{V_1} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_2 \boldsymbol{GG}_{01}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{E}_1^{(0)}(\boldsymbol{r}_1)\cdot \boldsymbol{GG}_{01}^*(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_2)\cdot\boldsymbol{E}_1^{(0)*}(\boldsymbol{r}_2)\langle Q(\boldsymbol{r}_1)Q^*(\boldsymbol{r}_2)\rangle \tag{6.6.8}$$

其中,$\langle Q(\boldsymbol{r}_1)Q^*(\boldsymbol{r}_2)\rangle$为两点相关函数,对于一个统计均匀的介质,相关函数只依赖于 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 点的距离,即

$$\langle Q(\boldsymbol{r}_1)Q^*(\boldsymbol{r}_2)\rangle = C(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2) \tag{6.6.9}$$

而相关函数为

$$C(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2) = \delta\,|k_1|^4\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|/r_0} \tag{6.6.10}$$

其中,δ 是方差,r_0 为介电常数起伏的相关长度。方差与起伏大小有关,相关长度则与散射粒子的大小相当。可看到散射场强度的主要贡献来自不超过一个相关长度的介质起伏。

6.6.1 分层介质的并矢格林函数

考虑一个源位于区域0的分层介质。在没有分层介质的情况下,并矢格林函数由下式确定:

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - k^2\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{II}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{6.6.11}$$

在无界空间可以确定:

$$\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \left(\boldsymbol{II}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{6.6.12}$$

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}}{4\pi\,|\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'|} \tag{6.6.13}$$

如果使源位于原点处,即 $\boldsymbol{r}'=0$,则有

$$(\nabla^2+k^2)g(\boldsymbol{r}) = -\delta(\boldsymbol{r}) \tag{6.6.14}$$

经过傅里叶变换,得到

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint \mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{6.6.15}$$

$$g(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint \mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}g(\boldsymbol{k}) \tag{6.6.16}$$

其中,

$$g(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{k_x^2+k_y^2+k_z^2-k^2} \tag{6.6.17}$$

对于式(6.6.16)中的三重积分,当对 k_z 积分时,根据式(6.6.17)可看出极点出现在 $k_z^2=k^2-k_x^2-k_y^2$。对于 $z>0$ 的区域,可使围线向上变形至 $\mathrm{Im}\{k_z\}>0$。对于 $z<0$,使之向下变形。因此得到

$$g(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{i}}{(2\pi)^2}\displaystyle\iint \mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\,\frac{1}{2k_{0z}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_xx+\mathrm{i}k_yy+\mathrm{i}k_{0z}z} & z>0 \\ \dfrac{\mathrm{i}}{(2\pi)^2}\displaystyle\iint \mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\,\frac{1}{2k_{0z}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_xx+\mathrm{i}k_yy-\mathrm{i}k_{0z}z} & z<0 \end{cases} \tag{6.6.18}$$

$$k_{0z} = \sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2} \tag{6.6.19}$$

为了得到 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})$的表达式,可利用式(6.6.12),并注意到在 $z=0$ 处,$\partial g(\boldsymbol{r})\partial z$ 具有不连续性,这

给出

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}g(\boldsymbol{r}) = -\delta(\boldsymbol{r}) - \begin{cases} \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^2}\iint \mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \frac{k_{0z}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x+\mathrm{i}k_y y+\mathrm{i}k_{0z}z} & z > 0 \\ \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^2}\iint \mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \frac{k_{0z}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x+\mathrm{i}k_y y-\mathrm{i}k_{0z}z} & z < 0 \end{cases} \tag{6.6.20}$$

我们得到 $\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r})$ 的表达式为

$$\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r}) = -\hat{z}\hat{z}\frac{1}{k^2}\delta(\boldsymbol{r}) + \begin{cases} \frac{\mathrm{i}}{8\pi^2}\iint \mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \frac{1}{k_{0z}}\left[\boldsymbol{II} - \frac{\boldsymbol{kk}}{k^2}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} & z > 0 \\ \frac{\mathrm{i}}{8\pi^2}\iint \mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \frac{1}{k_{0z}}\left[\boldsymbol{II} - \frac{\boldsymbol{KK}}{k^2}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}} & z < 0 \end{cases} \tag{6.6.21}$$

其中，

$$\boldsymbol{k} = \hat{x}k_x + \hat{y}k_y + \hat{z}k_{0z} \tag{6.6.22}$$

$$\boldsymbol{K} = \hat{x}k_x + \hat{y}k_y - \hat{z}k_{0z} \tag{6.6.23}$$

如果使 $\hat{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{k}/k$，可建立由单位矢量 $\hat{\boldsymbol{k}}$，$\hat{\boldsymbol{h}}(k_{0z})$ 和 $\hat{\boldsymbol{e}}(k_{0z})$ 组成的直角坐标系，

$$\hat{\boldsymbol{e}}(k_{0z}) = \frac{\hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{z}}{|\hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{z}|} = \frac{(\hat{x}k_y - \hat{y}k_x)}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \tag{6.6.24}$$

$$\hat{\boldsymbol{h}}(k_{0z}) = \frac{1}{k}\hat{\boldsymbol{e}}\times\boldsymbol{k} = \frac{-k_{0z}}{k\sqrt{k_x^2+k_y^2}}(\hat{x}k_x + \hat{y}k_y) + \hat{z}\frac{\sqrt{k_x^2+k_y^2}}{k} \tag{6.6.25}$$

因为 $\boldsymbol{II} = \hat{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{k}} + \hat{\boldsymbol{e}}\hat{\boldsymbol{e}} + \hat{\boldsymbol{h}}\hat{\boldsymbol{h}}$，所以 $\boldsymbol{II} - \hat{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{k}} = \hat{\boldsymbol{e}}\hat{\boldsymbol{e}} + \hat{\boldsymbol{h}}\hat{\boldsymbol{h}}$。在将原点转变到 $\boldsymbol{r}'$ 后，并矢格林函数 $\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 变为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = &-\hat{z}\hat{z}\frac{1}{k^2}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + \\ &\begin{cases} \frac{\mathrm{i}}{8\pi^2}\iint \mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\frac{1}{k_{0z}}\{[\hat{\boldsymbol{e}}(k_{0z})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}]\}\hat{\boldsymbol{e}}(k_{0z})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'} + \\ \qquad [\hat{\boldsymbol{h}}(k_{0z})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}]\hat{\boldsymbol{h}}(k_{0z})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'} & z > z' \\ \frac{\mathrm{i}}{8\pi^2}\iint \mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\frac{1}{k_{0z}}\{[\hat{\boldsymbol{e}}(-k_{0z})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}}]\}\hat{\boldsymbol{e}}(-k_{0z})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}'} + \\ \qquad [\hat{\boldsymbol{h}}(-k_{0z})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}}]\hat{\boldsymbol{h}}(-k_{0z})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}'} & z < z' \end{cases}\end{aligned} \tag{6.6.26}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{K}/k$，$\hat{\boldsymbol{e}}(-k_{0z}) = \hat{\boldsymbol{e}}(k_{0z})$ 和 $\hat{\boldsymbol{h}}(-k_{0z}) = \hat{\boldsymbol{e}}\times\boldsymbol{K}/k$ 组成了关于波矢量 $\boldsymbol{K}$ 的另一个单位矢量的正交组合。

为得到分层介质的并矢格林函数 $\boldsymbol{GG}_{l0}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$，可使用第一个下标 l 表示观察点区域，第二个下标 0 表示源位于区域 0 中。为了方便边界条件的匹配，我们只考虑 $z < z'$ 区域的格林函数 $\boldsymbol{GG}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$，因此忽略 delta 函数项。格林函数可以表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{GG}_{00}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{\mathrm{i}}{8\pi^2}\iint \mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\frac{1}{k_{0z}}\Big\{&[\hat{\boldsymbol{e}}(-k_{0z})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}} \\ &+ R^{\mathrm{TE}}\hat{\boldsymbol{e}}(k_{0z})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}]\hat{\boldsymbol{e}}(-k_{0z})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}'} + [R^{\mathrm{TM}}\hat{\boldsymbol{h}}(k_{0z})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \\ &+ \hat{\boldsymbol{h}}(-k_{0z})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}}]\hat{\boldsymbol{h}}(-k_{0z})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}'}\Big\} \qquad z < z'\end{aligned} \tag{6.6.27}$$

$$\boldsymbol{GG}_{l0}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{\mathrm{i}}{8\pi^2}\iint \mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\frac{1}{k_{0z}}$$

$$\Big\{[B_l\hat{\boldsymbol{e}}_l(-k_{lz})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{K}_l\cdot\boldsymbol{r}} + A_l\hat{\boldsymbol{e}}_l(k_{lz})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_l\cdot\boldsymbol{r}}]\hat{\boldsymbol{e}}(-k_{0z})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}'}$$

$$+\left[C_l\hat{\boldsymbol{h}}_l(k_{lz})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{K}_l\cdot\boldsymbol{r}}+D_l\hat{\boldsymbol{h}}_l(-k_{lz})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{K}_l\cdot\boldsymbol{r}}\right]\hat{\boldsymbol{h}}(-k_{0z})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}'}\Big\} \tag{6.6.28}$$

$$\boldsymbol{GG}_{t0}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\mathrm{i}}{8\pi^2}\iint\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\frac{1}{k_{0z}}\Big\{T^{\mathrm{TE}}\hat{\boldsymbol{e}}_t(-k_{tz})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{K}_t\cdot\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{e}}(-k_{0z})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}'}$$

$$+T^{\mathrm{TM}}\hat{\boldsymbol{h}}_t(-k_{tz})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{K}_t\cdot\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{h}}(-k_{0z})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}'}\Big\} \tag{6.6.29}$$

其中，

$$k_{lz}=\sqrt{k_l^2-k_x^2-k_y^2} \tag{6.6.30}$$

$$\boldsymbol{k}_l=\hat{\boldsymbol{x}}k_x+\hat{\boldsymbol{y}}k_y+\hat{\boldsymbol{z}}k_{lz} \tag{6.6.31}$$

$$\boldsymbol{K}_l=\hat{\boldsymbol{x}}k_x+\hat{\boldsymbol{y}}k_y-\hat{\boldsymbol{z}}k_{lz} \tag{6.6.32}$$

系数 A_l, B_l, C_l, D_l 由边界条件确定。

为了简化代数运算，我们考虑一个 $t=2$ 的两层介质。讨论过程可以很容易地推广到一般的分层介质。在边界 $z=0$ 和 $z=-d$ 面上，与切向电场和切向磁场的连续性相对应，增加边界条件 $\hat{z}\times\boldsymbol{GG}$ 和 $\hat{z}\times\nabla\times\boldsymbol{GG}/\mu$ 在边界上连续。因此得到

$$R^{\mathrm{TE}}+1=A_1+B_1 \tag{6.6.33}$$

$$\frac{k_{0z}}{k}(R^{\mathrm{TM}}-1)=\frac{k_{1z}}{k_1}(C_1-D_1) \tag{6.6.34}$$

$$k_{0z}(R^{\mathrm{TE}}-1)=k_{1z}(A_1-B_1) \tag{6.6.35}$$

$$k(R^{\mathrm{TM}}+1)=k_1(C_1+D_1) \tag{6.6.36}$$

和

$$A_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{1z}d}+B_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1z}d}=T^{\mathrm{TE}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{2z}d} \tag{6.6.37}$$

$$\frac{k_{1z}}{k_1}(C_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{1z}d}-D_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1z}d})=-\frac{k_{2z}}{k_2}T^{\mathrm{TM}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{2z}d} \tag{6.6.38}$$

$$k_{1z}(A_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{1z}d}-B_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1z}d})=-k_{2z}T^{\mathrm{TE}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{2z}d} \tag{6.6.39}$$

$$k_1(C_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{1z}d}+D_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1z}d})=k_2T^{\mathrm{TM}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{2z}d} \tag{6.6.40}$$

通过对式(6.6.33)~(6.6.40)求解，可以得到所有 8 个未知波幅度。特别得到了下式：

$$\boldsymbol{GG}_{10}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\mathrm{i}}{8\pi}\iint\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\frac{1}{k_{1z}}$$

$$\Big\{\frac{T_{10}^{\mathrm{TE}}}{D_2(k_\perp)}\left[R_{12}^{\mathrm{TE}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k_{1z}d}\hat{\boldsymbol{e}}_1(k_{1z})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}}+\hat{\boldsymbol{e}}_1(-k_{1z})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{K}_1\cdot\boldsymbol{r}}\right]\hat{\boldsymbol{e}}(-k_{0z})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}'}+$$

$$\frac{k_1}{k}\frac{T_{10}^{\mathrm{TM}}}{F_2(k_\perp)}\left[R_{12}^{\mathrm{TM}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k_{1z}d}\hat{\boldsymbol{h}}_1(k_{1z})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}}+\hat{\boldsymbol{h}}_1(-k_{1z})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{K}_1\cdot\boldsymbol{r}}\right]\hat{\boldsymbol{h}}(-k_{0z})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}'}\Big\} \tag{6.6.41}$$

其中，

$$T_{10}^{\mathrm{TE}}=1+R_{10}^{\mathrm{TE}}=\frac{2k_{1z}}{k_z+k_{1z}} \tag{6.6.42}$$

$$T_{10}^{\mathrm{TM}}=1+R_{10}^{\mathrm{TM}}=\frac{2\varepsilon k_{1z}}{\varepsilon_1k_z+\varepsilon k_{1z}} \tag{6.6.43}$$

$$D_2(k_\perp)=1+R_{01}^{\mathrm{TE}}R_{12}^{\mathrm{TE}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k_{1z}d} \tag{6.6.44}$$

$$F_2(k_\perp)=1+R_{12}^{\mathrm{TM}}R_{12}^{\mathrm{TM}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k_{1z}d} \tag{6.6.45}$$

$$R_{12}^{\mathrm{TM}}=\frac{k_{1z}-k_{2z}}{k_{1z}+k_{2z}} \tag{6.6.46}$$

$$R_{12}^{TM} = \frac{\varepsilon_2 k_{1z} - \varepsilon_1 k_{2z}}{\varepsilon_2 k_{1z} + \varepsilon_1 k_{2z}} \tag{6.6.47}$$

对于后面的应用，我们将关注观察点在区域0、源在区域1的格林函数 $\boldsymbol{GG}_{01}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$。并矢格林函数的对称特性要求(Tai,1971)

$$\boldsymbol{GG}_{01}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{GG}_{10}^{T}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{6.6.48}$$

对 $\boldsymbol{GG}_{10}$进行转置，在将 k_x 变为 $-k_x$，和 $k_y = -k_y$。根据式(6.6.24)和(6.6.25)，还可进行以下变换：$\hat{\boldsymbol{e}}(k_{0z}) \to \hat{\boldsymbol{e}}(-k_{0z})$和 $\hat{\boldsymbol{h}}(k_{0z}) \to \hat{\boldsymbol{h}}(-k_{0z})$。于是式(6.6.41)变为：

$$\boldsymbol{GG}_{01}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \iint \mathrm{d}\boldsymbol{k}_\perp \, \boldsymbol{g}_{01}(\boldsymbol{k}_\perp, z, z') \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\perp \cdot (\boldsymbol{r}_\perp - \boldsymbol{r}'_\perp)} \tag{6.6.49}$$

其中，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{gg}_{01}(\boldsymbol{k}_\perp, z, z') &= \frac{\mathrm{i}}{8\pi^2} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}}{k_{1z}} \left\{ \frac{T_{10}^{TE}}{D_2(k_\perp)} \hat{\boldsymbol{e}}(k_{0z}) [R_{12}^{TE} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k_{1z}d} \hat{\boldsymbol{e}}_1(-k_{1z}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1z}z'} + \hat{\boldsymbol{e}}_1(k_{1z}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{1z}z'}] + \right. \\ &\left. \frac{k_1}{k} \frac{T_{10}^{TM}}{F_2(k_\perp)} \hat{\boldsymbol{h}}(k_{0z}) [R_{12}^{TM} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k_{1z}d} \hat{\boldsymbol{h}}_1(-k_{1z}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1z}z'} + \hat{\boldsymbol{h}}_1(k_{1z}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{1z}z'}] \right\} \end{aligned} \tag{6.6.50}$$

为求辐射场，可用二维驻留相位法(Born and Wolf,1975)计算式(6.6.49)中的积分。当 $kr \to \infty$ 时，式(6.6.49)中的主要作用项为

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = \exp[\mathrm{i}(k_x x + k_y y + \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} z)]$$

当观察点的坐标为 $x = r\sin\theta\cos\phi$，$y = r\sin\theta\sin\phi$，$z = r\cos\theta$ 时，可以发现驻留相位点为

$$k_x = k\sin\theta\cos\phi$$

$$k_y = k\sin\theta\sin\phi$$

因此并矢格林函数可以确定为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{GG}_{01}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r} \Bigg\{ &\left[\frac{T_{01}^{TE}}{D_2} \hat{\boldsymbol{e}}(k_{0z}) \hat{\boldsymbol{e}}_1(k_{1z}) + \frac{k}{k_1} \frac{T_{01}^{TM}}{F_2} \hat{\boldsymbol{h}}(k_{0z}) \hat{\boldsymbol{h}}_1(k_{1z}) \right] \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}'} + \\ &\left[\frac{T_{01}^{TE}}{D_2} R_{12}^{TE} \hat{\boldsymbol{e}}(k_{0z}) \hat{\boldsymbol{e}}_1(-k_{1z}) + \frac{k}{k_1} \frac{T_{01}^{TM}}{F_2} R_{12}^{TM} \hat{\boldsymbol{h}}(k_{0z}) \hat{\boldsymbol{h}}_1(-k_{1z}) \right] \cdot \\ &\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k_{1z}d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{K}_1\cdot\boldsymbol{r}'} \Bigg\} \end{aligned} \tag{6.6.51}$$

其中，所有 k_x, k_y 的值都等于驻留相位点的值。

6.6.2 半空间随机介质的散射

为了描述半空间随机介质的散射，考虑远场区的散射场。设一个水平极化的入射波为

$$\boldsymbol{E}_{0\mathrm{i}} = \hat{\boldsymbol{e}}(-k_{0z\mathrm{i}}) E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{0z\mathrm{i}} z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\perp\mathrm{i}}\cdot\boldsymbol{r}}$$

其中，$k_{0z\mathrm{i}} = k\cos\theta_\mathrm{i}$。区域1中未扰动的场为：

$$\boldsymbol{E}_1^{(0)}(\boldsymbol{r}) = E_0 T_{01\mathrm{i}}^{TE} \hat{\boldsymbol{e}}_{1\mathrm{i}}(k_{1z\mathrm{i}}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{1\mathrm{i}}\cdot\boldsymbol{r}}$$

其中，$k_{1z\mathrm{i}} = (k_1^2 - k^2\sin^2\theta_\mathrm{i})^{1/2}$，$\boldsymbol{k}_{1\mathrm{i}} = \boldsymbol{k}_{\perp\mathrm{i}} - \hat{\boldsymbol{z}} k_{1z\mathrm{i}}$。在 $T_{01\mathrm{i}}^{TE}$中的下标 i 表明 k_z 的值是入射方向上的分量。利用上一部分中得到的远场并矢格林函数，并将其简化到半空间介质，得到：

$$\boldsymbol{GG}_{01}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r} \left[T_{01\mathrm{s}}^{TE} \hat{\boldsymbol{e}}(k_{0z\mathrm{s}}) \hat{\boldsymbol{e}}_1(k_{1z\mathrm{s}}) + \frac{k}{k_1} T_{01\mathrm{s}}^{TM} \hat{\boldsymbol{h}}(k_{0z\mathrm{s}}) \hat{\boldsymbol{h}}_1(k_{1z\mathrm{s}}) \right] \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{1\mathrm{s}}\cdot\boldsymbol{r}'}$$

其中，

$$k_{0zs} = \sqrt{k^2 - k_{xs}^2 - k_{ys}^2}$$

$$k_{1zs} = \sqrt{k_1^2 - k_{xs}^2 - k_{ys}^2}$$

$$k_{1s} = \boldsymbol{k}_{\perp s} + \hat{z}k_{1zs}^2$$

因此得到如下的一阶散射场强度,即

$$\langle |\boldsymbol{E}_s^{(1)}(\boldsymbol{r})|^2\rangle = \frac{|E_0|^2}{16\pi^2 r^2}\left|\left[T_{01s}^{\mathrm{TE}}\hat{\boldsymbol{e}}(k_{0zs})\hat{\boldsymbol{e}}_1(k_{1zs}) + \frac{k}{k_1}T_{01s}^{\mathrm{TM}}\hat{\boldsymbol{h}}(k_{0zs})\hat{\boldsymbol{h}}_1(k_{1zs})\right]\cdot \gamma_{01i}^{\mathrm{TE}}\hat{\boldsymbol{e}}_{1i}(k_{1zi})\right|^2 W \tag{6.6.52}$$

其中,

$$W = \iiint_{V_1}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_1 \iiint_{V_1}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_2 C(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_{1i}-\boldsymbol{k}_{1s})\cdot\boldsymbol{r}_1-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_{1i}^*-\boldsymbol{k}_{1s}^*)\cdot\boldsymbol{r}_2} \tag{6.6.53}$$

相关函数可以表示成谱密度函数 Φ 的傅立叶转换,即

$$C(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = \delta|k_1|^4\iiint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\boldsymbol{k}\,\Phi(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)} \tag{6.6.54}$$

对于式(6.6.10)中的相关函数,举例来说,可以一般性地选择坐标系的 z 轴沿 $\boldsymbol{k}$ 方向,得到

$$\begin{aligned}\Phi(\boldsymbol{k}) &= \frac{1}{8\pi^3}\iiint \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\mathrm{e}^{-r/r_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\infty}\mathrm{d}r r^2\mathrm{e}^{-r/r0}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\sin\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}\\ &= \frac{r_0^3}{\pi^2(1+k^2r_0^2)^2}\end{aligned}$$

将式(6.6.54)代入式(6.6.53)中,得到

$$\begin{aligned}W &= 4\pi^2\delta|k_1|^4\iiint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\iiint \mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1\mathrm{d}z_1\exp(\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_{1zi} - \boldsymbol{k}_{1zs} - \boldsymbol{k}_z)\cdot z_1)\cdot\\ &\quad\exp(\mathrm{i}(k_{1zi}^* + k_{1zs}^* + k_z)z_2)\cdot\Phi(\boldsymbol{k})\delta(k_{1xi} - k_{1xs} - k_x, k_{1yi} - k_{1ys} - k_y)\\ &= 4\pi^2\delta|k_1|^4\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_z\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}z_1\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}z_2\Phi(k_{xi} - k_{xs}, k_{yi} - k_{ys}, k_z)\cdot\\ &\quad\exp[-\mathrm{i}(k_{1zi} + k_{1zs} + k_z)z_1]\exp[\mathrm{i}(k_{1zi}^* + k_{1zs}^* + k_z)z_2]\\ &= \delta|k_1|^4 A\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_z\frac{\Phi(k_{xi} - k_{xs}, k_{yi} - k_{ys}, k_z)}{(k_{1zi} + k_{1zs} + k_z)(k_{1zi}^* + k_{1zs}^* + k_z)}\end{aligned}$$

其中,A 是在 $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1$ 上积分的照射面积。对于具有低吸收率 $k_{1I} \ll k_{1R}$ 的介质,我们应用围线积分,并识别出积分的大部分贡献来自极点 $k_z = -k_{1zi}^* - k_{1zs}^*$ 的留数。因此有:

$$W \approx 4\pi^3\delta|k_1|^4 A\frac{\Phi(k_{xi} - k_{xs}, k_{yi} - k_{ys}, -k_{1zi}^* - k_{1zs}^*)}{k_{1ziI} + k_{1zsI}}$$

双基站散射系数 $\gamma_{\mu\nu}(\hat{\boldsymbol{k}}_s, \hat{\boldsymbol{k}}_i)$ 定义为:

$$\gamma_{\mu\nu} = \frac{4\pi r^2\langle|\boldsymbol{E}_s|^2\rangle_\nu}{A\cos\theta_i|\boldsymbol{E}_0|_\mu^2}$$

其中,μ 代表入射极化,ν 代表散射极化。

对于 $\phi_i = 0$ 的情况,可得到

$$\begin{Bmatrix}\gamma_{hh}\\ \gamma_{vh}\\ \gamma_{hv}\\ \gamma_{vv}\end{Bmatrix}=\frac{\delta\mid k_1\mid^4\pi^2\Phi}{\cos\theta_i(k_{1zi I}+k_{1zsI})}\cdot\begin{Bmatrix}\left|T_{01s}^{TE}T_{01i}^{TE}\right|^2\cos^2\phi_s\\ \left|k_{1zs}\frac{k}{k_1}T_{01s}^{TM}T_{01i}^{TE}\right|^2\sin^2\phi_s\\ \left|k_{1zi}\frac{k}{k_1}T_{01s}^{TE}T_{01i}^{TM}\right|^2\sin^2\phi_s\\ \left|T_{01s}^{TM}T_{01i}^{TM}\right|^2\frac{k^6\sin^2\theta_s}{k_1^8}\left|k_{xi}-\frac{k_{xs}k_{1zs}k_{1zi}}{k_{xs}^2+k_{ys}^2}\right|^2\end{Bmatrix}$$

因此后向散射系数为

$$\sigma_{\mu\nu}=\gamma_{\mu\nu}(\theta_s=\theta_i,\phi_s=\pi+\phi_i)\cos\theta_i$$

可以看到对于 Born 级数的一阶解有 $\sigma_{\mu\nu}=\sigma_{hv}=0$。为了确定交叉极化的后向散射强度，我们必须从迭代过程中完成对二阶解的 Born 近似。

以上结果是在 Born 近似下得到的，其中利用了均匀背景介质中的未扰动场。在有些变形的 Born 近似中，应用具有有效介电常数的背景介质的未扰动场，经常产生比实验结果要好的数值解。Born 近似只对弱起伏介电常数的介质有效。当介电常数随机起伏部分的方差变大时，我们必须求助于强起伏理论，其中并矢格林函数的奇异性能得到正确处理，而且在 6.7 节中像 ξ 这样的新的小参数也被用于实现与 Born 级数类似的近似。

习 题

6.6.1 考虑一个具有 $\langle f\rangle=0$ 和 $\langle f(x_1,y_1)f(x_2,y_2)\rangle=\sigma^2e^{-[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2]/l^2}$ 的高斯随机过程 $f(x,y)$，使 $\alpha=\sigma f(x,y)/\sigma x$ 和 $\beta=\sigma f(x,y)/\sigma y$，计算下列各表达式值：$\langle\alpha(x_1,y_1)\alpha(x_2,y_2)\rangle$，$\langle\beta(x_1,y_1)\beta(x_2,y_2)\rangle$ 和 $\langle\alpha(x_1,y_1)\beta(x_2,y_2)\rangle$。

6.6.2 设 $f(x)$ 为具有方差 σ^2 和 $\langle f(x)\rangle=0$ 的静态高斯随机过程。证明：$\langle e^{i\alpha f(x)}\rangle=e^{-\sigma^2\alpha^2/2}$。

6.6.3 设 $f(x)$ 为具有 $\langle f(x)\rangle=0$ 和 $\langle f(x_1)f(x_2)\rangle=\sigma^2e^{-(x_1-x_2)^2/l^2}$ 的静态高斯随机过程，计算 $\langle e^{i\alpha[f(x_1)-f(x_2)]}\rangle$。

6.7 体散射介质的有效介电常数

电磁波进入包含散射粒子或具有不均匀性的介质中时，会发生散射，这种介质一般被称为体散射介质。我们知道均匀介质用介电常数表示其电特性，而对于包含介质散射粒子的体散射介质，可以用有效介电常数描述它的特征，以解释其散射效应。

考虑一个介电常数为 ϵ 的均匀介质，其中包含介电常数为 ϵ_s 和半径为 a 的小球，如图 6.7-1 所示。假设当小球不存在时，电场为

$$\boldsymbol{E}_e=\hat{z}E_e=E_e(\hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta-\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta)\qquad(6.7.1)$$

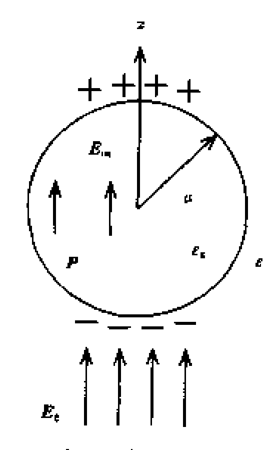


图 6.7-1 在 E_e 场中半径为 a 的小球

在静态情况下，小球外部的总电场为

$$\boldsymbol{E}_{out}=\boldsymbol{E}_e+\frac{\epsilon_s-\epsilon a^3}{\epsilon_s+2\epsilon r^3}E_e(\hat{\boldsymbol{r}}2\cos\theta+\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta)\qquad(6.7.2)$$

而小球内部的电场是均匀的，具有如下形式：

$$\boldsymbol{E}_{\text{in}} = \boldsymbol{E}_e - \frac{\varepsilon_s - \varepsilon}{\varepsilon_s + 2\varepsilon}\boldsymbol{E}_e = \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_s + 2\varepsilon}\boldsymbol{E}_e \tag{6.7.3}$$

容易看出切向电场 $\boldsymbol{E}$ 和法向电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 在 $r = a$ 处连续。

小球的极化矢量为

$$\boldsymbol{P} = (\varepsilon_s - \varepsilon)\boldsymbol{E}_{\text{in}} = 3\varepsilon\frac{\varepsilon_s - \varepsilon}{\varepsilon_s + 2\varepsilon}\boldsymbol{E}_e \tag{6.7.4}$$

可以看出极化率为

$$\alpha = 3\varepsilon\frac{\varepsilon_s - \varepsilon}{\varepsilon_s + 2\varepsilon}\left(\frac{4\pi a^3}{3}\right) \tag{6.7.5}$$

小球内部和外部总电场的差可以认为是极化矢量 $\boldsymbol{P}$ 造成的。从式(6.7.3)和(6.7.4)可以得到：

$$\boldsymbol{E}_e - \boldsymbol{E}_{\text{in}} = \frac{1}{3\varepsilon}\boldsymbol{P} \tag{6.7.6}$$

要注意，$\boldsymbol{E}_e$ 是小球不存在时的电场，从式(6.7.2)可以看出它是球外部总电场的一部分。$\boldsymbol{E}_e$ 被称为激励场。

对于单位体积内包含 n_0 个小球的体散射介质，可利用与式(6.7.6)同样的方式将激励场 $\boldsymbol{E}_e$ 与宏观电场 $\boldsymbol{E}$ 联系起来，为

$$\boldsymbol{E}_e = \boldsymbol{E} + \frac{1}{3\varepsilon}\boldsymbol{P} \tag{6.7.7}$$

极化矢量与激励场的关系为

$$\boldsymbol{P} = n_0\alpha\boldsymbol{E}_e \tag{6.7.8}$$

如果用宏观电场 $\boldsymbol{E}$ 表示，则可以从式(6.7.7)和(6.7.8)中得到

$$\boldsymbol{P} = \frac{n_0\alpha}{1 - n_0\alpha/3\varepsilon}\boldsymbol{E} \tag{6.7.9}$$

电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 为

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \frac{1 + 2n_0\alpha/3\varepsilon}{1 - n_0\alpha/3\varepsilon}\varepsilon\boldsymbol{E}$$

因此有效介电常数 ε_{eff} 为

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \varepsilon\left[\frac{1 + 2n_0\alpha/3\varepsilon}{1 - n_0\alpha/3\varepsilon}\right] \tag{6.7.10}$$

球体在整个介质中所占的体积分数为

$$f_s = n_0\left(\frac{4\pi a^3}{3}\right) \tag{6.7.11}$$

根据式(6.7.5)，我们用体积分数 f_s 将式(6.7.10)表示为

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \varepsilon\left[\frac{1 + 2f_s(\varepsilon_s - \varepsilon)/(\varepsilon_s + 2\varepsilon)}{1 - f_s(\varepsilon_s - \varepsilon)/(\varepsilon_s + 2\varepsilon)}\right] \tag{6.7.12}$$

将式(6.7.10)表示为更加对称的形式

$$\frac{\varepsilon_{\text{eff}} - \varepsilon}{\varepsilon_{\text{eff}} + 2\varepsilon} = f_s\frac{\varepsilon_s - \varepsilon}{\varepsilon_s + 2\varepsilon} \tag{6.7.13}$$

式(6.7.10)被称为克劳修斯－莫索提(Clausius-Mossotti)公式，或洛伦兹－洛伦茨(Lorentz-

Lorenz)公式。式(6.7.12)称为麦克斯韦-格奈特(Maxwell-Garnett)混合公式,式(6.7.13)为瑞利混合公式。

从式(6.7.12)中应该注意到,当 $f_s=0$ 时,$\varepsilon_{eff}=\varepsilon$;当 $f_s=1$ 时,$\varepsilon_{eff}=\varepsilon_s$。然而如果 ε_s 和 ε 都是实数,ε_{eff}也为实数。这是因为以上计算的 ε_{eff}没有考虑散射粒子的散射效应,而正是这种效应产生有效介电常数的虚部。

6.7.1 随机离散散射粒子

在低频限制条件下,总的散射功率是由球形粒子的感应偶极子的散射功率产生的。从式(6.7.5),(6.7.7),(6.7.8)中,可以得到激励场 $\boldsymbol{E}_e$ 与宏观电场 $\boldsymbol{E}$ 的关系为

$$\boldsymbol{E} = [1 - f_s(\varepsilon_s - \varepsilon)/(\varepsilon_s + 2\varepsilon)]\boldsymbol{E}_e \tag{6.7.14}$$

因此球形粒子的感应偶极矩为

$$\boldsymbol{p} = \alpha \boldsymbol{E}_e = \frac{4\pi a^3 \varepsilon(\varepsilon_s - \varepsilon)/(\varepsilon_s + 2\varepsilon)}{1 - f_s(\varepsilon_s - \varepsilon)/(\varepsilon_s + 2\varepsilon)}\boldsymbol{E} \tag{6.7.15}$$

假设电磁波在波长范围内衰减很小,我们可将 $\boldsymbol{E}$ 近似为

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{e}} E_0 e^{i\boldsymbol{K}_R\cdot\boldsymbol{r}}$$

其中,K_R 为波数 $K=\omega(\mu_o\varepsilon_{eff})^{1/2}$的实部。中心位于 $\boldsymbol{r}_i$ 的第 i 个散射粒子的感应偶极矩$\boldsymbol{p}_i$ 为:

$$\boldsymbol{p}_i = \hat{\boldsymbol{e}} \frac{4\pi a^3 \varepsilon(\varepsilon_s - \varepsilon)/(\varepsilon_s + 2\varepsilon)}{1 - f_s(\varepsilon_s - \varepsilon)/(\varepsilon_s + 2\varepsilon)} E_0 e^{i\boldsymbol{K}_R\cdot\boldsymbol{r}_i} \tag{6.7.16}$$

第 i 个偶极子的散射场为

$$\boldsymbol{E}_{si}(\boldsymbol{r}) = \frac{\omega^2\mu_0 e^{ikR_i}}{4\pi R_i}(\hat{\boldsymbol{R}}_i \times \boldsymbol{p}_i) \times \hat{\boldsymbol{R}}_i \tag{6.7.17}$$

其中,$\boldsymbol{R}_i=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i$ 是从第 i 个偶极子指向观察点的矢量。在 $r\gg r_i$ 的情况下,式(6.7.17)可以近似为

$$\boldsymbol{E}_{si}(\boldsymbol{r}) \approx \boldsymbol{A} e^{i(\boldsymbol{K}_R - \hat{\boldsymbol{r}}k)\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_i}$$

其中,

$$\boldsymbol{A} = \frac{\omega^2\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r}(\hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{e}}) \times \hat{\boldsymbol{r}} \frac{4\pi a^3 \varepsilon(\varepsilon_s - \varepsilon)/(\varepsilon_s + 2\varepsilon)}{1 - f_s(\varepsilon_s - \varepsilon)/(\varepsilon_s + 2\varepsilon)} E_0 \tag{6.7.18}$$

总散射场 $\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{r})$是所有偶极子散射场的和,为

$$\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{A} e^{i(\boldsymbol{K}_R - \hat{\boldsymbol{r}}k)\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_i} \tag{6.7.19}$$

其中,N 为散射粒子的总个数。

总散射场强度可以确定为

$$I_s = \frac{|\boldsymbol{A}|^2}{2\eta}\left\{N + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i} 2\mathrm{Re}\{e^{i\boldsymbol{K}\cdot(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)}\}\right\} \tag{6.7.20}$$

其中,$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_R-\hat{\boldsymbol{r}}k$。

应该注意,位置矢量 $\hat{\boldsymbol{r}}_i$、$\hat{\boldsymbol{r}}_j$ 是空间位置的随机变量。令 $P_N(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N)$为中心位于 $\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N$ 的 N 个散射粒子的联合概率密度函数。对式(6.7.20)取集平均,并假设所有的散射粒子都相同,得到

$$\langle I_s \rangle = \frac{|\boldsymbol{A}|^2}{2\eta}\{N + L\} \tag{6.7.21}$$

其中，

$$L = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}2\mathrm{Re}\left\{\int d\boldsymbol{r}_1\cdots\int d\boldsymbol{r}_N P_N(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N),\mathrm{e}^{i\boldsymbol{K}\cdot(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)}\right\}$$
$$= N(N-1)\mathrm{Re}\left\{\int d\boldsymbol{r}_i\int d\boldsymbol{r}_j P_2(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_j)\mathrm{e}^{i\boldsymbol{K}\cdot(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)}\right\}$$

根据 Bayes 规则，两个散射体的概率密度函数为 $P_2(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_j)=P(\boldsymbol{r}_i|\boldsymbol{r}_j)P(\boldsymbol{r}_j)$，其中 $P(\boldsymbol{r}_i|\boldsymbol{r}_j)$ 为当给出在 r_j 处存在第 j 个散射体的条件时，在 r_i 处存在第 i 个散射体的条件概率密度。我们假设散射粒子均匀分布，则有 $P(\boldsymbol{r}_j)=1/V$，$P(\boldsymbol{r}_i|\boldsymbol{r}_j)=g_2(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_j)/V$，其中 V 是散射粒子的体积，$g_2(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_j)$ 为两点分布函数。对于径向对称问题，有 $g_2(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_j)=g_2(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)$，其中 g 叫做成对分布函数。我们得到

$$L = n_0 N\mathrm{Re}\left\{\int d\boldsymbol{r}g(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{i\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}}\right\} \tag{6.7.22}$$

其中，$n_0=N/V$。

总的散射功率由在 4π 立体角上的式(6.7.21)积分确定。为了不失一般性，我们使 $\hat{e}=\hat{z}$，并得到

$$P_s = \frac{E_0^2}{2\eta}\frac{8\pi}{3}k^4a^6\left|\frac{(\varepsilon_s-\varepsilon)/(\varepsilon_s+2\varepsilon)}{1-f_s(\varepsilon_s-\varepsilon)/(\varepsilon_s+2\varepsilon)}\right|^2\{N+L\} \tag{6.7.23}$$

考虑一个底面积为 A，高度为 l 的柱形体，其中，单位体积内包含 n_0 个散射粒子。输入功率为 $P_{in}=A(E_0^2/2)\sqrt{\varepsilon_{eff}/\mu_0}\approx AK_RE_0^2/2\eta k$，其中 ε_{eff} 表示有效介电常数。散射功率由式(6.7.23)给出，其中的 $N=n_0Al$。散射引起的衰减率由下式给出。

$$2K_I = \frac{P_s}{lP_{in}} = 2f_s\frac{k^5a^3}{K_R}\left|\frac{(\varepsilon_s-\varepsilon)/(\varepsilon_s+2\varepsilon)}{1-f_s(\varepsilon_s-\varepsilon)/(\varepsilon_s+2\varepsilon)}\right|^2\{1+L/N\} \tag{6.7.24}$$

对于 $K_I\ll K_R$ 的情况，有 $k^2=\omega^2\mu_0(\varepsilon_{effR}+i\varepsilon_{effI})\approx k_R^2+i2K_Rk_I$ 其中实部可以从式(6.7.12)得到，虚部从式(6.7.24)得到。因此新的复有效介电常数为：

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon\left\{\left[\frac{(1+2f_s(\varepsilon_s-\varepsilon)/(\varepsilon_s+2\varepsilon)}{1-f_s(\varepsilon_s-\varepsilon)/(\varepsilon_s+2\varepsilon)}\right]+\right.$$
$$\left. i\,2f_s\,k^{33}\left|\frac{(\varepsilon_s-\varepsilon)/(\varepsilon_s+2\varepsilon)}{1-f_s(\varepsilon_s-\varepsilon)/(\varepsilon_s+2\varepsilon)}\right|^2\{1+L/N\}\right\} \tag{6.7.25}$$

这样复波数 $K=K_R+iK_I$ 的虚部可以解释散射效应。因为 $K^2=\omega^2\mu_0(\varepsilon_{effR}+i\varepsilon_{effI})$复用效介电常数 ε_1 的虚部依赖于成对分布函数 $g(r)$，从式(6.7.22)也可以看出这一点。

对于单次散射，成对分布函数 $g(\boldsymbol{r})=1$，而且式(6.7.22)可以被转换成无限大范围内包围所有散射粒子的面积分。由于散射波的解满足波动方程和辐射条件，因此积分结果为零，即：

$$\int d\boldsymbol{r}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}} = 0 \tag{6.7.26}$$

由于 $L=0$，我们从式(6.7.25)得到

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon\left\{\left[\frac{1+2f_s(\varepsilon_s-\varepsilon)/(\varepsilon_s+2\varepsilon)}{1-f_s(\varepsilon_s-\varepsilon)/(\varepsilon_s+2\varepsilon)}\right]+\right.$$
$$\left. i\,2f_s\,k^3a^3\left|\frac{(\varepsilon_s-\varepsilon)/(\varepsilon_s+2\varepsilon)}{1-f_s(\varepsilon_s-\varepsilon)/(\varepsilon_s+2\varepsilon)}\right|^2\right\} \tag{6.7.27}$$

其中，实部为 Maxwall-Garnett 方程的结果，虚部与从瑞利散射得到的结果相同。

小孔校正近似经常用于描述稀疏分布($f_s\ll1$)的不可穿透的散射粒子的散射。该近似条

件要求

$$g(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad r < b$$
$$g(\boldsymbol{r}) = 1 \qquad r > b \tag{6.7.28}$$

其中，$b = 2a$ 为两个散射球体中心的距离，因此当一个球体的位置固定时，另一个球体被放置在中心间距 b 以内的概率为零。但是在半径 b 的球体体积以外，其他球体可以以等概率密度位于任何地方，因为是稀疏分布。在这个近似下式(6.7.22)变为

$$L = n_0 N\mathrm{Re}\left\{ \iiint_{r>b} \mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}} \right\}$$

可以将以上积分转换成一个面积分计算，并忽略包围所有散射粒子体积的无限远表面。因此得到

$$\begin{aligned} L &= n_0 N\mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{K^2}\iint \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \nabla(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}}) \right\} \\ &= -\frac{n_0 N}{K}2\pi b^2\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\sin\theta\cos\theta\sin(Kb\cos\theta) \\ &= -n_0 N\frac{4\pi}{3}b^3 = -8Nf_s \end{aligned} \tag{6.7.29}$$

在求解上式的时候，采用了低频限制条件，使 $Kb \ll 1$，因此，$\sin(Kb\cos\theta) \approx Kb\cos\theta$。小孔校正的结果也可以通过将式(6.7.26)代入式(6.7.22)得到，为：

$$\begin{aligned} L &= n_0 N\mathrm{Re}\left\{ \iiint \mathrm{d}\boldsymbol{r}[g(r) - 1]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}} \right\} \\ &\approx n_0 N\mathrm{Re}\left\{ \iiint \mathrm{d}\boldsymbol{r}[g(r) - 1] \right\} \end{aligned} \tag{6.7.30}$$

这里又一次假设了低频限制条件，指数项近似等于 1，因为对于较大的距离 r，$g(r) \approx 1$。利用式(6.7.28)中的小孔校正近似，得到 $L = -n_0 N(4\pi b^3/3) = -8Nf_s$，这与式(6.7.29)中的结果相同。

将式(6.7.29)代入式(6.7.25)中，得到在小孔校正(H-C)近似下的有效介电常数。

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mathrm{eff}} = \epsilon\Bigg\{&\left[\frac{1 + 2f_s(\epsilon_s - \epsilon)/(\epsilon_s + 2\epsilon)}{1 - f_s(\epsilon_s - \epsilon)/(\epsilon_s + 2\epsilon)}\right] + \\ &\mathrm{i}\, 2f_s k^3 a^3\left|\frac{(\epsilon_s - \epsilon)/(\epsilon_s + 2\epsilon)}{1 - f_s(\epsilon_s - \epsilon)/(\epsilon_s + 2\epsilon)}\right|^2(1 - 8f_s)\Bigg\} \end{aligned} \tag{6.7.31}$$

很明显，H-C 结果只对散射粒子占有较小体积分数的情况有效。对于 $f > 1/8$ 的情况，从式(6.7.31)可以观察到虚部是负的，这是一个物理上不能接受的结果。

Percus-Yevick 成对分布函数(Wertheim，1963)是一个更现实的近似，当将其用于式(6.7.30)时，可以得到

$$L = N\left[\frac{(1 - f_s)^4}{(1 + 2f_s)^2} - 1\right] \tag{6.7.32}$$

将式(6.7.32)代入式(6.7.25)式得到

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mathrm{eff}} = \epsilon\Bigg\{&\left[\frac{1 + 2f_s(\epsilon_s - \epsilon)/(\epsilon_s + 2\epsilon)}{1 - f_s(\epsilon_s - \epsilon)/(\epsilon_s + 2\epsilon)}\right] + \\ &\mathrm{i}\, 2f_s k^3 a^3\left|\frac{(\epsilon_s - \epsilon)/(\epsilon_s + 2\epsilon)}{1 - f_s(\epsilon_s - \epsilon)/(\epsilon_s + 2\epsilon)}\right|^2\frac{(1 - f_s)^4}{(1 + 2f_s)^2}\Bigg\} \end{aligned} \tag{6.7.33}$$

要注意对于 $f_s \ll 1$ 的情况，式(6.7.33)可以简化为式(6.7.31)。而且更令人感兴趣的是，从式

(6.7.33)中可以得到:当 $f_s=0$ 时,$\epsilon_{eff}=\epsilon$;当 $f_s=1$ 时,$\epsilon_{eff}=\epsilon_s$。

6.7.2 连续随机介质的有效介电常数

考虑一个具有介电常数 $\epsilon(\boldsymbol{r})$的随机介质。通过引入一个辅助介电常数 ϵ_g,可将矢量波动方程写作

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}-k_g^2\boldsymbol{E}=k_0^2\left(\frac{\epsilon(\boldsymbol{r})-\epsilon_g}{\epsilon_0}\right)\boldsymbol{E}\tag{6.7.34}$$

其中 $k_g^2=\omega^2\mu_0\epsilon_g$,$k_0^2=\omega^2\mu_0\epsilon_0$。我们使 $\overline{\overline{G}}_g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$为满足以下方程的并矢格林函数

$$\nabla\times\nabla\times\overline{\overline{G}}_g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-k_g^2\overline{\overline{G}}_g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\overline{\overline{I}}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\tag{6.7.35}$$

如果用 $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$表示式(6.7.34)中具有波数 k_g 的均匀波动方程的解,得到:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})+k_0^2\iiint\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\overline{\overline{G}}_g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\epsilon(\boldsymbol{r}')-\epsilon_g}{\epsilon_0}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\tag{6.7.36}$$

要考虑到场点 $\boldsymbol{r}$ 和源点 $\boldsymbol{r}'$ 可能重合,因此我们必须解释并矢格林函数的奇异性。

并矢格林函数的奇异性依赖于无限小排除体的形状。我们假设随机介质的相关函数是球形对称的,并选择球形形状的排除体。并矢格林函数可以被分解为(Tsang 等,1985)

$$\overline{\overline{G}}_g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\mathrm{PV}\overline{\overline{G}}_g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-\overline{\overline{I}}\frac{1}{3k_g^2}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\tag{6.7.37}$$

其中,PV 代表主要值。将式(6.7.37)代入式(6.7.36)中,得到

$$\boldsymbol{E}_e(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})+k_0^2\iiint\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\mathrm{PV}\overline{\overline{G}}_g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\xi(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}_e(\boldsymbol{r}')\tag{6.7.38}$$

其中,

$$\boldsymbol{E}_e(\boldsymbol{r})=\frac{\epsilon(\boldsymbol{r})+2\epsilon_g}{3\epsilon_g}\boldsymbol{E}_e(\boldsymbol{r})\tag{6.7.39}$$

$$\xi(\boldsymbol{r})=3\frac{\epsilon_g}{\epsilon_0}\left[\frac{\epsilon(\boldsymbol{r})-\epsilon_g}{\epsilon(\boldsymbol{r})+2\epsilon_g}\right]\tag{6.7.40}$$

式(6.7.39)表示介质球内部的均匀电场 $\boldsymbol{E}$ 与外加静电场 $\boldsymbol{E}_e$ 的关系。从式(6.7.39)得到

$$\boldsymbol{E}_e(\boldsymbol{r})=\frac{1}{3\epsilon_g}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})+\frac{2}{3}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\tag{6.7.41}$$

其中,$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})=\epsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$。将式(6.7.39)和式(6.7.40)相乘产生

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})=\epsilon_g\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})+\epsilon_0\xi(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}_e(\boldsymbol{r})\tag{6.7.42}$$

对上式取集平均,得到

$$\langle\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\rangle=\epsilon_g\langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\rangle+\epsilon_0\langle\xi(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}_e(\boldsymbol{r})\rangle\tag{6.7.43}$$

因此$\langle\xi(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}_e(\boldsymbol{r})\rangle$表示介电常数为 ϵ_g 的背景介质中的极化矢量。

在强起伏理论中,我们施加下面的条件:

$$\langle\xi(\boldsymbol{r})\rangle=0\tag{6.7.44}$$

根据式(6.7.40),要求

$$\left\langle\frac{\epsilon(\boldsymbol{r})-\epsilon_g}{\epsilon(\boldsymbol{r})+2\epsilon_g}\right\rangle=0\tag{6.7.45}$$

假设随机介质混合物包含 n 个介电常数 ϵ_p,体积分数为 f_p 的组成部分,其中 $p=1,2,\cdots,n$。因此有

$$\sum_{p=1}^{n} f_p = 1 \tag{6.7.46}$$

方程(6.7.45)给出:

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_g}{\varepsilon_p + 2\varepsilon_g} f_p = 0 \tag{6.7.47}$$

式(6.7.46)和(6.7.47)的代数相乘直接产生了 Polder-van Santen 混合公式,为:

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_0}{\varepsilon_p + 2\varepsilon_g} f_p = \frac{\varepsilon_g - \varepsilon_0}{3\varepsilon_g} \tag{6.7.48}$$

此公式最开始是将不均匀性当作偶极子处理时得到的(Polder and van Santen, 1946)。因此我们确定 ε_g 为低频限制条件下的有效介电常数。

当频率增大时,多重散射导致有效介电常数的虚部出现,以解释波的衰减。对式(6.7.38)取集平均,得到

$$\langle \boldsymbol{E}_e(\boldsymbol{r}) \rangle = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) + k_0^2 \iiint \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \,\mathrm{PV}\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}_g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \cdot \langle \xi(\boldsymbol{r}') \boldsymbol{E}_e(\boldsymbol{r}') \rangle \tag{6.7.49}$$

对式(6.7.38)应用双局部近似产生

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{E}_e(\boldsymbol{r}) \rangle \approx \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) + k_0^2 \iiint \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \,\mathrm{PV}\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}_g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \cdot \\ \iiint \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'' \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}'') \cdot \langle \boldsymbol{E}_e(\boldsymbol{r}'') \rangle \end{aligned} \tag{6.7.50}$$

其中,

$$\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}'') = k_0^2 \mathrm{PV}\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}_g(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'') R_\xi(|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}''|) \tag{6.7.51}$$

$$R_\xi(|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}''|) = \langle \xi(\boldsymbol{r}') \xi(\boldsymbol{r}'') \rangle$$

比较式(6.7.49)和式(6.7.50)给出

$$\langle \xi(\boldsymbol{r}') \boldsymbol{E}_e(\boldsymbol{r}') \rangle = \iiint \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'' \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}'') \cdot \langle \boldsymbol{E}_e(\boldsymbol{r}'') \rangle \tag{6.7.52}$$

从式(6.7.41)得到

$$\langle \boldsymbol{E}_e(\boldsymbol{r}) \rangle = \frac{1}{3\varepsilon_g} \langle \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \rangle + \frac{2}{3} \langle \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \rangle \tag{6.7.53}$$

与式(6.7.52)类似,定义有效介电常数 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{eff}}$,使下式成立

$$\langle \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \rangle = \iiint \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \cdot \langle \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') \rangle \tag{6.7.54}$$

将式(6.7.53)代入式(6.7.52),式(6.7.52)代入式(6.7.43)中,得到

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \rangle = \varepsilon_g \langle \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \rangle + \frac{\varepsilon_o}{3\varepsilon_g} \iiint \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \cdot \langle \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}') \rangle + \\ \frac{2\varepsilon_o}{3} \iiint \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \cdot \langle \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') \rangle \end{aligned} \tag{6.7.55}$$

对 $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{eff}}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{eff}}$和 $\boldsymbol{E}_e$ 等进行傅里叶变换,得到:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{k}) = \iiint \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

从式(6.7.54)和(6.7.55)中得到

$$\left[\boldsymbol{I}\!\boldsymbol{I} - \frac{\varepsilon_o}{3\varepsilon_g} \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{k}) \right] \langle \boldsymbol{D}(\boldsymbol{k}) \rangle = \varepsilon_g \langle \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}) \rangle + \frac{2\varepsilon_o}{3} \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{k}) \langle \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}) \rangle \tag{6.7.56}$$

因此可以得到有效介电常数为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{eff}}(\boldsymbol{k}) = \varepsilon_g \boldsymbol{II} + \varepsilon_o\left[\boldsymbol{II} - \frac{\varepsilon_o}{3\varepsilon_g}\boldsymbol{\xi}_{\text{eff}}(\boldsymbol{k})\right]^{-1}\boldsymbol{\xi}_{\text{eff}}(\boldsymbol{k}) \tag{6.7.57}$$

第二项为双局部近似给出的校正项,其有效性由下式给出。

$$|\boldsymbol{\xi}_{\text{eff}}(\boldsymbol{k})| \ll 1 \tag{6.7.58}$$

从式(6.7.57)式可得到近似式

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{eff}} \approx \varepsilon_g \boldsymbol{II} + \varepsilon_o \boldsymbol{\xi}_{\text{eff}}^{(0)} \tag{6.7.59}$$

其中,

$$\boldsymbol{\xi}_{\text{eff}}^{(0)} = k_0^2 \iiint \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\,\mathrm{PV}\boldsymbol{GG}_g(\boldsymbol{r})R_\xi(|\boldsymbol{r}|)$$

与式(6.7.51)的傅里叶变换相同,在变换式中我们假设了低频限制和小 r 的条件,使 $e^{ikr}\approx 1$。对于球形散射粒子,计算下式:

$$\begin{aligned}\mathrm{PV}\boldsymbol{GG}_g(\boldsymbol{r}) &= \left(\boldsymbol{II} + \frac{1}{k_g^2}\nabla\nabla\right)\frac{e^{ik_g r}}{4\pi r} \\ &= \boldsymbol{II}(-1 + ik_g r + ik_g^2 r^2)\frac{e^{ik_g r}}{4\pi k_g^2 r^3} + \\ &\quad \hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}}(3 - i3k_g r - k_g^2 r^2)\frac{e^{ik_g r}}{4\pi k_g^2 r^3}\end{aligned}$$

其中,$\hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}} = (\hat{\boldsymbol{x}}x/r + \hat{\boldsymbol{y}}y/r + \hat{\boldsymbol{z}}z/r)(\hat{\boldsymbol{x}}x/r + \hat{\boldsymbol{y}}y/r + \hat{\boldsymbol{z}}z/r)$,因此得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}_{\text{eff}}^{(0)} &= \boldsymbol{II}k_0^2\int \mathrm{d}r(-1 + ik_g r + ik_g^2 r^2)\frac{e^{ik_g r}}{k_g^2 r}R_\xi(|\boldsymbol{r}|) + \\ &\quad k_0^2\int \mathrm{d}r\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi r^2\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}}(3 - i3k_g r - k_g^2 r^2)\frac{e^{ik_g r}}{4\pi k_g^2 r^3}R_\xi(|\boldsymbol{r}|) \\ &= \boldsymbol{II}k_0^2\int \mathrm{d}r(-1 + ik_g r + k_g^2 r^2)\frac{e^{ik_g r}}{k_g^2 r}R_\xi(|\boldsymbol{r}|) + \\ &\quad \boldsymbol{II}k_0^2\int \mathrm{d}r(3 - i3k_g r - k_g^2 r^2)\frac{e^{ik_g r}}{3k_g^2 r}R_\xi(|\boldsymbol{r}|) \\ &= \boldsymbol{II}\,\frac{2}{3}k_0^2\int \mathrm{d}r r R_\xi(|\boldsymbol{r}|)e^{ik_g r}\end{aligned}$$

在低频限制情况下,有近似式:$e^{ik_g r}\approx 1 + ik_g r$。因此得到

$$\varepsilon_{\text{eff}} \approx \varepsilon_g + i\frac{2\varepsilon_o}{3}k_o^2 k_g\int_0^a \mathrm{d}r r^2 R_\xi(r)$$

对于具有介电常数分别为 ε 和 ε_s,体积分数分别为 f 和 f_s 的两种介质,有

$$R_\xi(r) = \langle\xi^2\rangle = f_s\left[3\frac{\varepsilon_g}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_s - \varepsilon_g}{\varepsilon_s + 2\varepsilon_g}\right)\right]^2 + (1 - f_s)\left[3\frac{\varepsilon_g}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_g}{\varepsilon + 2\varepsilon_g}\right)\right]^2$$

因此,在低频情况下,得到有效介电常数为

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \varepsilon_g\left\{1 + i2k_g^3 a^3\left[f_s\left(\frac{\varepsilon_s - \varepsilon_g}{\varepsilon_s + 2\varepsilon_g}\right)^2 + (1 - f_s)\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_g}{\varepsilon + 2\varepsilon_g}\right)^2\right]\right\} \tag{6.7.60}$$

很明显,这个公式也产生了极限值,即:当 $f_s = 1$ 时,$\varepsilon_{\text{eff}} = \varepsilon_s$;当 $f_s = 0$ 时,$\varepsilon_{\text{eff}} = \varepsilon$。

对于较小的体积分数,我们使 $f_s \ll 1$ 和 $\varepsilon_g \approx \varepsilon + \delta$,其中 δ 表示一个较小的数。以上结果可以简化为

$$\varepsilon_g \approx \varepsilon[1 + 3f_s(\varepsilon_s - \varepsilon_g)/(\varepsilon_s + 2\varepsilon_g)]$$

$$\varepsilon_{\text{eff}} \approx \varepsilon\left[1 + 3f_s\left(\frac{\varepsilon_s - \varepsilon_g}{\varepsilon_s + 2\varepsilon_g}\right) + \mathrm{i}2f_s k^3 a^3\left(\frac{\varepsilon_s - \varepsilon_g}{\varepsilon_s + 2\varepsilon_g}\right)^2\right]$$

这与随机离散散射粒子模型得到的结果相同。

习 题

6.7.1 自相似模型用于解释极低频率下岩石的介质响应，因此可以忽略散射引起的衰减(Sen 等，1981)。如果一个电场 $\boldsymbol{E}^{\text{inc}} = \hat{z}$ 入射到介电常数 ε_s 的球形粒子上，粒子外的电势为

$$\Phi_{\text{out}} = -r\cos\theta + \frac{A}{r^2}\cos\theta$$

而且

$$A = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_o}{2\varepsilon_o + \varepsilon_s}a^3$$

球体的体积为 $V_0 = 4\pi a^3/3$。因此当求出 A 后，介电常数可以由下式给出：

$$\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_o} = \frac{1 + 2A/a^3}{1 - A/a^3}$$

考虑一个介电常数为 ε_m(基质)的球体，外面涂以介电常数为 ε_w 的材料(水)。球体内层半径为 b，外层半径为 a。电场 $\boldsymbol{E}^{\text{inc}} = \hat{z}$ 入射到球体上，证明

$$A = a^3\frac{(\varepsilon_w - \varepsilon_o)(\varepsilon_m + 2\varepsilon_w) + \eta(2\varepsilon_w + \varepsilon_o)(\varepsilon_m - \varepsilon_w)}{(\varepsilon_w + 2\varepsilon_o)(\varepsilon_m + 2\varepsilon_w) + \eta(2\varepsilon_w - 2\varepsilon_o)(\varepsilon_m + \varepsilon_w)}$$

并证明涂层球体的总介电常数为

$$\varepsilon_{cs} = \varepsilon_w\left[\frac{\varepsilon_m + 2\varepsilon_w + 2\eta(\varepsilon_m - \varepsilon_w)}{\varepsilon_m + 2\varepsilon_w - \eta(\varepsilon_m - \varepsilon_w)}\right]$$

其中，$\eta = b^3/a^3$ 为内层球体的体积分数。应用强起伏理论的介电常数混合公式

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{\varepsilon_p - \varepsilon_g}{\varepsilon_p + 2\varepsilon_g}f_p = 0$$

可以得到具有 n 种涂层球体混合物的有效介电常数为：

$$\sum_{p=1}^{n}f_p\frac{\varepsilon_{cs}^{(p)} - \varepsilon_g}{\varepsilon_{cs}^{(p)} + 2\varepsilon_g} = 0$$

其中，f_p 为第 p 种物质的体积分数，$\varepsilon_{cs}^{(p)}$ 为相应涂层球体的介电常数。如果使第 p 种涂层内层球体的体积分数为 η_p，考虑下面的简单模型，假设岩石中所有的球体都具有相同的 η，即，对于所有的 $p = 1,2,3,\cdots,n$，有 $\eta_p = \eta$。因此，对所有的 p，有 $\varepsilon_{cs}^{(p)} = \varepsilon_{cs}$，证明：$\varepsilon_g = \varepsilon_{cs}$。岩石具有孔隙率 ϕ，孔隙由水充满，因此，$\eta = 1 - \phi$。得到：

$$\varepsilon_g = \varepsilon_{cs} = \varepsilon_w\left[\frac{\varepsilon_m 0 + 2\varepsilon_w + 2(1 - \phi)(\varepsilon_m - \varepsilon_w)}{\varepsilon_m + 2\varepsilon_w - (1 - \phi)(\varepsilon_m - \varepsilon_w)}\right]$$

在极低频率的情况下，有 $\varepsilon_m = \varepsilon'_m + \mathrm{i}\sigma_m/\omega$ 和 $\varepsilon_w = \varepsilon'_w + \mathrm{i}\sigma_w/\omega$。其中 σ_m 和 σ_w 分别为岩石基质和水的电导率。设 $\varepsilon_g = \varepsilon'_g + \mathrm{i}\sigma_g/\omega$ 成立，其中 σ_g 为有效电导率。证明在通常情况，当 σ_m/ω 在准静态条件下起主要作用时，下式成立：

$$\sigma_g = \sigma_w\frac{2\phi}{3 - \phi}$$

因此对于较小的 ϕ，σ_g 与 ϕ 成正比。通过运用微分方法，自相似模型进一步给出 $\sigma_g \approx \phi^{3/2}$(见 Sen 等，1981)。

Marxell-Garnett 混合公式为

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\varepsilon + 2\varepsilon_1} = f_2\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1}$$

其中，f_2 为第二种物质的体积分数，体积分数 $f_1 = 1 - f_2$。Marxell-Garnett 公式中，假设 ε_1 为背景物质的介电常数，ε_2 为散射体的介电常数。在岩石混合物中，假设水是背景介质，岩石颗粒为散射粒子，如果使 $\varepsilon_1 = \varepsilon_w$，$\varepsilon_2 = \varepsilon_m$，而且 $f_2 = 1 - \phi$，求解 ε。

6.7.2 假设有两种物质组成的混合物。一种是背景介质，具有介电常数 ϵ_b，体积分数 f_b，另一种物质是散射粒子，具有介电常数 ϵ_s，体积分数 f_s，假设散射粒子是半径为 a 的球体，已知 $f_b+f_s=1$。下面用简单的物理参数建立混合物的相关函数 $\xi(\boldsymbol{r})$，首先看一维问题。

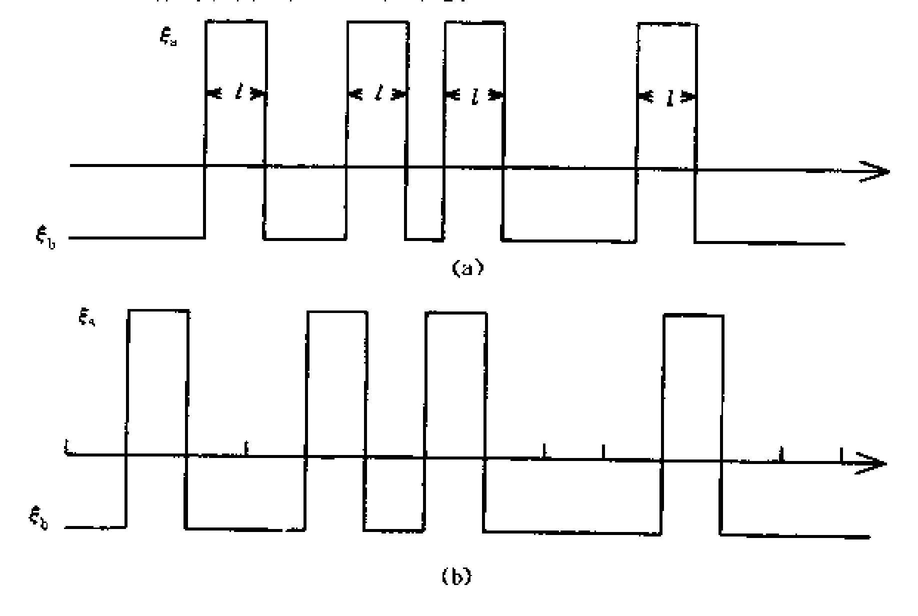


图 6.7-2

考虑在同一条基线上分布的脉冲，高度为 ξ_s，宽度为 l(与三维情况下的 $2a$ 相对应)，基线上的其余部分幅度为 ξ_b，如图 6.7-2a 所示。所求的问题是确定相关函数。为了简化问题，将基线分成长度为 l 的几段，每一分割的幅度假设为 ξ_s 或者 ξ_b，如图 6.7-2a 所示。假设第 k 段的幅度为 $\xi(k)$，则 $Pr(\xi(k)=\xi_s)=f_s$，$Pr(\xi(k)=\xi_b)=f_b$ 和 $\langle\xi(k)\rangle=f_s\xi_s+f_b\xi_b=0$，为了计算相关函数，证明

$$\langle\xi(k)\xi(k+m)\rangle = f_s\xi_s^2+f_b\xi_b^2 \qquad 当\ m=0$$

$$\begin{aligned}\langle\xi(k)\xi(k+m)\rangle &= Pr[\xi(k)=\xi_s,\xi(k+m)=\xi_s]\xi_s^2+\\ &\quad Pr[\xi(k)=\xi_s,\xi(k+m)=\xi_b]\xi_s\xi_b+\\ &\quad Pr[\xi(k)=\xi_b,\xi(k+m)=\xi_s]\xi_b\xi_s+\\ &\quad Pr[\xi(k)=\xi_b,\xi(k+m)=\xi_b]\xi_b\\ &= f_s^2\xi_s^2+2f_bf_s\xi_s\xi_b+f_b^2\xi_b^2=0\end{aligned}$$

利用三维连续统一体情况下的结果可以给出

$$R_\xi(r)=\begin{cases}\langle\xi^2\rangle & 0\leqslant r\leqslant a\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$C_\xi(r)=\begin{cases}\langle|\xi^2|\rangle & 0\leqslant r\leqslant a\\ 0 & 其他\end{cases}$$

将以上方法扩展到三种物质组成的混合物，证明

$$R_\xi(r)=\begin{cases}\langle\xi^2\rangle & 0\leqslant r\leqslant a\\ \xi_{s2}^2f_{s2}/(1-f_{s2}) & a_1<r\leqslant a_2\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$C_\xi(r)=\begin{cases}\langle|\xi|^2\rangle & 0\leqslant r\leqslant a\\ |\xi_{s2}|^2f_{s2}/(1-f_{s2}) & a_1<r\leqslant a_2\\ 0 & 其他\end{cases}$$

6.7.3 应用傅立叶变换，我们可以将两层介质的并矢格林函数表示为以下积分：

$$\boldsymbol{GG}_{01}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\iint \mathrm{d}\boldsymbol{k}_\perp\ \boldsymbol{g}_{01}(\boldsymbol{k}_\perp,z,z')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\perp\cdot(\boldsymbol{r}_\perp-\boldsymbol{r}'_\perp)}$$

其中，

$$g_{01}(\boldsymbol{k}_\perp, z, z') = \frac{\mathrm{i}}{8\pi^2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}}{k_{1z}}$$

$$\left\{\frac{T_{10}^{\mathrm{TE}}}{D_2(k_\perp)}\hat{\boldsymbol{e}}(k_{0z})[R_{12}^{\mathrm{TE}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k_{1z}d}\hat{\boldsymbol{e}}_1(-k_{1z})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1z}z'} + \hat{\boldsymbol{e}}_1(k_{1z})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{1z}z'}]\right.$$

$$\left.\frac{k_1}{k}\frac{T_{10}^{\mathrm{TM}}}{F_2(k_\perp)}\hat{\boldsymbol{h}}(k_{0z})[R_{12}^{\mathrm{TM}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k_{1z}d}\hat{\boldsymbol{h}}_1(-k_{1z})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1z}z'} + \hat{\boldsymbol{h}}_1(k_{1z})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{1z}z'}]\right\}$$

在远场情况下，应用二维驻留相位法证明当 $kr\to\infty$ 时，下式成立

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x x + k_y y + \sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}z)}$$

其中观察点坐标为 $x = r\sin\theta\cos\phi$，$y = r\sin\theta\sin\phi$，$z = r\cos\theta$，并证明驻留相位点由下式确定

$$k_x = k\sin\theta\cos\phi$$

$$k_y = k\sin\theta\sin\phi$$

通过必要的步骤证明下式成立。

$$GG_{01}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\left\{\left[\frac{T_{01}^{\mathrm{TE}}}{D_2}\hat{\boldsymbol{e}}(k_{0z})\hat{\boldsymbol{e}}_1(k_{1z}) + \frac{k}{k_1}\frac{T_{01}^{\mathrm{TM}}}{F_2}\hat{\boldsymbol{h}}(k_{0z})\hat{\boldsymbol{h}}_1(k_{1z})\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}'} + \left[\frac{T_{01}^{\mathrm{TE}}}{D_2}R_{12}^{\mathrm{TE}}\hat{\boldsymbol{e}}(k_{0z})\hat{\boldsymbol{e}}_1(-k_{1z}) + \frac{k}{k_1}\frac{T_{01}^{\mathrm{TM}}}{F_2}R_{12}^{\mathrm{TM}}\hat{\boldsymbol{h}}(k_{0z})\hat{\boldsymbol{h}}_1(-k_{1z})\right]\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k_{1z}d-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}'}\right\}$$

其中 k_x，k_y 等于驻留相位点的值。

6.7.4 考虑一种由球形分子组成的物质嵌入到自由空间中，Clausius-Mossotti 公式给出的有效介电常数为

$$\epsilon = \epsilon_o\frac{1 + 2N\alpha/3\epsilon_o}{1 - N\alpha/3\epsilon_o}$$

其中，N 为单位体积内的分子数，α 为根据 $\boldsymbol{P} = N\alpha\boldsymbol{E}_{\mathrm{local}}$ 式确定的常数。

(1)为了确定常数 α，首先计算球形分子的极化矢量 $\boldsymbol{P}$，该分子在均匀静电场 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{local}}$ 中的介电常数为 ϵ_s。静电场由下式给出。

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{local}} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{in}} + \frac{\boldsymbol{P}}{3\epsilon_o}$$

其中，$\boldsymbol{E}^{\mathrm{in}}$ 为球形分子内部的电场。从 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{in}}$ 的表达式可以推导出下式。

$$\boldsymbol{P} = 3\epsilon_o\frac{\epsilon_s - \epsilon_o}{\epsilon_s + 2\epsilon_o}\boldsymbol{E}_{\mathrm{local}}$$

使 f 为分子的体积分数，即为

$$f = \frac{\text{分子总体积}}{\text{物质总体积}},\qquad y = \frac{\epsilon_s - \epsilon_o}{\epsilon_s + 2\epsilon_o},\qquad V_o = \frac{4}{3}\pi a^3$$

证明 Maxwell-Garnett 混合公式

$$\epsilon_{\mathrm{eff}} = \epsilon_o\frac{1 + 2fy}{1 - fy}$$

(2)当频率变高时，由于散射引起的损耗变大，因此有效介电常数公式中应包括虚部。为了简单起见，应用瑞利散射模型计算，证明有效介电常数为

$$\epsilon_{\mathrm{eff}} = \epsilon_o\left(\frac{1 + 2f\gamma}{1 - f\gamma} + \mathrm{i}\,2fk^3a^3\gamma^2\right)$$

6.8 部分习题答案

6.1.1

(1) $\boldsymbol{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon r^3}(\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta + \hat{\boldsymbol{r}}2\cos\theta)$。

(2) $p = 4\pi\varepsilon a^3\left(\frac{\varepsilon_p - \varepsilon_o}{\varepsilon_p + 2\varepsilon_o}\right)E_o$。 (3) $P_s = \frac{1}{2}\int_0^\pi r^2\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi E_\theta H_\phi^* = \frac{4\pi}{3\eta}\left(\frac{\varepsilon_p - \varepsilon_o}{\varepsilon_p + 2\varepsilon_o}\right)^2 k^4 a^6 E_0^2$。

散射截面为 $2\eta P_s/E_0^2 = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{\varepsilon_p - \varepsilon_o}{\varepsilon_p + 2\varepsilon_o}\right)^2 k^4 a^6$。

(4)每个粒子的散射功率为

$$P_{\text{scatt}} = \frac{4\pi}{3\eta}\left(\frac{\varepsilon_p - \varepsilon_o}{\varepsilon_p + 2\varepsilon_o}\right)^2 k^4 a^6 E_0^2 = \frac{\pi}{12\eta}k^4 a^6 E_0^2$$

设粒子密度近似为每立方米 $3/4\pi a^3$，具有面积 A 和单位长度 dl 的控制体积内的总功率损失为

$$dP = \frac{\pi}{12\eta}k^4 a^6 E_0^2 \times \frac{3}{4\pi a^3} \times A dl$$

在光纤中穿过面积 A 的功率为 $P = \frac{1}{2\eta}E_o^2 A$。因此

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dl} = \frac{1}{8}k^4 a^3 \approx 2 \times 10^{-4}\text{m}^{-1} = 0.21\text{km}^{-1}$$

引起的功率损失为 6.99 dB/km。

$$P_{\text{scatt}} = \frac{4\pi}{3\eta}\left|\left(\frac{\varepsilon + i\sigma/\omega - \varepsilon_o}{\varepsilon + i\sigma/\omega + 2\varepsilon_o}\right)\right|^2 k^4 a^6 |E_o|^2 \frac{3}{4\pi a^3}A dl \approx \frac{1}{\eta}k^4 a^3 |E_o|^2 A dl$$

$$P_{\text{diss}} = \frac{1}{2}\int dV\sigma |E_o|^2 \approx \frac{1}{2}|E_o|^2 \omega\varepsilon A dl = \frac{1}{2}\omega\varepsilon |E_o|^2 A dl = \frac{k}{2\eta}|E_o|^2 A dl$$

$$\frac{P_{\text{scatt}}}{P_{\text{diss}}} = 2k^3 a^3 = 2(2\pi)^3\frac{a^3}{\lambda^3} \ll 1$$

因为 $a \ll \lambda$，所以吸收损失是主要的。

6.2.1

入射波的电场为

$$\boldsymbol{E}_i = -\frac{1}{i\omega\varepsilon_o}\nabla\times\boldsymbol{H}^i = -\frac{H_o}{i\omega\varepsilon_o}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\hat{\boldsymbol{\rho}}\,i\frac{n}{\rho}J_n(k\rho) - \hat{\boldsymbol{\phi}}kJ'_n(k\rho)\right\}e^{in\phi - in\pi/2}$$

散射波的电场为

$$\boldsymbol{E}^s = -\frac{1}{i\omega\varepsilon_o}\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\left\{\hat{\boldsymbol{\rho}}\,i\frac{n}{\rho}H_n^{(1)}(k\rho) - \hat{\boldsymbol{\phi}}kH_n^{(1)'}(k\rho)\right\}e^{in\phi - in\pi/2}$$

当远场 $k\rho \gg 1$ 时，磁场为

$$\boldsymbol{H}^s \approx -\hat{z}H_o\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}}\frac{J'_n(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)}e^{ik\rho + in(\phi - \pi) - i\pi/4}$$

$$\approx \hat{z}iH_o\sqrt{\frac{\pi}{2k\rho}}\left[(ka)^2\cos\phi - \frac{(ka)^4}{8}\cos2\phi + \cdots\right]e^{ik\rho - i\pi/4}$$

我们看到对于平行于轴线的磁场，散射波不再是各向同性的。

6.3.1

$$[Q_{Di}^{\pm}]_{mn} = \frac{-1}{P\sqrt{k_{izm}}}\int_P dx e^{-i[(m-n)kx \pm k_{izm}f(x)]}$$

$$[Q_{Ni}^{\pm}]_{mn} = \mp\frac{k^2 - k_{ixm}k_{ixn}}{z_{izm}P\sqrt{k_{izm}}}\int_P dx e^{-i[(m-n)kx \pm k_{izm}f(x)]}$$

$$f(x) = \begin{cases} h/2 & 0 \leqslant x < P/2 \\ -h/2 & P/2 \leqslant x < P \end{cases} \qquad k = \frac{2\pi}{P} \qquad i = 0,1$$

$$\int_0^P \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}[(m-n)kx \pm k_{izm}f(x)]}$$

$$= \int_0^{P/2} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}[(m-n)kx \pm \frac{k_{izm}h}{2}]} + \int_{P/2}^P \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}[(m-n)k_x \mp \frac{k_{izm}h}{2}]}$$

$$= \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\frac{k_{izm}h}{2}} \frac{\mathrm{i}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m-n)\frac{Pk}{2}} - 1]}{(m-n)k} + \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\frac{k_{izm}h}{2}} \frac{\mathrm{i}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m-n)Pk} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m-n)\frac{Pk}{2}}]}{(m-n)k}$$

$$= \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\frac{k_{izm}h}{2}} \frac{\mathrm{i}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m-n)\pi} - 1]}{(m-n)k} + \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\frac{k_{izm}h}{2}} \frac{\mathrm{i}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m-n)2\pi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m-n)\pi}]}{(m-n)k}$$

$$= \frac{\mathrm{i}[1-(-1)^{m-n}]}{(m-n)k} 2\mathrm{i}\sin\frac{\pm k_{izm}h}{2} = \begin{cases} \dfrac{\mp 4}{(m-n)k}\sin\dfrac{k_{izm}h}{2} & m-n\text{：奇数} \\ 0 & m-n\text{：偶数} \end{cases}$$

6.4.2

$$\langle |\boldsymbol{E}|^2\rangle = \frac{k^2 \boldsymbol{E}_0|^2}{16\pi^2 r^2} |(\boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{k}}_s \cdot \hat{\boldsymbol{k}}_s) \cdot \boldsymbol{F}(\alpha_0, \beta_0)|^2 \langle H^* \rangle$$

从公式(6.4.50)中得到

$$\langle \lim_{k\to\infty} H^* \rangle = \frac{4\pi^2 A_0}{k_{dx}^2} P\left(-\frac{k_{dx}}{k_{dz}}, -\frac{k_{dy}}{k_{dz}}\right)$$

对于 b 极化的入射场，a 极化的散射强度由下式给出

$$\langle |E_s(\boldsymbol{r})|^2\rangle = \frac{k^2 |E_0|^2}{16\pi^2 r^2} |\hat{\boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{F}_b(\alpha_0, \beta_0)|^2$$

其中，$\boldsymbol{F}_b(\alpha_0,\beta_0) = \boldsymbol{F}(\alpha_0,\beta_0)|_{\hat{e}_i = b}$并且

$$\boldsymbol{F}(\alpha_0,\beta_0) = (1+\alpha_0^2+\beta_0^2)^{1/2}\Big\{-(\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{q}}_i)(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_i)\hat{\boldsymbol{q}}_i(1-R^{\mathrm{TE}}) + (\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{p}}_i)(\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{q}}_i)(1+R^{\mathrm{TM}}) + (\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{q}}_i)([\hat{\boldsymbol{k}}_s\times(\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{q}}_i)](1+R^{\mathrm{TE}}) + (\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{p}}_i)(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_i)(\hat{\boldsymbol{k}}_s\times\hat{z}_i)(1-R^{\mathrm{TM}})\Big\}$$

用 $\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{-\boldsymbol{k}_d}{|k_d|} = \frac{\boldsymbol{k}_s - \boldsymbol{k}_i}{|k_d|}$，$\hat{\boldsymbol{q}}_i = \frac{\hat{\boldsymbol{k}}_i\times\hat{\boldsymbol{n}}}{|\hat{\boldsymbol{k}}_i\times\hat{\boldsymbol{n}}|} = \frac{\hat{\boldsymbol{k}}_i\times\hat{\boldsymbol{k}}_s}{|\hat{\boldsymbol{k}}_i\times\hat{\boldsymbol{k}}_s|}$，$\hat{\boldsymbol{p}}_i = \hat{\boldsymbol{q}}_i\times\hat{\boldsymbol{h}}_i$，$\hat{\boldsymbol{v}} = \hat{\boldsymbol{h}}\times\hat{\boldsymbol{k}}_i$，　$\hat{\boldsymbol{h}} = \hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\boldsymbol{v}}$ 我们有

$$|\hat{\boldsymbol{a}}_s\cdot\boldsymbol{F}_b\{\alpha_0,\beta_0\}|^2 = \frac{|k_d|^2}{k_2|\hat{\boldsymbol{k}}_i\times\hat{\boldsymbol{k}}_s|4k_{dz}^2} f\,ba$$

$$f_{vv} = |(\hat{\boldsymbol{h}}_s\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_i)(\hat{\boldsymbol{h}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_s)R^{\mathrm{TE}} + (\hat{\boldsymbol{v}}_s\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_i)(\hat{\boldsymbol{v}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_s)R^{\mathrm{TM}}|^2$$

$$f_{hv} = |(\hat{\boldsymbol{v}}_s\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_i)(\hat{\boldsymbol{h}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_s)R^{\mathrm{TE}} - (\hat{\boldsymbol{h}}_s\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_i)(\hat{\boldsymbol{v}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_s)R^{\mathrm{TM}}|^2$$

$$f_{vh} = |(\hat{\boldsymbol{h}}_s\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_i)(\hat{\boldsymbol{v}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_s)R^{\mathrm{TE}} - (\hat{\boldsymbol{v}}_s\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_i)(\hat{\boldsymbol{h}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_s)R^{\mathrm{TM}}|^2$$

$$f_{hh} = |(\hat{\boldsymbol{v}}_s\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_i)(\hat{\boldsymbol{v}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_s)R^{\mathrm{TE}} + (\hat{\boldsymbol{h}}_s\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_i)(\hat{\boldsymbol{h}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_s)R^{\mathrm{TM}}|^2$$

$$\langle|E_s|^2\rangle = \frac{|E_0|^2|k_d|^4 f_{ab}}{16\pi_2 r^2 k^2|\hat{\boldsymbol{k}}_i\times\hat{\boldsymbol{k}}_s|^4 k_{dz}^2}\langle H^*\rangle$$

$$= \frac{A_0|k_d|^4 f_{ab}|E_0|^2}{4\pi r^2 k^2|\hat{\boldsymbol{k}}_i\times\hat{\boldsymbol{k}}_s|^4 k_{dz}^2} P\left(-\frac{k_{dx}}{k_{dz}}, -\frac{k_{dy}}{k_{dz}}\right)$$

$$\gamma_{ab} = \frac{4\pi r^2\langle|E_s|^2\rangle a}{A\cos\theta_i|E_s|_b^2} = \frac{k^2|\hat{\boldsymbol{a}}\cdot\boldsymbol{F}_b(0,0)|2\langle H^*\rangle|^2}{4\pi A_0\cos\theta_i}$$

$$\gamma_{ab} = \frac{f_{ab}|k_d|^4}{\cos\theta_i|\hat{\boldsymbol{k}}_i\times\hat{\boldsymbol{k}}_s|^4 k_{dz}^4} P\left(-\frac{k_{dx}}{k_{dz}}, -\frac{k_{dy}}{k_{dz}}\right)$$

注释：$\int\gamma_{ab}\mathrm{d}\Omega = \int\frac{\gamma_{ab}}{k^2}\mathrm{d}^2k$。

6.4.3

从公式(6.4.58)中得到

$$\sigma_{hh}(\theta_i) = \sigma_{vv}(\theta_i) = \frac{|R|^2\mathrm{e}^{-\tan^2\theta_i/(2\sigma_2|C''(0)|)}}{\cos^4\theta_i 2\sigma^2|C''(0)|}$$

$$\sigma_2 | C''(0) | = 2\frac{\sigma^2}{\rho^2} = 0.02, |R|^2 \approx 1$$

$$\sigma_{hh} = \sigma_{vv} = \frac{|R|^2 e^{-\tan^2\theta_i/0.04}}{\cos^4\theta_i(0.04)} = 25\frac{e^{-25\tan^2\theta_i}}{\cos^4\theta_i}$$

在 $\theta_i = \pi/2, \frac{e^{-25\tan^2\theta_i}}{\cos^4\theta_i} = 0$ 时,用 L'Hôpital 定则。

6.6.2

$$P(f(x) = \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\sigma\pi}} e^{-\xi^2/2\sigma^2}$$

$$\begin{aligned}
\langle e^{i\alpha f(x)} \rangle &= \frac{1}{2\sqrt{\sigma\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{i\alpha\xi} e^{-\xi^2/2\sigma^2} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\sigma\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[\xi^2 - i2\sigma^2\alpha\xi - \sigma^4\alpha^2] - \frac{\sigma^2\alpha^2}{2}} \\
&= \frac{e^{-\frac{\sigma^2\alpha^2}{2}}}{\sqrt{\sigma\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[\xi - i\sigma\alpha^{\frac{1}{2}}]} \\
&= e^{-\frac{\sigma^2\alpha^2}{2}}
\end{aligned}$$

第 7 章　电磁波理论与狭义相对论

7.1　麦克斯韦-闵可夫斯基(Maxwell-Minkowski)理论

关于狭义相对论原理,可作如下假定:在遵守洛伦兹变换法则的时空坐标中,物理定律对于作匀速运动的观察者形式不变。从而,所有场量虽然数值不同,但麦克斯韦方程的形式相同,而不取决于任何观察者的参照系。在此前提下,光速为常量即为真空中麦克斯韦方程形式不变的直接结果。此空间时间洛伦兹变换条件下的物理定律形式不变被称为洛伦兹协变性。1908 年闵可夫斯基(Minkowski)正式提出,材料中的宏观麦克斯韦方程是洛伦兹协变的。根据他的假设和空间时间坐标的洛伦兹变换,可以得到电磁场矢量变换公式,从而进一步导出各种运动介质的本构关系。

假定以某观察者 S 的观点,宏观电动力学由麦克斯韦方程

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{7.1.1a}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{7.1.1b}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{J} \tag{7.1.1c}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{7.1.1d}$$

和电荷守恒定律

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{7.1.1e}$$

来描述。那么从相对于 S 运动的另一观察者 S' 的观点看来,麦克斯韦方程

$$\nabla' \times \boldsymbol{E}' + \frac{\partial \boldsymbol{B}'}{\partial t'} = 0 \tag{7.1.2a}$$

$$\nabla' \cdot \boldsymbol{B}' = 0 \tag{7.1.2b}$$

$$\nabla' \times \boldsymbol{H}' - \frac{\partial \boldsymbol{D}'}{\partial t} = \boldsymbol{J}' \tag{7.1.2c}$$

$$\nabla' \cdot \boldsymbol{D}' = \rho' \tag{7.1.2d}$$

与电荷守恒定律

$$\nabla' \cdot \boldsymbol{J}' + \frac{\partial \rho'}{\partial t'} = 0 \tag{7.1.2e}$$

采取相同的形式。这里上角撇表示与 S' 有关的量,$\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{D}$,$\boldsymbol{H}$ 为基本场量。假如 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 被视为纯场量,则 $\boldsymbol{D}$,$\boldsymbol{H}$ 就包含了材料介质的信息。仿效索末菲尔德(Sommerfeld),可把 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 看做是强度的实体,把 $\boldsymbol{D}$,$\boldsymbol{H}$ 看做是量的实体。在四维闵可夫斯基空间中,强度实体构成二秩场张量,量的实体构成二秩激发张量。根据闵可夫斯基的假定,我们利用空间和时间的洛伦兹变换可以得到所有场变量的变换定律。

上述描述称为闵可夫斯基表述。这种所有介质材料均可视为麦克斯韦方程中的源项,并

且把两个电磁场矢量视为是基本量的概念,还导致了宏观电磁场理论的其他表述。

专题7.1.A 安培表述

安培表述中,麦克斯韦方程采取下列形式

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_A=-\frac{\partial\boldsymbol{B}_A}{\partial t}$$

$$\nabla\times\left[\frac{1}{\mu_o}\boldsymbol{B}_A\right]=\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_o\boldsymbol{E}_A+\boldsymbol{P}_A-\frac{1}{c^2}\boldsymbol{M}_A\times\boldsymbol{v}+\nabla\times(\boldsymbol{M}_A+\boldsymbol{P}_A\times\boldsymbol{v})+\boldsymbol{J}_A$$

$$\nabla\cdot(\varepsilon_o\boldsymbol{E}_A)=-\nabla\cdot(\boldsymbol{P}_A-\frac{1}{c^2}\boldsymbol{M}_A\times\boldsymbol{v})+\rho_A$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}_A=0$$

式中,下角A代表安培表述。$\boldsymbol{E}_A$ 和 $\boldsymbol{B}_A$ 是两个基本场矢量,而极化矢量 $\boldsymbol{P}_A$ 和磁化矢量 $\boldsymbol{M}_A$ 则表征以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的介质。这些变量通过

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_A;\qquad\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_A$$

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu_o}\boldsymbol{B}_A-\boldsymbol{M}_A-\boldsymbol{P}_A\times\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_o\boldsymbol{E}_A+\boldsymbol{P}_A-\frac{1}{c^2}\boldsymbol{M}_A\times\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_A;\qquad\rho=\rho_A$$

与闵可夫斯基(Minkowski)表述中的变量相联系。

专题7.1.B 博菲(Boffi)表述

麦克斯韦方程在博菲(Boffi)表述中取

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_B=-\frac{\partial\boldsymbol{B}_B}{\partial t}$$

$$\nabla\times\left(\frac{1}{\mu_o}\boldsymbol{B}_B\right)=\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_o\boldsymbol{E}_B+\boldsymbol{P}_B)+\nabla\times\boldsymbol{M}_B+\boldsymbol{J}_B$$

$$\nabla\cdot\varepsilon_o\boldsymbol{E}_B=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}_B+\rho_B$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}_B=0$$

的形式。此处下角B表示博菲(Boffi)表述。式中变量通过

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_B;\qquad\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_B$$

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu_o}\boldsymbol{B}_B-\boldsymbol{M}_B;\qquad\boldsymbol{D}=\varepsilon_o\boldsymbol{E}_B+\boldsymbol{P}_B$$

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_B;\qquad\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}_B$$

与闵可夫斯基(Minkowski)表述中的变量相联系。

专题7.1.C 朱(Chu)的表述

在朱的表述中,麦克斯韦方程取下列形式

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_C=-\frac{\partial}{\partial t}(\mu_o\boldsymbol{H}_C+\mu_o\boldsymbol{M}_C)-\nabla\times(\mu_o\boldsymbol{M}_C\times\boldsymbol{v})$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_C=\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_o\boldsymbol{E}_C+\boldsymbol{P}_C)+\nabla\times(\boldsymbol{P}_C\times\boldsymbol{v})+\boldsymbol{J}_C$$

$$\nabla \cdot \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_C = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}_C + \rho_C$$
$$\nabla \cdot \mu_0 \boldsymbol{H}_C = -\nabla \cdot \mu_0 \boldsymbol{M}_C$$

式中下角 C 表示朱的表述，变量借助下列式子与闵可夫斯基表述中的变量相联系。

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_C + \mu_0 \boldsymbol{M}_C \times \boldsymbol{v}$$
$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}_C + \mu_0 \boldsymbol{M}_C$$
$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_C - \boldsymbol{P}_C \times \boldsymbol{v}$$
$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_C + \boldsymbol{P}_C$$
$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_C$$
$$\rho = \rho_C$$

在各种各样的表述中，麦克斯韦方程是以不确定的形式出现的，尚需给出材料介质的本构关系。戴(Tai,1964)已经证明，一旦本构关系确定，所有的表述是等价的。

安培和朱的表述以运动学方法详尽阐述了介质的组成模式。在安培表述中(Panofsky 和 Phillips,1962)，偶极子介质的组成被看做两个基本单元，一个是电偶极子，一个是电流环。安培模式与原子的结构紧密相关，自旋和绕轨道旋转的电子起着电流环的作用。在朱(Fano,Chu 和 Adler,1960)的表述中，偶极子介质被视为包含电偶极子和磁偶极子。朱的表述很有用，因为与电流环相反，磁偶极子内不存在固有运动的部分。当介质中比偶极矩更高阶的矩显得举足轻重时，模型的构建将愈加复杂化。从电磁波理论出发，我们对场作用下的介质的反应并不感兴趣(即便对介质的组成模型有所帮助)，我们关心的仅是电磁波的表现方式。我们钟爱麦克斯韦-闵可夫斯基理论，不仅仅在于其简明、典雅，而且在于它的实用性。

7.2 洛伦兹变换

电磁波理论曾是促进爱因斯坦狭义相对论发展的最重要的推动力。相对性原理是阐明自然法则的基础，正如所有观察者所描述的，它要求物理定律是形式不变的，空间和时间构成了描述自然现象的坐标系。空间和时间的伽利略变换曾一度作为推导相对运动观察者之间变换定律的基础。基于伽利略变换的相对性原理称为伽利略相对论。在伽利略变换下，牛顿力学是形式不变的，只是电磁作用定律改变了形式。1904 年洛伦兹对相互作匀速运动观察者间真空麦克斯韦方程形式不变的条件进行了研究。1905 年爱因斯坦根据真空中的光速为一普适常量的单一前提，以及真空是线性、各向同性和均质的假设推出了洛伦兹变换定律。建立在洛伦兹变换之上的爱因斯坦相对性原理称为狭义相对论。牛顿力学定律，由于其在洛伦兹变换下并非形式不变，已经被作了修正。在洛伦兹变换下形式不变的物理定律被称为是洛伦兹协变的。

让我们考虑一简单情形，观察者 S 和 S' 坐标轴平行，时间 $t=0$ 时两坐标原点重合。观察者 S' 相对于 S 以速度 $\boldsymbol{v}$ 做匀速运动时(图 7.2-1)，用并矢表示，两运动观察者间时－空坐标的洛伦兹变换由下式给出

$$\mathrm{LT}\begin{cases} ct' = \gamma c t - \gamma \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{r} & (7.2.1\mathrm{a}) \\ \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{r} - \gamma \boldsymbol{\beta} c t & (7.2.1\mathrm{b}) \end{cases}$$

其中，

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{I} + (\gamma - 1)\frac{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}}{\beta^2} \tag{7.2.2}$$

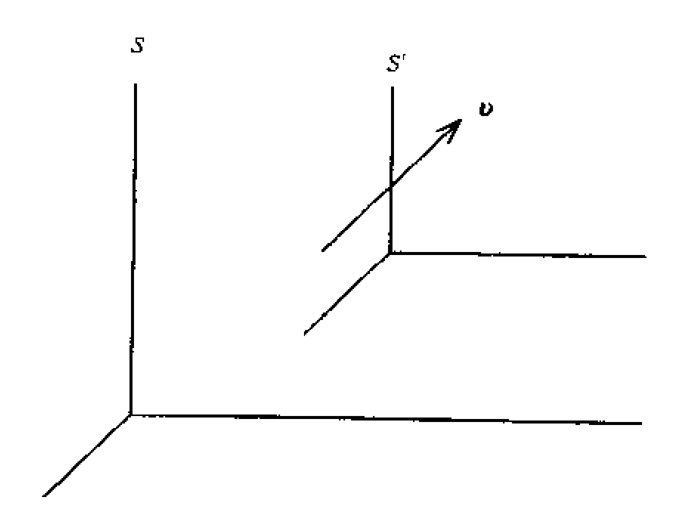


图 7.2-1 观察者 S' 相对于观察者 S 以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7.2.3}$$

$$\beta^2 = \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta} \qquad \boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{v}}{c} \tag{7.2.4}$$

$c = 3\times 10^8$ m/s 为真空中的光速。用矩阵表示,单位并矢 $\boldsymbol{I\!I}$ 为一对角矩阵

$$\boldsymbol{I\!I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.2.5}$$

和

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1+(\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_x}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_y}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_z}{\beta^2} \\ (\gamma-1)\frac{\beta_y\beta_x}{\beta^2} & 1+(\gamma-1)\frac{\beta_y\beta_y}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_y\beta_z}{\beta^2} \\ (\gamma-1)\frac{\beta_z\beta_x}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_z\beta_y}{\beta^2} & 1+(\gamma-1)\frac{\beta_z\beta_z}{\beta^2} \end{bmatrix} \tag{7.2.6}$$

这里 β_x,β_y 和 β_z 是 $\boldsymbol{\beta}$ 的 x,y 和 z 分量。显然,由于 $\boldsymbol{\alpha}$ 是对称的,位置矢量 $\boldsymbol{r}=\hat{x}x+\hat{y}y+\hat{z}z$ 可以看做是受 $\boldsymbol{\alpha}$ 作用的列矩阵,从而产生另一个列矩阵。

例 7.2.1 沿 z 轴方向的速度。

当 $\boldsymbol{v}$ 沿着 z 轴时,$\boldsymbol{\beta}=\hat{z}\beta$,$\beta_x=\beta_y=0$ 且 $\beta_z=\beta$。$\boldsymbol{\alpha}$ 矩阵简化为

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

从式(7.2.1)得到

$$ct' = \gamma(ct-\beta z) \tag{7.2.7a}$$

$$x' = x \tag{7.2.7b}$$

$$y' = y \tag{7.2.7c}$$

$$z' = \gamma(z-\beta ct) \tag{7.2.7d}$$

我们观察到，时间坐标并非普适常量，在 S' 看来是同时的两个物理事件在 S 看来就不再是同时的。

例 7.2.2　四维矢量的长度。

从洛伦兹变换式(7.2.1)可以推导出一个重要的恒等式。取 $\boldsymbol{r}$ 模和 ct' 的平方差并利用式(7.2.1)，可得到

$$|\boldsymbol{r}'|^2 - |ct'|^2 = |\boldsymbol{r}'|^2 - |ct'|^2 \tag{7.2.8}$$

方程(7.2.8)相当重要，因为它与 S 和 S' 间的相对速度 $\boldsymbol{v}$ 无关。在洛伦兹变换下它是个不变的常数。它的平方根可以看做表示一个四维矢量的长度，该矢量代表一物理事件的时空坐标。显然，在这个四维空间里(称为闵可夫斯基空间)，一个矢量的长度既可以是实数也可以是虚数。

例 7.2.3　一阶洛伦兹变换。

当 $\boldsymbol{v}$ 小到有意义的仅是 v/c 的级次关系时，我们有 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{I}$，$\gamma = 1$，洛伦兹变换(7.2.1)成为

$$\text{FOLT}\begin{cases} ct' = ct - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r} & (7.2.9\text{a}) \\ \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{\beta}ct & (7.2.9\text{b}) \end{cases}$$

我们把(7.2.9)叫做一阶洛伦兹变换(FOLT)。如从 FOLT 表达式所见，时间变换中的空间项不一定可以忽略，因为 β 虽然小，但 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 可能大。

例 7.2.4　伽利略变换。

1905 年前，时间被看做是一个普适量，对处于相对匀速运动状态的两个观察者，空间坐标随着运动而改变，但时间坐标保持相同

$$\text{GT}\begin{cases} t' = t \\ \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t \end{cases}$$

此时空变换法则即为伽利略变换(GT)。我们还注意到，当速度 $\boldsymbol{v}$ 不大时，伽利略变换并非洛伦兹变换的极限情形。相反，如从 FOLT(7.2.9a)所看到的，当 $\boldsymbol{v}$ 不大，$\boldsymbol{r}$ 和 ct/β 相比也不大时，洛伦兹变换还原为伽利略变换。数学上 $c\to\infty$ 时，洛伦兹变换还原为伽利略变换。

例 7.2.5　洛伦兹逆变换。

已经给出了伽利略变换、洛伦兹变换和一阶洛伦兹变换下从 S 至 S' 的时空变换法则，求它们的逆变换，即可以得到从 S' 到 S 的变换。以洛伦兹变换为例，我们有

$$\text{LT}\begin{cases} ct = \gamma ct' + \gamma\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}' & (7.2.10\text{a}) \\ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{r}' + \gamma\boldsymbol{\beta}ct' & (7.2.10\text{b}) \end{cases}$$

式(7.2.10)中令 $\gamma = 1$，可得一阶洛伦兹变换；令 $c\to\infty$，可求得伽利略变换。物理上这些公式可以通过将变换法则中的 $\boldsymbol{\beta}$ 替换为 $-\boldsymbol{\beta}$ 获得，因为 S' 相对 S 以 $\boldsymbol{v}$ 运动，S 则相对 S' 以 $-\boldsymbol{v}$ 运动。

现在，我们将 $c\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的洛伦兹变换公式写为下列形式

$$\text{LT}\quad \begin{bmatrix} c\boldsymbol{D}' \\ \boldsymbol{H}' \end{bmatrix} = \gamma\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{-1} & \boldsymbol{\beta} \\ -\boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{\alpha}^{-1} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c\boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{H} \end{bmatrix} \tag{7.2.11}$$

与此类似,还可以证明法拉第电磁场定律和高斯磁场定律在洛伦兹变换下形式不变,只要将 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$ 变换为

$$\text{LT}\quad \begin{bmatrix}\boldsymbol{E}'\\ c\boldsymbol{B}'\end{bmatrix} = \gamma\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{-1} & \boldsymbol{\beta}\\ -\boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{\alpha}^{-1}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}\\ c\boldsymbol{B}\end{bmatrix} \tag{7.2.12}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}^{-1}$是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的逆

$$\boldsymbol{\alpha}^{-1} = \boldsymbol{II} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\frac{\boldsymbol{\beta\beta}}{\beta^2}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\frac{\beta_x\beta_x}{\beta^2} & \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\frac{\beta_x\beta_y}{\beta^2} & \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\frac{\beta_x\beta_z}{\beta^2} \\ \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\frac{\beta_y\beta_x}{\beta^2} & 1 + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\frac{\beta_y\beta_y}{\beta^2} & \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\frac{\beta_y\beta_z}{\beta^2} \\ \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\frac{\beta_z\beta_x}{\beta^2} & \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\frac{\beta_z\beta_y}{\beta^2} & 1 + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\frac{\beta_z\beta_z}{\beta^2} \end{bmatrix}$$

$$= \boldsymbol{\alpha} - \gamma\boldsymbol{\beta\beta}$$

3×3 矩阵 $\boldsymbol{\beta}$ 定义为对任意矢量 $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{A} \tag{7.2.13}$$

以显矩阵形式,

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -\beta_z & \beta_y \\ \beta_z & 0 & -\beta_x \\ -\beta_y & \beta_x & 0 \end{bmatrix} \tag{7.2.14}$$

由 $(\boldsymbol{\beta})^2\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\beta}\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\beta\beta}\cdot\boldsymbol{A} - \beta^2\boldsymbol{A}$ 然后可得

$$\boldsymbol{\beta}^2 = \boldsymbol{\beta\beta} - \beta^2\boldsymbol{II} \tag{7.2.15}$$

尽管 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}^{-1}$都是对称的,但 $\boldsymbol{\beta}$ 是斜对称的。

变换公式(7.2.11)和(7.2.12)表明 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 均是以一个实体(数量实体)进行变换的,$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 也是如此(强度实体)。

专题 7.2.A 电磁场变换的推导

场矢量的变换公式是空间、时间洛伦兹变换和闵可夫斯基对麦克斯韦方程洛伦兹协变假设的直接结果。由式(7.2.1)所给的洛伦兹变换,可得到时空导数的洛伦兹变换。运用微分连锁法,

$$\frac{\partial}{\partial ct} = \left[\frac{\partial ct'}{\partial ct}\right]\frac{\partial}{\partial ct'} + \left[\frac{\partial x'_i}{\partial ct}\right]\frac{\partial}{\partial x'_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \left[\frac{\partial ct'}{\partial x_i}\right]\frac{\partial}{\partial ct'} + \left[\frac{\partial x'_j}{\partial x_i}\right]\frac{\partial}{\partial x'_j}$$

将洛伦兹变换(7.2.1)代入并注意 $\boldsymbol{\alpha}$ 对称,求得

$$\frac{\partial}{\partial ct} = \gamma\frac{\partial}{\partial ct'} - \gamma\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla' \tag{7.2.16a}$$

$$\nabla = \boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla' - \gamma\boldsymbol{\beta}\frac{\partial}{\partial ct'} \tag{7.2.16b}$$

为了导出所有场矢量的变换法则,可把(7.2.16)代入 S 参照系中的麦克斯韦诸方程,并要

求它们有与 S' 参照系内相同的形式。

首先，考虑电荷守恒方程，从 S 至 S' 的变换给出

$$\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla' - \gamma\boldsymbol{\beta}\frac{\partial}{\partial ct'}\right)\cdot\boldsymbol{J} + \gamma\left(\frac{\partial}{\partial ct'} - \boldsymbol{\beta}\cdot\nabla'\right)c\rho = 0$$

于是，在

$$c\rho' = \gamma(c\rho - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{J}) \tag{7.2.17a}$$

$$\boldsymbol{J}' = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{J} - \gamma\boldsymbol{\beta}c\rho \tag{7.2.17b}$$

条件下，电荷守恒方程是洛伦兹协变的。注意，在 S 中呈静态分布的电荷，在 S' 中必然产生电流，但根据(7.2.17b)，在 S 中的均匀电流元在 S' 中也产生分布电荷，这是相对论效应，在伽利略变换下看不出来。

其次，我们将(7.2.16)引入安培定律和高斯电场定律

$$\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla' - \gamma\frac{\partial}{\partial ct'}\boldsymbol{\beta}\right)\times\boldsymbol{H} - \left(\gamma\frac{\partial}{\partial ct'} - \gamma\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla'\right)c\boldsymbol{D} = \boldsymbol{J} \tag{7.2.18a}$$

$$\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla' - \gamma\frac{\partial}{\partial ct'}\boldsymbol{\beta}\right)\cdot c\boldsymbol{D} = c\rho \tag{7.2.18b}$$

为求得 $\boldsymbol{D}'$ 和 $\boldsymbol{H}'$ 的变换法则，希望把(7.2.18)整理为

$$\nabla'\cdot\boldsymbol{D}' = \rho' \tag{7.2.19a}$$

$$\nabla'\cdot\boldsymbol{H}' - \frac{\partial}{\partial t'}\boldsymbol{D}' = \boldsymbol{J}' \tag{7.2.19b}$$

的形式。

鉴于(7.2.17a)，有 γ(7.2.18b) $-\gamma\boldsymbol{\beta}\cdot$(7.2.18a) $= c\rho'$，此式给出

$$\gamma[(\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla')\cdot c\boldsymbol{D} - \boldsymbol{\beta}\cdot(\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla')\times\boldsymbol{H} - \gamma(\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla')(\boldsymbol{\beta}\cdot c\boldsymbol{D})] = c\rho'$$

利用

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}\cdot[(\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla')\times\boldsymbol{H}] &= \boldsymbol{\beta}\cdot\left\{\left[\nabla' + (\gamma-1)\frac{(\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla')}{\beta^2}\boldsymbol{\beta}\right]\times\boldsymbol{H}\right\}\\ &= \boldsymbol{\beta}\cdot\nabla'\times\boldsymbol{H} = -\nabla'\cdot(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{H})\end{aligned}$$

得到

$$\nabla'\cdot\{\gamma[\boldsymbol{\alpha} - \gamma\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}]\cdot c\boldsymbol{D} + \gamma\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{H}\} = c\rho' \tag{7.2.20a}$$

同理，可利用(7.2.17b)计算 $\boldsymbol{\alpha}\cdot$(7.2.18a) $-\gamma\boldsymbol{\beta}\cdot$(7.2.18b) $=\boldsymbol{J}'$，可得到

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla')\times\boldsymbol{H} + \gamma\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla')c\boldsymbol{D} - \gamma\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla')c\boldsymbol{D} +\\ &\frac{\partial}{\partial ct'}[-\gamma\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{H}) - \gamma(\boldsymbol{\alpha}\cdot c\boldsymbol{D}) + \gamma^2\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}\cdot c\boldsymbol{D}] = \boldsymbol{J}'\end{aligned}$$

利用

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}\cdot[(\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla')\times\boldsymbol{H}] &= \nabla\times\boldsymbol{H} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\cdot[(\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla')\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{H} - \boldsymbol{\beta}\nabla'\cdot(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{H})]\\ &= \nabla'\times\left\{\boldsymbol{H} - \frac{\gamma-1}{\beta^2}[\boldsymbol{\beta}\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{H})]\right\}\\ &= \nabla'\times\left\{\gamma\left[\boldsymbol{I} + \left(\frac{1}{\gamma}-1\right)\frac{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}}{\beta^2}\right]\cdot\boldsymbol{H}\right\}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla')c\boldsymbol{D} - \boldsymbol{\beta}[(\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla')c\boldsymbol{D}]\\ &= (\boldsymbol{\beta}\times\nabla')c\boldsymbol{D} - \boldsymbol{\beta}(\nabla'\cdot c\boldsymbol{D})\end{aligned}$$

$$= -\nabla' \times (\boldsymbol{\beta} \times c\boldsymbol{D})$$

求得：

$$\nabla' \times \left\{ \gamma + \left[\boldsymbol{II} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{\boldsymbol{\beta\beta}}{\beta^2} \right] \cdot \boldsymbol{H} - \gamma \boldsymbol{\beta} \times c\boldsymbol{D} \right\}$$

$$- \frac{\partial}{\partial ct'} \{ \gamma [\boldsymbol{\alpha} - \gamma \boldsymbol{\beta\beta}] \cdot c\boldsymbol{D} + \gamma \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{H} \} = \boldsymbol{J}' \tag{7.2.20b}$$

比较式(7.2.19)和(7.2.20)，得到 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的变换公式

$$c\boldsymbol{D} = \gamma [\boldsymbol{\alpha} - \gamma \boldsymbol{\beta\beta}] \cdot c\boldsymbol{D} + \gamma \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{H} \tag{7.2.21a}$$

$$\boldsymbol{H}' = \gamma \left[\boldsymbol{II} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{\boldsymbol{\beta\beta}}{\beta^2} \right] \cdot \boldsymbol{H} - \gamma \boldsymbol{\beta} \times c\boldsymbol{D} \tag{7.2.21b}$$

容易证明式(7.2.21a)和(7.2.21b)方括号内的并矢等于 $\boldsymbol{\alpha}$ 的逆

$$(\boldsymbol{\alpha\alpha})^{-1} = \boldsymbol{II} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{\boldsymbol{\beta\beta}}{\beta^2} = \boldsymbol{\alpha} - \gamma \boldsymbol{\beta\beta} \tag{7.2.22}$$

这可以由 $1/\gamma^2 = 1 - \beta^2$ 通过证明

$$\boldsymbol{\alpha\alpha} \cdot (\boldsymbol{\alpha\alpha})^{-1} = \left[\boldsymbol{II} + (\gamma - 1) \frac{\boldsymbol{\beta\beta}}{\beta^2} \right] \cdot \left[\boldsymbol{II} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{\boldsymbol{\beta\beta}}{\beta^2} \right] = \boldsymbol{II}$$

$\boldsymbol{\alpha}^{-1} \cdot \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{II}$ 以及

$$\boldsymbol{\alpha}^{-1} = \boldsymbol{II} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{\boldsymbol{\beta\beta}}{\beta^2} = \boldsymbol{\alpha} - \gamma \boldsymbol{\beta\beta}$$

得到证实。

我们可以进一步定义这样一个 3×3 矩阵 $\boldsymbol{\beta}$，对任意矢量 $\boldsymbol{A}$ 有

$$\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{A} \tag{7.2.23}$$

表达成显矩阵，

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -\beta_z & \beta_y \\ \beta_z & 0 & -\beta_x \\ -\beta_y & \beta_x & 0 \end{bmatrix} \tag{7.2.24}$$

然后，根据 $(\boldsymbol{\beta})^2 \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\beta} \times (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\beta\beta} \cdot \boldsymbol{A} - \beta^2 \boldsymbol{A}$ 得到

$$\boldsymbol{\beta}^2 = \boldsymbol{\beta\beta} - \beta^2 \boldsymbol{II} \tag{7.2.25}$$

虽然 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}^{-1}$ 是对称的，但 $\boldsymbol{\beta}$ 是斜对称的。

现在给出 $c\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 洛伦兹变换公式的下列形式：

$$\text{LT} \quad \begin{bmatrix} c\boldsymbol{D}' \\ \boldsymbol{H}' \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{-1} & \boldsymbol{\beta} \\ -\boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{\alpha}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{H} \end{bmatrix} \tag{7.2.26}$$

用同样的方式，可以证明，法拉第电磁定律和高斯磁场定律在洛沦兹变换下维持不变。只要 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的变换为

$$\text{LT} \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}' \\ c\boldsymbol{B}' \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{-1} & \boldsymbol{\beta} \\ -\boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{\alpha}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ c\boldsymbol{B} \end{bmatrix} \tag{7.2.27}$$

该式在形式上与式(7.2.16)相同。变换公式(7.2.26)和(7.2.27)表明 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 场以实体（量的实体）进行变换。$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 也一样（强度的实体）。

有趣的是，平行于速度的场分量保持不变：

$$\boldsymbol{E}'_{\parallel} = \boldsymbol{E}_{\parallel} \tag{7.2.28a}$$

$$B'_{\parallel} = B_{\parallel} \tag{7.2.28b}$$

$$D'_{\parallel} = D_{\parallel} \tag{7.2.28c}$$

$$H'_{\parallel} = H_{\parallel} \tag{7.2.28d}$$

且垂直分量变换为

$$E'_{\perp} = \gamma(E_{\perp} + \beta \times cB_{\perp}) \tag{7.2.29a}$$

$$cB'_{\perp} = \gamma(cB_{\perp} - \beta \times E_{\perp}) \tag{7.2.29b}$$

$$cD'_{\perp} = \gamma(cD_{\perp} + \beta \times H_{\perp}) \tag{7.2.29c}$$

$$H'_{\perp} = \gamma(H_{\perp} - \beta \times cD_{\perp}) \tag{7.2.29d}$$

这与垂直分量保持不变的空间坐标变换形成对比。

例 7.2.6　一阶洛伦兹变换。

场量的 FOLT 和 GT 容易从 LT 推出，以 FOLT 为例。令 $\gamma = 1$，有

$$\text{FOLT} \quad \begin{bmatrix} E' \\ cB' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} II & \beta \\ -\beta & II \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E \\ cB \end{bmatrix} \tag{E7.2.30}$$

$$\text{FOLT} \quad \begin{bmatrix} cD' \\ H' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} II & \beta \\ -\beta & II \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cD \\ H \end{bmatrix} \tag{E7.2.31}$$

例 7.2.7　伽利略变换。

对 GT，令 $c \to \infty$，

$$\text{GT} \begin{cases} E' = E + v \times B & (7.2.32a) \\ B' = B & (7.2.32b) \\ D' = D & (7.2.32c) \\ H' = H - v \times D & (7.2.32d) \end{cases}$$

以 $-\beta$ 代换 β 可以写出所有这些变换公式的逆变换公式。

> **练习 7.2.1**　推导式(7.2.12)所列 E 和 B 的变换公式。求出相应的 FOLT 和 GT 公式。求出上述公式的逆变换公式。

专题 7.2.B　洛伦兹不变量

根据 LT(7.2.29a)和 GT(7.2.32a)，S 中的纯 B 场在 S' 中产生电场 E。当运动导体速度有垂直于 B 场磁力线的分量时，导体内会感应出电压。根据 LT(7.2.29b)，S 内的纯 E 场，从一个运动的系统会目睹到磁场。因此，从一个运动的系统看，静态电子显示磁场，但根据 GT(7.2.32b)，B' 等于 B，S 中的静态电子在 S' 中不显示磁场。

我们用 L_6 来表示(7.2.26)和(7.2.27)式的 6×6 矩阵。

$$L_6(\beta) = \gamma \begin{bmatrix} \alpha^{-1} & \beta \\ -\beta & \alpha^{-1} \end{bmatrix} \tag{7.2.33}$$

当速度沿 z 轴时，LT 矩阵 L_6 变为

$$L_6 = \gamma\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\gamma \end{bmatrix} \tag{7.2.34}$$

逆变换由 $\boldsymbol{L}_6(\boldsymbol{\beta})$的逆矩阵确定。可以证明

$$\boldsymbol{L}_6^{-1}(-\beta) = \boldsymbol{L}_6(\boldsymbol{\beta}) = \gamma\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{-1} & -\boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{\alpha}^{-1} \end{bmatrix} \tag{7.2.35}$$

物理推断表明,纯洛伦兹变换的逆变换等效于速度方向的改变。

我们来进一步探讨矩阵 $\boldsymbol{L}_6$ 的一些性质。因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 是对称的,$\boldsymbol{\beta}$ 是斜对称的,有

$$\boldsymbol{L}_6^{\mathrm{T}} = \gamma\begin{bmatrix} (\boldsymbol{\alpha}^{-1})^{\mathrm{T}} & (-\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} & (\boldsymbol{\alpha}^{-1})^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{L}_6 \tag{7.2.36}$$

式中上角 T 表示矩阵转置。因而 $\boldsymbol{L}_6$ 是 6×6 的对称矩阵,还可以证明

$$\boldsymbol{L}_6^{\mathrm{T}} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{II} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{II} \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{L}_6^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{II} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{II} \end{bmatrix} \tag{7.2.37}$$

$$\boldsymbol{L}_6^{\mathrm{T}} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{II} \\ \boldsymbol{II} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{L}_6^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{II} \\ \boldsymbol{II} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{7.2.38}$$

并可以推导出 $\boldsymbol{L}_6$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 矩阵的其他若干特性。

方程(7.2.37)可以用来求得在洛伦兹变换下不变的关系式,利用强度实体式(7.2.27)的 LT,可有

$$[\boldsymbol{E}', c\boldsymbol{B}'] \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{II} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{II} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}' \\ c\boldsymbol{B}' \end{bmatrix} = [\boldsymbol{E}, c\boldsymbol{B}] \cdot \boldsymbol{L}_6^{\mathrm{T}} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{II} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{II} \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{L}_6 \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ c\boldsymbol{B} \end{bmatrix} \tag{7.2.39}$$

鉴于式(7.2.36),(7.2.39)给出

$$|\boldsymbol{E}'|^2 - |c\boldsymbol{B}'|^2 = |\boldsymbol{E}|^2 - |c\boldsymbol{B}|^2 \tag{7.2.40}$$

可以看到,观察者 S 和 S' 间的相对速度在式(7.2.40)中并不出现,因此,$\boldsymbol{E}$ 和 $c\boldsymbol{B}$ 模的方差是一个与运动无关的常数。在 LT 下不变的任意量称为一个洛伦兹不变量。应注意洛伦兹不变和洛伦兹协变的区别;前者指的是纯标量的数,后者是一个物理定律。另一个洛伦兹不变量可以利用式(7.2.27)和(7.2.38)得到

$$[\boldsymbol{E}', c\boldsymbol{B}'] \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}' \\ c\boldsymbol{B}' \end{bmatrix} = [\boldsymbol{E}, c\boldsymbol{B}] \cdot \boldsymbol{L}_6^{\mathrm{T}} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{L}_6 \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ c\boldsymbol{B} \end{bmatrix}$$

结果为

$$\boldsymbol{E}' \cdot \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} \tag{7.2.41}$$

根据式(7.2.40)和(7.2.41)可以对电磁场进行分类。

专题 7.2.C 电磁场分类

自由空间波场 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ 和 $|\boldsymbol{E}| = |c\boldsymbol{B}|$

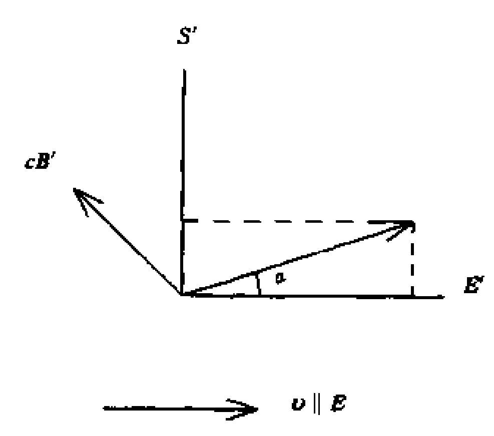
场矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $c\boldsymbol{B}$ 始终方向垂直,大小相等,大小具有自由空间典型平面波的特征,并随观察者的不同而变化。考察 $\boldsymbol{E} = \hat{x}E$ 和 $\boldsymbol{B} = \hat{y}B$ 的情况,并假定某观察者 S' 正沿着 S 的 z 轴运动,

则利用式(7.2.29a)和(7.2.29b)，直接可得

$$E' = E\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{1/2}$$

$$B' = B\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{1/2}$$

波场的幅值随着沿 $\hat{z}$ 方向速度的增大而减小。速度达到 c，即 $\beta=1$ 时，幅值为0。因而一个沿 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 方向以光速运动的观察者根本看不到场。而一个向相反方向以光速运动的观察者则能看到幅值趋于无穷大的场。可以考察 S' 沿 $\boldsymbol{E}$ 场方向运动的另一简单例子，如图7.2-2所示。当速度增大时，$\boldsymbol{E}'$ 场矢量方向发生倾斜，使得 $(-\boldsymbol{E}'\times c\boldsymbol{B}')$ 趋向与 $\boldsymbol{v}$ 平行。我们得到 $c\boldsymbol{B}=\hat{y}\gamma E$ 和 $\boldsymbol{E}=\hat{x}E+\hat{z}\gamma\beta E$。$\boldsymbol{E}'$ 的倾角 $\alpha=\arcsin\beta$，其随着 β 增大而增大。



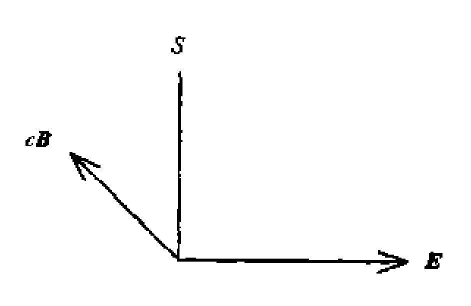


图7.2-2　S'沿 $\boldsymbol{E}$ 方向运动

电场　$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}=0$ 和 $|\boldsymbol{E}|>|c\boldsymbol{B}|$

在式(7.2.29b)中令 $c\boldsymbol{B}-\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E}=0$，我们发现存在着这样一个沿 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 方向运动的观察者，他只经历了电场而没有经历磁场。该观察者的速度由 $\beta=|c\boldsymbol{B}|/|\boldsymbol{E}|$ 给出。显然，$|\boldsymbol{v}|<c$ 或 $\beta<1$。令人感兴趣的是我们注意到未经历磁场者并非叫做 S' 的观察者一人。所有沿 $\boldsymbol{E}'$ 场矢量相对于 S' 运动的观察者也都不经历磁场。

磁场　$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}=0$ 和 $|\boldsymbol{E}|<|c\boldsymbol{B}|$

这是上述情形的对偶。以速度 $\beta=|\boldsymbol{E}|/|c\boldsymbol{B}|$ 沿 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 方向相对于 S 运动的观察者 S'，和其他沿 $\boldsymbol{B}'$ 方向相对于 S' 运动的所有观察者，都仅经历磁场而不经历电场。

扭转场 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}\neq 0$

这一类别包括6种情形。$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 场平行或逆平行的参照系显然存在。系统平行时，$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}>0$，有正扭转场；逆平行时，$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}<0$，得到负扭转场。扭转场可以 $|\boldsymbol{E}|=|c\boldsymbol{B}|$；或电场占主导，$|\boldsymbol{E}|>|c\boldsymbol{B}|$ 为电扭转场；或磁场起支配作用，$|\boldsymbol{E}|<|c\boldsymbol{B}|$ 为磁扭转场。

专题7.2.D　频率和波矢量的变换

考察相对运动的一接收机 S' 和一发射机 S，假定接收机收到来自发射机的平面波，依照发射机，平面波描述用

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\\ c\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_0\\ c\boldsymbol{B}_0\end{bmatrix}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t) \tag{7.2.42}$$

根据接收机 S'，平面波描述用

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r}',t')\\ c\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{r}',t')\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}'_0\\ c\boldsymbol{B}'_0\end{bmatrix}\cos(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'-\omega t') \tag{7.2.43}$$

令接收机 S' 以匀速 v 相对于发射机 S 运动，上角撇表示与 S' 有关的量，据洛伦兹变换公式，可有

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_0 \\ c\boldsymbol{B}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{-1} & -\boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{\alpha}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}'_0 \\ c\boldsymbol{B}'_0 \end{bmatrix} \tag{7.2.44}$$

和

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{r}' + \gamma \boldsymbol{\beta} c t' \tag{7.2.45a}$$

$$ct = \gamma(ct' + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{r}') \tag{7.2.45b}$$

在式(7.2.42)中的相位因子变为

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \frac{\omega}{c}ct = \left(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\alpha} - \gamma\boldsymbol{\beta}\frac{\omega}{c}\right) \cdot \boldsymbol{r}' - \gamma\left(\frac{\omega}{c} - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{k}\right)ct'$$

与式(7.2.43)比较,其等丁

$$\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{k} - \gamma\beta\frac{\omega}{c} \tag{7.2.46a}$$

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma\left[\frac{\omega}{c} - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{k}\right] \tag{7.2.46b}$$

该变换公式与 $\boldsymbol{k}$ 代替 $\boldsymbol{r}$ 和 ω/c 代替 t 的时空坐标变换公式相同。根据变换公式(7.2.46),两参照系中平面波相位是该不变量,该相位不变被称为相位不变定理。它使我们得以推演出变换公式(7.2.46),

专题 7.2.E 像差效应

像差效应是式(7.2.46)的结果。$\boldsymbol{k}'$ 和 $\boldsymbol{k}$ 的垂直分量相等,但其水平分量随运动改变。试考察地球上观看天顶某颗星的观察者。因为地球相对于该星星在运动,于是产生了一个逆平行于 $\boldsymbol{\beta}$ 的 $\boldsymbol{k}'$ 分量。从而该观察者必须使其望远镜向地球运动的方向倾斜,就好像在某个无风的雨天,骑自行车的人总是把伞向前倾一样。从式(7.2.46a)容易确定 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{k}'$ 间角度的关系式。用 θ 表示 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 间的夹角,θ' 表示 $\boldsymbol{k}'$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 间的夹角。由于 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\Pi} + (\gamma - 1)(\boldsymbol{\beta\beta}/\beta^2)$,用 $\boldsymbol{\beta}$ 叉乘和点乘式(7.2.46a),可以得到

$$k'\sin\theta' = k\sin\theta$$

$$k'\cos\theta' = \gamma k\cos\theta - \gamma\beta\frac{\omega}{c}$$

在各向同性介质中,$k = n\omega/c$,从这两方程中消去 k' 和 k,有

$$\tan\theta' = \frac{\tan\theta}{\gamma[1 - (\beta\sec\theta)/n]} \tag{7.2.47}$$

这是像差的相对论性公式。

专题 7.2.F 多普勒效应

多普勒效应是式(7.2.46b)的结果,运用各向同性介质的色散关系,令 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 间的夹角为 θ,从式(7.2.46b),求得

$$\omega' = \gamma\omega(1 - n\beta\cos\theta) \tag{7.2.48}$$

当接收机从发射机接收时,$\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 位于同一方向,频率下移或红移。当接收机向发射机靠近时,频率上移或蓝移。当接收机垂直于 $\boldsymbol{k}$ 运动时,有横向多普勒位移 $\omega' = \gamma\omega$,它是纯相对论性效应。

习　题

7.2.1 为考察时间隔的变换,将一时钟置于 S' 中沿 S 的 $\hat{z}$ 方向运动。S' 读到钟的时间隔为

$\Delta t' = t'_2 - t'_1$，称为固有时间隔。S 所读得的钟的相应时间隔为 $t = t_2 - t_1$，称为坐标时间隔。证明

$$c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta z)$$
$$\Delta z' = \gamma(\Delta z - \beta c\Delta t)$$

钟在 S' 中是静止的，因此 $\Delta z' = 0$。固有时间隔为 $\Delta t'$，坐标时间隔是 Δt。应看到，坐标时间隔总是大于固有时间隔。那么，Δt 和 $\Delta t'$ 间有什么关系？

7.2.2　假定 S' 以速度 v_1 相对于 S 运动，S'' 以速度 v_2 相对 S 运动，二者都沿 S 的 z 轴，S'' 和 S 间以及 S 和 S' 间的洛伦兹变换为

$$z'' = \gamma_2(z - \beta^2 ct)$$
$$ct'' = \gamma_2(ct - \beta_2 z)$$
$$z = z' + \gamma_1\beta_1 ct'$$
$$ct = \gamma_1(ct' + \beta_1 z')$$

试证明根据 S' 的坐标值

$$ct'' = \gamma_2\gamma_1(1 - \beta_2\beta_1)\left\{ct' - z'\left[\frac{(\beta_2 - \beta_1)}{1 - \beta_1\beta_2}\right]\right\}$$

因此，S'' 相对 S' 的速度为

$$\beta_{21} = \frac{\beta_2 - \beta_1}{1 - \beta_1\beta_2}$$

且

$$\gamma_{21} = \gamma_1\gamma_2(1 - \beta_1\beta_2)$$

这是同向两速度的辅助定律。归纳这一过程，推导不同方向两矢量速度的辅助定律。

7.2.3　早期阶段的狭义相对论，绝对时间尺度的突然消失导致了"双生子详谬"。所谓详谬是借用了一个比喻，一对双生子中的一个离开了家，以均匀(高)速度向某方向旅行了一段时间，待返回家后发现自己比兄弟年轻了。根据运动是相对的对称论证，有人认为双生子中任一个都不应该比另一个变老，狭义相对论的正确性是令人怀疑的。在以下讨论中，我们证明两个双生子都承认"一个比另一个大"和"问题是非对称的"。

令 A 和 B 都位于 S 参照系统的原点，B 在 $t = 0$ 时开始以速度 v 向 S 的正 $\hat{z}$ 方向运动。当 A 读到时间 t 时，B 以速度 v 向回运动。考虑以下事件：

事件 1　当 A 读到时间 t 时，双生子 B 在 $z = vt$，在 S 参照系中，该事件用 (ct, vt) 描述。这里 ct 是有尺度大小事件的时间坐标，vt 是事件的空间坐标。

事件 2　当 A 读出时间 $2t$ 时，A 和 B 皆位于 $z = 0$ 处。在 S 参照系里，该事件用 $(2ct, 0)$ 表示。

考虑另外两个参照系，S' 和 S''。S' 参照系以速度 v 向 z 轴的正向运动，S'' 以速度 v 向 z 轴的负向运动。三个参照系的坐标原点都恰好在 $t = 0$ 处。根据洛伦兹变换

$$ct' = \gamma(ct - \beta z) \tag{7.2.49a}$$
$$z' = \gamma(z - \beta ct) \tag{7.2.49b}$$
$$ct'' = \gamma(ct + \beta z) \tag{7.2.49c}$$
$$z'' = \gamma(z + \beta ct) \tag{7.2.49d}$$

S 内事件 1 的坐标是 $ct(1, \beta)$，事件 2 的坐标为 $ct(2, 0)$，试证两事件在 S' 和 S'' 参照系中的时空坐标如表 7.2-1 中所列。

(1)在返回家前的初始阶段，B 位于 S' 中。根据 B，消逝的时间为 t/γ。试证，根据 B，减去事件 1 和 2 的时间差，转回后最终阶段消逝的时间也是 t/γ。从而双生子 B 和 A 一致认为，B 渡过的时间是 $2t/\gamma$，A 渡过的时间是 $2t$。

表 7.2-1 两事件在三个参照系中的时空坐标

事件	参照系		
	S	S'	S''
1	$ct(1,\beta)$	$ct(1/\gamma,0)$	$ct[\gamma(1+\beta^2),2\gamma\beta]$
2	$ct(2,0)$	$ct(2\gamma,-2\gamma\beta)$	$ct(2\gamma,2\gamma\beta)$

注:圆括号内的前面部分表示乘以 c 的时间坐标,后面部分为空间坐标

(2)该问题本质上就是非对称的。一个双生子不得不转回家,正是他渡过了较少的固有时间 $2t/\gamma$。假如 B 不返回,那么当 A 读得 $2t$ 的固有时间时,由于时间膨胀,B 在两位置 $z=0$ 和 $z=2vt$ 处的坐标时间读数为 $2\gamma t$。在返回后且再次和 A 在 $z=0$ 处相遇,B 的固有时间读数显示的已是 $2t/\gamma$,转回效应产生了 $2t(\gamma-1/\gamma)=2\gamma\beta^2 t$ 的时间差。试证明,"失去"的时间对于表 7.2-1 中的事件 1 等于 S' 和 S'' 间的时间坐标差。

(3)所有相对于 A 作匀速运动的观察者。包括 A 以及在 S' 和 S'' 参照系内的观察者,必然断定 B 的固有消逝时间比 A 的小一个 $1/\gamma$ 因子。由于时间膨胀,双生子 A 认为双生于 B 的总的固有时间隔是 $2t/\gamma$,他自己的坐标时间隔是 $2t$。考虑 S',其时空坐标变换是从表 7.2-1 获得的,

$$ct''=\gamma^2[(1+\beta^2)ct'+2\beta z']$$
$$z''=\gamma^2[(1+\beta^2)z'+2\beta ct']$$

在回程前的初始阶段,B 位于 S' 内。根据 B,消逝的时间是 t/γ。在最后阶段,因 B 在 S'' 内,根据 S',Δct_B 为

$$\Delta ct_B=\gamma^2\left(c\Delta t'+\frac{2\beta}{1+\beta^2}\Delta z'\right)$$

根据表 7.2-1 有

$$\Delta t'=2\gamma t-\frac{t}{\gamma}$$
$$\Delta z'=-2\gamma\beta ct$$

因此,

$$\Delta ct_B=\gamma^2\left[2c\gamma t-\frac{ct}{\gamma}+\frac{2\beta}{1+\beta^2}(-2\gamma\beta ct)\right]=\frac{ct}{\gamma}$$

于是根据 S',B 的总消逝时间为 $2t/\gamma$。用同一推理方法,试证,以 S'' 的眼光,B 的总消逝时间也是 $2t/\gamma$。

(4)想像一下 B 在返回时如何经历了失去时间的阶段是颇为有趣的。考察一下第 3 个事件,其发生在 S 内、A 于 $z=0$ 处读取时间 t 时。求出 S' 和 S'' 内事件 3 的时空坐标。证明根据 S,事件 1 和 3 是同时的;根据 S',事件 1 早于事件 3;根据 S'',事件 3 早于事件 1。在转身的时刻,双生子 B 的参照系从 S' 改为 S''。试证在 $2\gamma\beta^2 t$ 时段内,B 对 $z=0$ 发生的一切一无所知。

(5)假设双生子 B 在出生后就立即以速度 $v=0.8c$ 开始旅行。如果他返回时 30 岁,双生子 A 多大?

7.2.4 半人马座 α 星距地球 4.3 光年,观察者 B 乘火箭飞船以加速度 g 离开地球向这颗星航行。在距这颗星一半的路程(距地球 2.15 光年),B 停止向前的加速并以加速度 g 向后朝着地球加速,以使火箭到达 α 星时速度为 0 并接着返回。在回程的中点,B 再次改变加速度的方向,到达地球时速度为 0。

假定存在初始参照系 S',其相对于地球以匀速 v 运动,再假设时间 $t=t_0$,对应于 $t'=t'_0$,该初始参照系的速度与 B 的速度恰好相同,从而在 $t'=t'_0$ 时,$U'_B=0$,$\mathrm{d}U'_B/\mathrm{d}t'=g$。这里 U'_B 是 B 相对于 S' 的速度。

利用洛伦兹变换,有

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}=\gamma\left(1+\frac{v}{c^2}\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}\right)=\gamma\left(1+\frac{vU'_B}{c^2}\right)$$

利用速度条件,有

$$U_B=\frac{U'_B+v}{1+\dfrac{U'_Bv}{c^2}}$$

式中 U_B 是 B 相对于地球的速度。当 t' 的极限趋于 t'_0,

$$\frac{dU'_B}{dt'} \to g; \quad U'_B \to 0; \quad v \to U_B; \quad \gamma \to 1/\sqrt{1 - U_B^2/c^2}$$

试证

$$\frac{dU_B}{dt} = g\left(1 - \frac{U_B^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

因为 S' 是随意选择的,所以上述方程基本正确(减速的情形,我们用 $-g$ 代替 g)。将上述方程积分,试证对于加速阶段

$$U_B = \frac{c(gt + k_1)}{\sqrt{c^2 + (gt + k_1)^2}}$$

对于减速阶段

$$U_B = \frac{c(-gt + k_2)}{\sqrt{c^2 + (-gt + k_2)^2}}$$

其中,k_1 和 k_2 为任意常数。U_B 注意,绝不会大于 c,因为 $t \to \infty$ 时,$U_B \to c$。为了确定 k_1 和 k_2 我们运用初始条件。最初,$t = 0$, $U_B = 0$,因此 $k_1 = 0$。这样

$$\frac{dz}{dt} = U_B = \frac{gct}{\sqrt{c^2 + (gt)^2}}$$

因为 $t = 0$ 时,$z = 0$,试证

$$z = \frac{c^2}{g}\left[\sqrt{1 + (\frac{gt}{c})^2} - 1\right]$$

半人马座 α 星到地球的距离是 $0.452c^2$ m,以地球上的双生子 A 为参照,确定整个旅程所花去的总时间。对于旅行的双生子 B,用固有时间 $c^2d\tau^2 = c^2dt^2 - dz^2$ 证明

$$\tau = \int_0^{0.31c} \frac{dt}{\sqrt{1 + (\frac{gt}{c})^2}} + \int_{0.31c}^{0.62c} \frac{dt}{\sqrt{1 + (\frac{k_2 - gt}{c})^2}}$$

以 B 的眼光,计算整个旅程消逝的总时间。织女星(天琴座)距地球 26 光年,以 A、B 为参照,计算旅行所用时间。

7.2.5 试证明沿长度方向以速度 v 运动的刚性杆显得变短。这一现象称为洛伦兹收缩。令该杆在 S' 内处于静止状态。两端点为 $z' = 0$ 和 $z' = l'$。在实验室参照系 S 内,该杆沿 z 以速度 v 运动。其长度用同时记录两端点的位置来测定,$t_2 = t_1 = 0$。

试证明在参照系 S 内,在给定的测量时间,两端点的时空坐标如表 7.2-2。

计算在 S 参照系内测得的杆长 l。注意,从与杆一起运动的观察者 S' 的眼光看,实验室的观察者并没有在同时测量两个端点。对于从左端向右端运动的杆,当 S 在同一时间 $t = 0$ 测量其两端时,试证以 S' 的眼光,S 首先在 $ct' = -\beta l'$ 时测量右端,然后在 $ct' = 0$ 时测量左端,因而 S' 料到 S 将声称长度变短。

表 7.2-2 两端点的时空坐标

事件	参照系	
	S	S'
1	[0,0]	[0,0]
2	$[0, l'/\gamma]$	$[-\beta l', l']$

7.2.6 考察或许是或许不是刚性的杆,其长度从观察者 S' 至 S 的变换。按照 S 的观点,杆在时间 t_0 时的长度定义为其所在参照系内 t_0 时同时测量的两端点的空间位置之差

$$\boldsymbol{l}(t_0) = \boldsymbol{Q}(t_0) - \boldsymbol{P}(t_0)$$

这里 $\boldsymbol{Q}(t_0)$ 和 $\boldsymbol{P}(t_0)$ 表示两端点的位置读数,但在 S 内两空间点的同时测量在 S' 内则不是同时的。考虑杆长

度为时变的一般情形，令所做的测量代表两个事件。它们的时空坐标列于表 7.2-3。

7.2-3 杆两端的时空坐标

事　件	参照系	
	S	S'
1	$[t_0, \boldsymbol{P}(t_0)]$	$[t'_0, \boldsymbol{P}'(t'_0)]$
2	$[t_0, \boldsymbol{Q}(t_0)]$	$[t'_0, \boldsymbol{Q}'(t')]$

利用时空洛伦兹变换公式，

$$ct' = \gamma[ct_0 - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{Q}(t_0)]$$

$$ct'_0 = \gamma[ct_0 - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{P}(t_0)]$$

$$\boldsymbol{Q}'(t') = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{Q}(t_0) - \gamma\boldsymbol{\beta}ct_0$$

$$\boldsymbol{P}'(t'_0) = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{P}(t_0) - \gamma\boldsymbol{\beta}ct_0$$

试证

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Q}'(t') - \boldsymbol{P}'(t'_0)$$

$$t' - t'_0 = -\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{X}$$

$$\boldsymbol{l} = Q(t_0) - \boldsymbol{P}(t_0) = \boldsymbol{\alpha}^{-1}\cdot\boldsymbol{X}$$

注意，当杆并非刚体且在 S' 内并非静止状态时，$\boldsymbol{X}$ 并不是在 S' 内进行的长度测量的结果，因为两端点的测量不同时进行，因而不符合长度定义。

(1)试证当杆为刚体，且在 S' 内静止时，$\boldsymbol{l}' = \boldsymbol{Q}'(t') - \boldsymbol{P}'(t'_0) = \boldsymbol{X}$，从 S 所看到的杆长为

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{\alpha}^{-1}\cdot\boldsymbol{l}' = \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{l}'_{\parallel} + \boldsymbol{l}'_{\perp}$$

式中，下角“∥”和“⊥”分别表示矢量平行和垂直于速度的分量，因而，水平分量不变，杆呈现缩短并旋转了一个角度。

(2)当杆为刚体且以速度 $\boldsymbol{v}'$ 在 S' 内匀速运动时，杆在 t'_0 时刻在 S' 内长度为

$$\boldsymbol{l}'(t'_0) = \boldsymbol{Q}'(t'_0) - \boldsymbol{P}(t'_0)$$

可以用 $\boldsymbol{l}'$ 和 $\boldsymbol{v}''$ 表达 $\boldsymbol{X}$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{v}'(t' - t'_0) + \boldsymbol{l}'$$

试证，根据 $\boldsymbol{l}'$

$$\boldsymbol{l}' = \alpha\boldsymbol{\alpha}^{-1}\cdot\left(\boldsymbol{l}' - \boldsymbol{\beta}'\frac{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{l}'}{1+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}}\right)$$

这里 $\boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{v}'/c$。因此，由于在 S' 内运动，与洛伦兹缩短的同时，刚性长度另外还有变化。

(3)杆短且为时变的。因为杆短，可以把 $t' - t_0$ 展开至

$$t' - t'_0 = \sum_{l=1}^{n} A_l\delta^l$$

式中 $\delta = \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{l}'$ 表示一个微小量。将 $\boldsymbol{X}$ 展开至第 n 阶 δ 并证明

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{l}' + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\boldsymbol{Q}'^{(k)}(t'_0)}{k!}(t' - t'_0)^k$$

$$= \boldsymbol{l}' + \sum_{k=1}^{N}\frac{\boldsymbol{Q}'^{(k)}}{k!}\left(\sum_{l=1}^{n}A_l\delta^l\right)^k$$

此处 $\boldsymbol{Q}'^{(k)}(t'_0)$是在 $t' = t'_0$时刻，$\boldsymbol{Q}'(t')$对 t' 的 k 阶导数。比较 δ^k 的系数，$k = 1,2,\cdots,n$，确定系数 A_1, A_2, A_3。试证明，展开至第二阶 δ，$\boldsymbol{l}$ 为

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{\alpha}^{-1}\cdot(\boldsymbol{II} + A_1\boldsymbol{D}'^{-})\cdot\left[\boldsymbol{II} + \frac{1}{2}A_1^2\delta(1 - A_1^2\delta\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{Q}'^{(2)})\,\boldsymbol{Q}'^{(2)}\boldsymbol{\beta}\right]\boldsymbol{l}^{-1}$$

并且，展开至第三阶 δ 时，

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{\alpha}^{-1}\cdot(\boldsymbol{II} + A_1\boldsymbol{D}'^{-})\boldsymbol{\beta}\left[\boldsymbol{II} + \frac{1}{2}A_1^2\delta\left(1 - A_1^2\delta\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{Q}'^{(2)} + \frac{1}{3}A_1^3\delta^2\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{Q}'\right)\boldsymbol{Q}'^{(2)}\boldsymbol{\beta}\right]\cdot\boldsymbol{l}^{-1}$$

7.2.7 证明运动的电流环产生电偶极矩。为简化起见,考虑一个四角标有 A、B、C、D 的方形环,电流从 A 至 B 至 C 至 D 流动。沿 AB 边的电流方向与 $\hat{z}$ 方向相同,方环以平行于电流方向的某速度运动,电偶极矩是什么方向?

7.2.8 某参照系内,一均匀静电场 E_0 平行于 z 轴,一均匀静磁场 $cB_0 = 2E_0$ 与 $\hat{z}$ 轴交角为 30°,求电场和磁场平行的某参照系的相对速度。

7.2.9 一观察者 S 在 $\hat{x}$ 方向观察到一个均匀电场,$\boldsymbol{E} = \hat{x}E_0$。在 $\hat{y}$ 方向观察到一均匀磁场,$\boldsymbol{B} = \hat{y}B_0$。令 $E_0 > cB_0$,试找一个相对于 S 以速度 v 向 $\hat{z}$ 方向运动且只能观察到电场的观察者 S',并求出电场强度和速度 v。你能找到一个以低于 c 的速度运动并只能看到磁场的观察者吗?

7.2.10 从惯性参照系到以角速度 Ω 绕 z 轴转动的同样参照系的时空变换,非相对论性地由

$$
\begin{aligned}
x &= x'\cos\Omega t' + y'\sin\Omega t' \\
y &= -x'\sin\Omega t' + y'\cos\Omega t' \\
z &= z' \\
t &= t'
\end{aligned}
$$

给出。试证为了保持麦克斯韦方程形式不变,电流电荷密度及场矢量必须如下变换:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{J} &= \boldsymbol{J}' - \rho'\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}' \\
\rho &= \rho' \\
\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}' + (\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{B}' \\
\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{H}' - (\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{D}' \\
D &= D' \\
B &= B'
\end{aligned}
$$

式中,$\boldsymbol{\Omega} = \hat{z}\Omega$,$\boldsymbol{r}$ 为位置矢量。假定速度 $\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}'$ 不大,求旋转参照系中所观察到的各向同性介质的本构关系。

7.3 运动介质中的波

7.3.1 本构关系变换

我们已看到,在电磁场矢量变换中 $\boldsymbol{E}$ 和 $c\boldsymbol{B}$ 一起变换,形成量的实体,即闵可夫斯基空间的一个四维二阶张量。电磁场矢量 $\boldsymbol{H}$ 和 $c\boldsymbol{D}$ 一起变换,形成激励实体,也是一个四维二阶张量。于是可用 $\boldsymbol{EB}$ 表达式写出它们的本构关系

$$
\begin{pmatrix} c\boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{H} \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}\cdot\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ c\boldsymbol{B} \end{pmatrix} \tag{7.3.1}
$$

此处

$$
\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P} & \boldsymbol{L} \\ \boldsymbol{M} & \boldsymbol{Q} \end{bmatrix} \tag{7.3.2}
$$

是本构矩阵,矩阵的元素称为本构参数。这个表达式提供了本构关系的洛伦兹协变描述。

电磁场矢量的洛伦兹变换公式现在可以用来推导本构关系的变换定律。一参照系内静止的介质,从另一参照系观察可以变成运动的。推导实验室参照系内一运动介质的等价本构关系在概念和实践上都有用。事实上,与运动介质相关的问题总可以在其静止参照系内加以解决,并可以将结果变换回实验室参照系。实践中,当涉及到两个以上相对运动的介质时,不能运用洛伦兹变换方法,因为在一个介质的静止参照系内,其他所有介质都在运动。因而必须确定运动介质的本构关系。

运动的各向同性介质

考虑相对匀速运动的两参照系。在参照系 S' 内,有一电容率为 ϵ',磁导率为 μ' 的各向同性介质。本构矩阵所取形式为

$$\boldsymbol{C}' = \begin{bmatrix} c\epsilon'\boldsymbol{I} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{c\mu'}\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \tag{7.3.3}$$

在实验室参照系 S 中,我们得到运动各向同性介质的本构矩阵

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{L}_6^{-1}\cdot\boldsymbol{C}'\cdot\boldsymbol{L}_6 \\ &= \frac{\gamma^2}{c\mu'}\begin{bmatrix} (n^2-\beta^2)\boldsymbol{I}-(n^2-1)\boldsymbol{\beta\beta} & (n^2-1)\boldsymbol{\beta} \\ (n^2-1)\boldsymbol{\beta} & (1-n^2\beta^2)\boldsymbol{I}+(n^2-1)\boldsymbol{\beta\beta} \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{7.3.4}$$

式中 $n^2=c^2\mu'\epsilon'$ 是静止参照系内运动介质的平方折射率。显然,$\beta=0$ 时,式(7.3.4)还原为式(7.3.3)。真空中,$n=1$ 时,$\boldsymbol{C}$ 减少为一单元矩阵的 $1/c\mu_o$ 的常数倍,一各向同性的运动介质即成为双各向异性的。

当速度沿 $\hat{z}$ 方向时,式(7.3.1)成为

$$\boldsymbol{C} = \frac{\gamma^2}{c\mu'}\begin{bmatrix} n^2-\beta^2 & 0 & 0 & 0 & -(n^2-1)\beta & 0 \\ 0 & n^2-\beta^2 & 0 & (n^2-1)\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n^2(1-\beta^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(n^2-1)\beta & 0 & 1-n^2\beta^2 & 0 & 0 \\ (n^2-1)\beta & 0 & 0 & 0 & 1-n^2\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\gamma^2 \end{bmatrix} \tag{7.3.5}$$

注意,虽然我们假设 μ' 和 ϵ' 是标量,即便不是,上述推导仍然有效。必须记住,μ' 和 ϵ' 的测量是在介质的静止参照系内进行的,如果它们取决于和其静止参照系有关的参数,这些参数一定是经过适当变换的。例如,当介质在其静止参照系内为一等离子体,需把等离子体频率变换到实验室参照系。

运动各向同性介质的本构关系可以写为用 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 表达的 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$。结果如下:

$$\boldsymbol{B} = \mu'\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{H}-\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{E} \tag{7.3.6a}$$

$$\boldsymbol{D} = \epsilon'\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{H} \tag{7.3.6b}$$

其中,

$$\boldsymbol{A} = \frac{1-\beta^2}{1-n^2\beta^2}\left(\boldsymbol{I}-\frac{n^2-1}{1-\beta^2}\boldsymbol{\beta\beta}\right) \tag{7.3.7}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{n^2-1}{1-n^2\beta^2}\boldsymbol{\beta}/c \tag{7.3.8}$$

当 $\boldsymbol{v}$ 沿着 $\hat{z}$ 方向时,$\boldsymbol{AA}$ 成为一对角矩阵。

运动的双各向异性介质

考虑一般情形,具有式(7.3.1)本构关系的双各向异性介质处于运动状态。假定速度沿 $\hat{z}$ 方向,对无限介质的这一假定并不妨碍所获结果的真实性,因为我们总能旋转坐标系,使 z 轴指向运动方向。坐标旋转肯定影响本构矩阵的元素,但变换后,$\boldsymbol{C}$ 仍取式(7.3.3)的一般形式,

仅元素的值不同而已。运用电磁场矢量的洛伦兹转换定律,求出本构矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} \gamma^2[p_{xx}-\beta(l_{xy}-m_{yx})-\beta^2 q_{yy}] & \gamma^2[p_{xy}-\beta(l_{xx}+m_{yy})+\beta^2 q_{yx}] & \gamma(p_{xz}+\beta m_{yz}) \\ \gamma^2[p_{yx}+\beta(l_{yy}+m_{xx})+\beta^2 q_{xy}] & \gamma^2[p_{yy}+\beta(l_{yx}-m_{yx})-\beta^2 q_{xx}] & \gamma(p_{yz}-\beta m_{xz}) \\ \gamma(p_{zx}-\beta l_{zy}) & \gamma(p_{zy}+\beta l_{zx}) & p_{zz} \end{bmatrix} \tag{7.3.9a}$$

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} \gamma^2[q_{xx}+\beta(m_{xy}-l_{yx})-\beta^2 p_{yy}] & \gamma^2[q_{xy}-\beta(m_{xx}+l_{yy})+\beta^2 p_{yx}] & \gamma(q_{xz}-\beta l_{yz}) \\ \gamma^2[q_{yx}+\beta(m_{yy}+l_{xx})+\beta^2 p_{xy}] & \gamma^2[q_{yy}-\beta(m_{yx}-l_{xy})-\beta^2 p_{xx}] & \gamma(q_{yz}+\beta l_{xz}) \\ \gamma(q_{zx}+\beta m_{zy}) & \gamma(q_{zy}-\beta m_{zx}) & q_{zz} \end{bmatrix} \tag{7.3.9b}$$

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} \gamma^2[l_{xx}+\beta(p_{xy}+q_{yx})+\beta^2 m_{yy}] & \gamma^2[l_{xy}-\beta(p_{xx}-q_{yy})-\beta^2 m_{yx}] & \gamma(l_{xz}+\beta q_{yz}) \\ \gamma^2[l_{yx}+\beta(p_{yy}-q_{xx})-\beta^2 m_{xy}] & \gamma^2[l_{yy}-\beta(p_{yx}+q_{yx})+\beta^2 q_{xx}] & \gamma(l_{yz}-\beta q_{xz}) \\ \gamma(l_{zx}+\beta p_{zy}) & \gamma(l_{zy}-\beta p_{zx}) & l_{zz} \end{bmatrix} \tag{7.3.9c}$$

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} \gamma^2[m_{xx}-\beta(q_{xy}+p_{yx})+\beta^2 l_{yy}] & \gamma^2[m_{xy}+\beta(q_{xx}-p_{yy})-\beta^2 l_{yx}] & \gamma(m_{xz}-\beta p_{yz}) \\ \gamma^2[m_{yx}-\beta(q_{yy}-p_{xx})-\beta^2 l_{xy}] & \gamma^2[m_{yy}+\beta(q_{yx}+p_{yx})+\beta^2 l_{xx}] & \gamma(m_{yz}+\beta p_{xz}) \\ \gamma(m_{zx}-\beta q_{zy}) & \gamma(m_{zy}+\beta q_{zx}) & m_{zz} \end{bmatrix} \tag{7.3.9d}$$

我们注意到,如果一双各向异性介质满足静止参照系内对称的条件,则其运动时也满足该条件。由此得出结论,对于运动非吸收的双各向异性介质,6×6 的本构矩阵 $\boldsymbol{C}$ 最多只能含 21 个独立的复数元素。

运动的回旋介质

公式(7.3.9)使观察者能够了解沿 $\hat{z}$ 方向运动双各向异性介质的特性。我们观察到,当介质处于运动状态时,其即成为双各向异性的。对于标量磁导率为 μ,电容率张量为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon & \mathrm{i}\varepsilon_g & 0\\ -\mathrm{i}\varepsilon_g & \varepsilon & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_z\end{bmatrix} \tag{7.3.10}$$

我们得到

$$\boldsymbol{C}=\frac{\gamma^2}{c\mu}\begin{bmatrix} n^2-\beta^2 & -n_g^2 & 0 & -\beta n_g^2 & -(n^2-1)\beta & 0\\ -n_g^2 & n^2-\beta^2 & 0 & -(n^2-1)\beta & 0 & 0\\ 0 & 0 & n_z^2 & 0 & 0 & 0\\ \beta^2 n_g^2 & (n^2-1)\beta & 0 & 1-n^2\beta^2 & -\beta n_g^2 & 0\\ (n^2-1)\beta & -\beta n_g^2 & 0 & -\beta n_g^2 & 1-n^2\beta^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{7.3.11}$$

式中，

$$n_g^2=c^2\mu\varepsilon_g \tag{7.3.12a}$$

$$n_z^2=c^2\mu\varepsilon_z \tag{7.3.12b}$$

支配介质回旋性质的参数必须小心地进行变换。例如(Chawla and Unz,1971)，等离子体频率为一洛伦兹不变量 $\omega'_p=\omega_p$，而回旋频率变换为 $\omega'_c=\gamma\omega_c$。记住，静磁场是沿运动的方向。相反，如果其垂直于运动方向，将得到 $\omega'_c=\gamma^2\omega_c$。应用频率 ω 也需变换得当。

运动的单轴介质

运动单轴介质的本构关系也是由一般式(7.3.9)推导而来的。假定运动介质的静止参照系内有如下本构关系：

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon' & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon' & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon'_z\end{bmatrix} \tag{7.3.13a}$$

$$\boldsymbol{\mu}=\begin{bmatrix}\mu' & 0 & 0\\ 0 & \mu' & 0\\ 0 & 0 & \mu'_z\end{bmatrix} \tag{7.3.13b}$$

此处，z 轴与光轴恰好一致。应注意，各向同性介质与电或磁单轴介质都是式(7.3.13)的特例。上角撇表示这些量与介质的静止参照系相关。在实验室参照系里，介质呈现以速度 $\boldsymbol{v}$ 沿 $\hat{z}$ 轴匀速运动，求得介质的本构关系为

$$\boldsymbol{C}=\frac{1}{c\mu'}\begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 & -l & 0\\ 0 & p & 0 & l & 0 & 0\\ 0 & 0 & p_z & 0 & 0 & 0\\ 0 & -l & 0 & q & 0 & 0\\ l & 0 & 0 & 0 & q & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_z\end{bmatrix} \tag{7.3.14}$$

注意，p,q,l,p_z 和 q_z 都是无量纲的，本构矩阵可以变换为 $\boldsymbol{EH}$ 和 $\boldsymbol{DH}$ 表达式。我们求得

$$
C_{EH} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & -\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi & 0 & \mu & 0 & 0 \\ \xi & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix} \tag{7.3.15}
$$

$$
C_{DB} = \begin{bmatrix} \kappa & 0 & 0 & 0 & \chi & 0 \\ 0 & \kappa & 0 & -\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\chi & 0 & \nu & 0 & 0 \\ \chi & 0 & 0 & 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_z \end{bmatrix} \tag{7.3.16}
$$

不同表达形式各本构矩阵的元素值归纳于表 7.3-1 中。记住，速度 $\boldsymbol{v}$ 沿 $\hat{z}$ 方向，矩阵元素取决于速度。有上角撇的量是在介质的静止参照系内量度的，假如它们与坐标有关，我们还必须把它们变换到实验室参照系。以运动各向同性等离子体的情形为例，等离子体频率和应用频率都必须变换。

从表 7.3-1 可看出，如果 $l=0$ 或 $\mu'\varepsilon'=1/c^2(n=1)$，本构矩阵 $\boldsymbol{C}$ 即成为对角矩阵，色散介质中有时出现这种结果。对于在 $\hat{z}$ 方向受强磁场作用的各向异性等离子体，$\varepsilon'=\varepsilon_0$。在这样的介质中，还有 $\mu'=\mu_0$。从而 $l=0, n=p=q=l$，$\boldsymbol{C}$ 为对角矩阵。这是一个非双各向异性运动介质的例子。在静止参照系内，无论运动介质是各向同性体，单轴晶体，还是单轴回旋等离子体或是磁和电单轴介质，本构关系均取式(7.3.14)~(7.3.16)的形式。

表 7.3-1　　运动介质的本构参数

***EB* 表达式**

$$
p=\gamma(n^2-\beta^2),\qquad p_z-an^2,\qquad a=\frac{\varepsilon_z'}{\varepsilon'}
$$

$$
q=\gamma^2(1-n^2\beta^2),\qquad q_z=\frac{1}{b},\qquad b=\frac{\mu_z'}{\mu'}
$$

$$
l=\gamma^2\beta(n^2-1),\qquad qp+l^2=n^2=c^2\mu'\varepsilon'
$$

***EH* 表达式**

$$
\varepsilon=\frac{(qp+l^2)}{c^2\mu' q}=\frac{\varepsilon'(1-\beta^2)}{(1-n^2\beta^2)},\qquad \varepsilon_z=\varepsilon_z'
$$

$$
\mu=\frac{\mu'}{q}=\frac{\mu'(1-\beta^2)}{(1-n^2\beta^2)},\qquad \mu_z=\mu_z'
$$

$$
\xi=\frac{-l}{cq}=\frac{-\beta(n^2-1)}{c(1-n^2\beta^2)}
$$

(续表)

DB 表达式

$$\kappa = \frac{c^2\mu'}{q} = \frac{c^2\mu'(1-\beta^2)}{(n^2-\beta^2)}, \qquad \kappa_z = \frac{1}{\varepsilon'_z}$$

$$\nu = \frac{(qp+l^2)}{p\mu'} = \frac{c^2\varepsilon'(1-\beta^2)}{(n^2-\beta^2)}, \qquad \nu_z = \frac{1}{\nu'_z}$$

$$\chi = \frac{cl}{p} = \frac{c\beta(n^2-1)}{(n^2-\beta^2)}$$

被加速介质

被加速介质的本构关系在形式上也是双各向异性的。它们与空间紧密相关,可以看做是非均质的。一些作者探索了任意加速参照系中的一般表述,提出了旋转和被线性加速两种介质的显式本构关系。对观察者和介质而言,相对运动和绝对运动在确定本构关系中都起着关键作用。

专题 7.3.A 运动单轴介质中的平面波

我们利用 *kDB* 系统来研究平面波在运动无限单轴介质中的传播。以 ***DB*** 表达的本构关系取如下形式

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{\chi}\cdot\boldsymbol{B} \tag{7.317a}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{B} \tag{7.317b}$$

式中

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_z \end{bmatrix} \tag{7.3.18a}$$

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} \nu & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \nu_z \end{bmatrix} \tag{7.3.18b}$$

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\gamma}^+ = \begin{bmatrix} 0 & \chi & 0 \\ -\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.3.18c}$$

本构参数 $\kappa,\kappa_z,\nu,\nu_z$ 和 χ 如上定义。在 *kDB* 系统中,本构矩阵变为

$$\boldsymbol{\kappa}_k = \begin{bmatrix} \kappa & 0 & 0 \\ 0 & \kappa\cos^2\theta + \kappa_z\sin^2\theta & (\kappa-\kappa_z)\sin\theta\cos\theta \\ 0 & (\kappa-\kappa_z)\sin\theta\cos\theta & \kappa\sin^2\theta + \kappa_z\cos^2\theta \end{bmatrix} \tag{7.3.19a}$$

$$\boldsymbol{\nu}_k = \begin{bmatrix} \nu & 0 & 0 \\ 0 & \nu\cos^2\theta + \nu_z\sin^2\theta & (\nu - \nu_z)\sin\theta\cos\theta \\ 0 & (\nu - \nu_z)\sin\theta\cos\theta & \nu\sin^2\theta + \nu_z\cos^2\theta \end{bmatrix} \tag{7.3.19b}$$

$$\boldsymbol{\chi}_k = \boldsymbol{\gamma}_k^{+} = \begin{bmatrix} 0 & \chi\cos\theta & \chi\sin\theta \\ -\chi\cos\theta & 0 & 0 \\ -\chi\sin\theta & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.3.19c}$$

代入式(3.3.36)和(3.3.37)并消去 $\boldsymbol{B}$，得到 $\boldsymbol{D}$ 的下列方程。

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1-(\mu-\chi\cos\theta)^2}{\kappa(\nu\cos^2\theta+\nu_z\sin^2\theta)} & 0 \\ 0 & \dfrac{1-(\mu-\chi\cos\theta)^2}{\kappa(\kappa\cos^2\theta+\kappa_z\sin^2\theta)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{7.3.20}$$

两特征波的相速度容易获得。其他场分量见于式(7.3.19b)以及相应的本构关系。结果列于表 7.3-2。用 $\boldsymbol{k}$ 矢量的分量确切表达并注意 $k_z^2 = k^2\cos^2\theta$ 和 $k_x^2 + k_y^2 = k^2\sin^2\theta$，我们得到 I 型波的色散关系

$$k_x^2 + k_y^2 + \frac{\nu k_z^2}{\nu_z} - \frac{(\omega - \chi k_z)^2}{\kappa\nu_z} = 0 \tag{7.3.21}$$

其传播速度为

$$u = \chi\cos\theta \pm \sqrt{\kappa(\nu\cos^2\theta + \nu_z\sin^2\theta)} \tag{7.3.22}$$

表 7.3-2　运动单轴介质中波的特征

模式 / 波的特征	I 型波	II 型波
$\boldsymbol{D}_k$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\boldsymbol{B}_k$	$\begin{pmatrix} 0 \\ \kappa/(u-\chi\cos\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (u-\chi\cos\theta)/\nu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\boldsymbol{E}_k$	$\begin{pmatrix} \kappa u/(\nu-\chi\cos\theta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ (u-\chi\cos\theta)/\nu \\ [\frac{\chi}{\nu}(u-\chi\cos\theta)+(\kappa_z-\kappa)\cos\theta]\sin\theta \end{pmatrix}$
$\boldsymbol{H}_k$	$\begin{pmatrix} 0 \\ u \\ -\chi+\frac{\kappa(\nu_z-\nu)\cos\theta}{u-\chi\cos\theta}\sin\theta \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
u	$\chi\cos\theta \pm \sqrt{\kappa(\nu\cos^2\theta+\nu_z\sin^2\theta)}$	$\chi\cos\theta \pm \sqrt{\nu(\kappa\cos^2\theta+\kappa_z\sin^2\theta)}$
色散关系	$k_x^2+k_y^2+\frac{\nu}{\nu_z}k_z^2-\frac{1}{\kappa\nu_z}(\omega-\chi k_z)^2=0$	$k_x^2+k_y^2+\frac{\kappa}{\kappa_z}k_z^2-\frac{1}{\nu\kappa_z}(\omega-\chi k_z)^2=0$

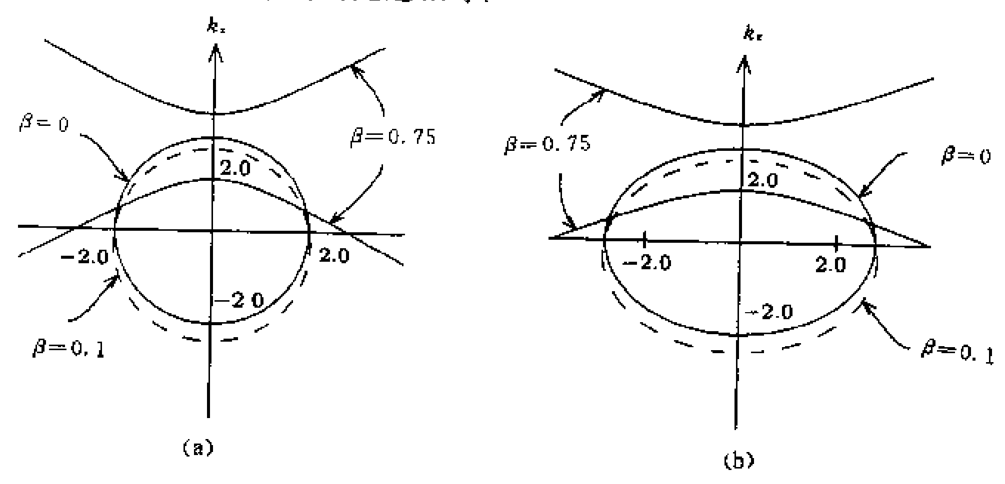
Ⅱ型波的色散关系为

$$k_x^2 + k_y^2 + \frac{\kappa k_z^2}{\kappa_z} - \frac{(\omega - \chi\kappa_z)^2}{\nu k_z} = 0 \tag{7.3.23}$$

波速为

$$u = \chi\cos\theta \pm \sqrt{\nu(\kappa\cos^2\theta + \kappa_z\sin^2\theta)} \tag{7.3.24}$$

注意,式(7.3.22)和(7.3.24)中的 ± 号,加号与介质运动方向传播的波相对应,减号对应于沿介质运动反方向传播的波。对于同类型的波,方向相反的速度此刻大小不相同,与先前相同的所有情况相反。图 7.3-1 中绘出了静止参照系内 $n=2$ 运动各向同性介质的 k 面以及 $n=2, a=b=2$ 运动单轴介质的 k 面。在 $1-n^2\beta^2>0$ 时,该面为一关于 k_z 轴旋转的椭圆,属非相对论性的情形;在 $1-n^2\beta^2<0$ 时,该面变成关于 k_z 轴旋转的双曲线,属相对论性情形。我们称这个高速区为切连科夫(Cerenkov)带。划分非相对论性带和切连科夫带的速度为 $\beta=\pm 1/n$,与运动介质静止参照系内的光速相等。



7.3-1　运动各向同性介质的 k 面

为方便进一步讨论,可运用表 7.3-2 并根据 β 关系式写出公式(7.3.21)和(7.3.23)。经若干运算后,得到

$$k_x^2 + k_y^2 + b\,\frac{1-n^2\beta^2}{1-\beta^2}\left(k_z - \frac{n+\beta}{n\beta+1}\frac{\omega}{c}\right)\cdot\left(k_z - \frac{n-\beta}{n\beta-1}\frac{\omega}{c}\right) = 0 \tag{7.3.25}$$

$$k_x^2 + k_y^2 + a\,\frac{1-n^2\beta^2}{1-\beta^2}\left(k_z - \frac{n+\beta}{n\beta+1}\frac{\omega}{c}\right)\cdot\left(k_z - \frac{n-\beta}{n\beta-1}\frac{\omega}{c}\right) = 0 \tag{7.3.26}$$

探讨两种情况。首先,考虑垂直于介质速度在 $\hat{x}$ 方向的波传播,$k_z=0$,$\boldsymbol{k}$ 矢量变成

$$\boldsymbol{k} = \hat{x}k_x = \pm\hat{x}\,\frac{\omega}{c}\left(b\,\frac{n^2-\beta^2}{1-\beta^2}\right)^{1/2} \tag{7.3.27}$$

$$\boldsymbol{k} = \hat{x}k_x = \pm\hat{x}\,\frac{\omega}{c}\left(a\,\frac{n^2-\beta^2}{1-\beta^2}\right)^{1/2} \tag{7.3.28}$$

± 号分别表示正、负方向上的波传播。当 β 从 0 增加到 1 时,k 从 $an\omega/c$ 或 $bn\omega/c$ 增加到无穷大。从而,当介质速度接近真空中的光速时,沿 $\hat{z}$ 轴方向的速度为 0。

其次,探讨介质沿运动方向上的波传播,$k_x=k_y=0$。两种类型的波简化为一种,k 矢量成为

$$\boldsymbol{k} = \hat{z}\,\frac{n+\beta}{n\beta+1}\frac{\omega}{c} \tag{7.3.29}$$

$$\boldsymbol{k} = \hat{z}\frac{n-\beta}{n\beta - 1}\frac{\omega}{c} \tag{7.3.30}$$

方程(7.3.29)对应于 $\hat{z}$ 正向的波传播,式(7.3.30)对应 $\hat{z}$ 负向的波传播。对于沿 $\hat{z}$ 正向的波传播,我们看到,当 β 从 0 增加到 1,k 从 $n\omega/c$ 减为 ω/c,对应的波速从 c/n 增加到 c;对于沿 $\hat{z}$ 负向传播的波,我们观察到,β 从 0 增加到 $1/n$,k 从 $-n\omega/c$ 变为 $-\infty$,速度从 $-c/n$ 变为 0。当 β 进一步从 $1/n$ 增至 1,k 改变符号并从无穷大减小到 ω/c。在切连科夫带,负向传播的波此刻向 $\hat{z}$ 正向传播,当 β 接近 1 时,速度接近 c。在所有情况下,波都显示出受介质运动的拖曳。该现象称为菲佐－菲涅耳(Fiyeau－Fresnel)拖曳。

专题 7.3.B　运动边界的相匹配

前面,我们已经研究了静止界面的相匹配条件。当边界为运动的,我们令其速度为

$$\hat{v} = \hat{x}v_x + \hat{y}v_y + \hat{z}v_z \tag{7.3.31}$$

$t=0$ 时,界面位于 $x=0$ 处。其他时刻,界面位于 $x=v_xt$。此时,入射、反射、透射波有下列时空关系。

入射波	$e^{ik_xx+ik_yy+ik_zz-i\omega t}$
反射波	$e^{ik_{rx}x+ik_{ry}y+ik_{rz}z-i\omega_r t}$
透射波	$e^{ik_{tx}x+ik_{ty}y+ik_{tz}z-i\omega_t t}$

此处,我们把角频率 ω,ω_r 和 ω_t 作了区分。我们要求满足运动的边界条件(1.9.19)～(1.9.22),结果有

$$\begin{aligned} &k_x(v_xt) + k_y(y+v_yt) + k_z(z-v_zt) - \omega t \\ &= k_x(v_xt) + k_{ry}(t+v_yt) + k_{rz}(z+v_zt) - \omega_r t \\ &= k_{tz}(v_xt) + k_{ty}(y+v_yt) + k_{tz}(z+v_zt) - \omega_t t \end{aligned} \tag{7.3.32}$$

因为这些量必须适合于所有的 y,z 和 t,因此

$$k_y = k_{ry} = k_{ty} \tag{7.3.33}$$

$$k_z = k_{rz} = k_{tz} \tag{7.3.34}$$

$$k_xv_x - \omega = k_{rx}v_x - \omega_r = k_{tx}v_x - \omega_t \tag{7.3.35}$$

从而相匹配条件和静止边界的情况相同,波矢量的切向分量连续。三种波的频率此时不相同,它们仅取决于速度的法向分量。

考虑波从一各向同性介质垂直入射到沿 $\hat{x}$ 方向朝着波运动的另一各向同性介质上的简单情况。入射波矢量为

$$\boldsymbol{k} = \hat{x}k_x = -\hat{x}n\frac{\omega}{c} \tag{7.3.36}$$

反射波矢量为

$$\boldsymbol{k}_r = \hat{x}k_{rx} = \hat{x}n\frac{\omega_r}{c} \tag{7.3.37}$$

把式(7.3.36)和(7.3.37)代入式(7.3.35),得到

$$\omega_r = \omega\frac{1+n\beta}{1-n\beta} \tag{7.3.38}$$

$$k_r = -k\frac{1+n\beta}{1-n\beta} = n\frac{\omega}{c}\frac{1+n\beta}{1-n\beta} \tag{7.3.39}$$

其中，$\beta = v_x/c$。可以看到反射波是向高频一侧多普勒频移的，其波数也增加了相应的量。为了求出透射波数和角频率，我们必须了解运动介质的色散关系。

专题 7.3.C 作用于运动电介质半空间的力

考虑垂直入射到电介质上的平面波。电介质向着波运动，令边界以速度 v 沿 $\hat{z}$ 方向运动，且电场为 $\hat{x}$ 方向线性极化。可以写为

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}} = \hat{x}E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz-\mathrm{i}\omega t}, \qquad k = -\frac{\omega}{c}$$

(1) 反射波和透射波的场为

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}} = \hat{x}RE_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{\mathrm{r}}z-\mathrm{i}\omega_{\mathrm{r}}t}, \qquad k_{\mathrm{r}} = -\frac{\omega_{\mathrm{r}}}{c}$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}} = \hat{x}TE_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{\mathrm{t}}z-\mathrm{i}\omega_{\mathrm{t}}t}, \qquad k_{\mathrm{t}} = \frac{n-\beta}{n\beta-1}\frac{\omega_{\mathrm{t}}}{c}$$

$$c\boldsymbol{B}_{\mathrm{r}} = \hat{y}\frac{ck_{\mathrm{r}}}{\omega_{\mathrm{r}}}E_{\mathrm{r}} = \hat{y}E_{\mathrm{r}}$$

$$c\boldsymbol{B}_{\mathrm{t}} = \hat{y}\frac{ck_{\mathrm{t}}}{\omega_{\mathrm{t}}}E_{\mathrm{t}} = \hat{y}\frac{n-\beta}{n\beta-1}E_{\mathrm{t}}$$

$$c\boldsymbol{D}_{\mathrm{r}} = \hat{x}c\varepsilon_{\mathrm{o}}E_{\mathrm{r}}$$

$$c\boldsymbol{D}_{\mathrm{t}} = \hat{x}\frac{1}{c\mu_{\mathrm{o}}}\left(p - l\frac{ck_{\mathrm{t}}}{\omega_{\mathrm{t}}}\right)E_{\mathrm{t}}$$

$$= \hat{x}\frac{1}{c\mu_{\mathrm{o}}}\frac{n(n-\beta)}{1-n\beta}E_{\mathrm{t}}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{r}} = -\hat{y}\frac{1}{c\mu_{\mathrm{o}}}E_{\mathrm{r}}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}} = \hat{y}\frac{1}{c\mu_{\mathrm{o}}}\left(l + q\frac{ck_{\mathrm{t}}}{\omega_{t}}\right)E_{\mathrm{t}} = -\hat{y}\frac{1}{c\mu_{\mathrm{o}}}nE_{\mathrm{t}}$$

这里 $n = c\sqrt{\mu_{\mathrm{o}}\varepsilon_{\mathrm{t}}}$，$\beta = v/c$。

(2)为了计算反射波和透射波的波幅，我们运用边界条件(1.9.19)和(1.9.20)，条件要求 $E_x - \beta c B_y$ 和 $H_y - \beta c D_x$ 在边界两侧连续。求得反射系数和透射系数为

$$R = -\frac{1+\beta}{1-\beta}\frac{n-1}{n+1}$$

$$T = \frac{1-n\beta}{1-\beta}\frac{2}{n+1}$$

反射率和透射率为

$$r = \frac{\hat{z}\cdot(\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{r}})}{-\hat{z}\cdot(\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}})} = |R|^2$$

$$t = \frac{-\hat{z}\cdot(\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}})}{-\hat{z}\cdot(\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}})} = n|T|^2$$

可以看出，$\beta \neq 0$ 时，$r + t \neq 1$。这是否违反了能量守恒呢？

(3)为了回答这个问题(Daly 和 Gruenberg, 1967)，设想一个横跨边界单位截面的直立圆柱体，其轴平行于 z 轴且其包括部分界面。入射、反射、透射波之和给出进入圆柱体的总的时间

平均电磁能流：

$$\langle P_{\text{elec}}\rangle = \frac{1}{2c\mu_o}(E^2 - E_r^2 - nE_t^2) = 4cU_0\beta\frac{(n-1)(1-n\beta)}{(1-\beta)^2(1+n)}$$

此处

$$U_0 = \frac{1}{2c\mu_0}\mid E_0\mid^2$$

圆柱体内部，当运动电介质占据较多的自由空间时，时间平均电磁能 $\text{Re}\{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^* + \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}^*\}/4$ 随之增加，储能的增加比例由速度乘以电介质内和真空中电磁能差值给出，随着电介质占据更多的自由空间，储能增加的比例由速度乘以真空中和电介质中储能的体积密度之差给出。求得

$$\begin{aligned}\langle P_{\text{stored}}\rangle &= \frac{\beta}{2c\mu_o}\left[n\left(\frac{n-\beta}{1-n\beta}\right)E_t^2 - E_r^2 - E^2\right]\\ &= 2cU_0\frac{(n-1)(1-2n\beta+\beta^2)}{(1-\beta^2)(1+n)}\end{aligned}$$

当介质静止时，$\langle P_{\text{elec}}\rangle = \langle P_{\text{stored}}\rangle = 0$；当介质处于运动状态，该等式就不能维系，因为机械功率需满足保持电介质以恒速度运动的要求。必须供给系统的机械功的比例由 $\langle P_{\text{stored}}\rangle$ 和 $\langle P_{\text{elec}}\rangle$ 的差值决定。我们求出。

$$\langle P_{\text{mech}}\rangle = \langle P_{\text{stored}}\rangle - \langle P_{\text{elec}}\rangle = \frac{2cU_0\beta(n-1)(1+\beta)}{(1-\beta)(1+n)}$$

负号表明对系统做了机械功，作用于电介质上单位面积的力由 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} = \langle P_{\text{mech}}\rangle$ 得到。因而

$$\boldsymbol{F}_{\text{mech}} = -\frac{\hat{z}2U_0(n-1)(1+\beta)}{(1-\beta)(1+n)}$$

该机械力是维持介质恒速所需要的。我们注意到，力是沿着 $\hat{z}$ 负向的。这意味着，必须施加机械力以阻止介质向着波加速。由波施加到介质上的电磁力 $\boldsymbol{F}_{\text{elec}}$ 如力学基本定律所要求的，等于负的 $\boldsymbol{F}_{\text{mech}}$。

(4)可以利用守恒定理计算电磁力 $\boldsymbol{F}_{\text{elec}}$ 来对这一推断进行双重验证。把作用力密度对圆柱体体积积分，这时作用于界面单位面积上的力为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{\text{elec}} &= \hat{z}(\langle T_{zz}\rangle_i + \langle T_{zz}\rangle_r - \langle T_{zz}\rangle_t) + v(\langle \boldsymbol{G}\rangle_i + \langle \boldsymbol{G}\rangle_r - \langle \boldsymbol{G}\rangle_t)\\ &= \frac{\hat{z}2U_0(n-1)(1+\beta)}{(1-\beta)(1+n)}\end{aligned}$$

显然，$\boldsymbol{F}_{\text{elec}}$ 和 $\boldsymbol{F}_{\text{mech}}$ 确实方向相反，因而，垂直入射平面波作用于电介质半空间上的辐射压产生一个把介质向波吸引的力。无论电介质静止还是运动，此力都存在。需要有一个抵消 $\boldsymbol{F}_{\text{elec}}$ 的机械力来保持电介质静止或维持其处于运动状态时恒速。

(5)对理想导体，

$$\begin{aligned}\langle P_{\text{mech}}\rangle &= \frac{1}{2c\mu_o}[-(E^2 + E_t^2) - (E^2 - E_r^2)]\\ &= \frac{2cU_0\beta(1+\beta)}{(1-\beta)}\end{aligned}$$

由此可得 $\boldsymbol{F}_{\text{mech}} = \hat{z}2U_0(1+\beta)/(1-\beta)$。需要特别注意，此时位于正 $\hat{z}$ 方向的 $\boldsymbol{F}_{\text{mech}}$ 的符号，它表明波在施加一个推开导体的力。因此，当介质为电介质时，电磁力为吸引力；介质为理想导体时，为排斥力。

专题 7.3.D 运动电介质板内的导波

考虑由板片介质导行的 TE 模式,该介质运动于两个相同的静止各向同性介质之间,令导行方向平行于板片的运动方向,我们用图解法来确定截止波数和传播常数 k_z。

运动介质的本构参数已在 7.3.A 中求出。我们用下角 1 来表示与运动电介质板波导有关的参数。利用色散关系,波导内的横向波数 k_{1x} 可以整理成如下形式。

$$k_{1x}^2 = p_1 k_o^2 - 2l_1 k_z k_o - q_1 k_z^2 \tag{7.3.40}$$

此处 $k_o = \omega/c$ 并且 $k_z = k_0(n^2 + \alpha_x^2/k_0^2)^{1/2}$,由导行条件得出的方程(3.5.52)保持不变,然而,式(3.5.53)则变成

$$\begin{aligned}(\alpha_x d)^2 + (k_{1x}d)^2 &= (k_x^2 - k^2)d^2 + (pk_0^2 - 2lk_0k_z - qk_z^2)d^2) \\ &= (k_0 d)^2\left\{\frac{n_1^2 - \beta^2}{1 - \beta^2} - n^2 - 2\beta\frac{n_1^2 - 1}{1 - \beta^2}\sqrt{n^2 + \left(\frac{\alpha_x}{k_0}\right)^2}\right. \\ &\quad \left. + \beta^2\frac{n_1^2 - 1}{1 - \beta^2}\left[n^2 + \left(\frac{\alpha_x}{k_0}\right)^2\right]\right\}\end{aligned} \tag{7.3.41}$$

该方程所描述的曲线形状是板片速度的函数。当 $\beta = 0$ 时,曲线为一圆弧,为预料中静止板片的结果。当板片周围的各向同性介质为自由空间时,$n = 1$,上面的方程变为

$$(\alpha_x d)^2 + (k_{1x}d)^2 = (k_0 d)^2\left[\frac{n_1^2 - 1}{1 - \beta^2}\right]\left[1 - \beta\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha_x}{k_0}\right)^2}\right]^2 \tag{7.3.42}$$

一个运用洛伦兹变换可以直接推出的结果。我们看到,在截止状态,

$$k_o d = \sqrt{(1 + \beta)/(1 - \beta)}\, m\pi\sqrt{n_1^2 - 1}$$

截止波数随着 β 的增大而增大。一般地,随着 β 增大,α_x 变小,k_x 也是如此。因此,导波具有较高的截止频率且以较大的相速度传播。对于 TM 波,同样的分析可得出类似的结论。

其次,我们考虑在两理想导电平行板间运动的各向同性介质,TE 和 TM 波形的导行条件均是

$$\frac{m\pi}{d} = k_{1x} = \gamma\sqrt{(n_1^2 - \beta^2)k_o^2 - 2\beta(n_1^2 - 1)k_o k_z - (1 - n_1^2\beta^2)k_x^2} \tag{7.3.43}$$

这个等式来自式(7.3.17)。注意,$m\pi/d$ 是介质静止时第 m 个波型的截止波数,求 k_z 的解,由此方程得到

$$k_z = \frac{k_o}{1 - n_1^2\beta^2}\left\{-\beta(n_1^2 - 1) \pm (1 - \beta^2)\cdot\sqrt{n_1^2 - \left(\frac{1 - n_1^2\beta^2}{1 - \beta^2}\right)\left(\frac{m\pi}{k_0 d}\right)^2}\right\} \tag{7.3.44}$$

应该看到,截止出现于 k_z 为虚数时。当介质速度超过切连科夫速度从面 $n_1\beta > 1$ 时,对实数 n_1,k_z 将总是实数,截止将不会出现。传播常数 k_z 总为正值,条件是

$$\beta(n_1^2 - 1) \geqslant [n_1^2(1 - \beta^2)^2 - (1 - \beta^2)^2(1 - n_1^2\beta^2)(m\pi/k_0 d)]^{1/2}$$

或与其等价,

$$k_0 d \geqslant m\pi[m\pi(1 - \beta^2)/(n_1^2 - \beta^2)]^{1/2}$$

在 $n_1\beta < 1$ 的低速区,因 $k_0 d \leqslant m\pi(1 - n_1^2\beta^2)/(1 - \beta^2)n_1^2$ 而出现截止。把它与 $k_c d = m\pi/n_1^2$ 的静止状况相比,我们看出,介质的运动总是使截止波数减少。对高于截止、但含有小于方

程中第一项的平方根项的频率,导波的速度都沿负 $\hat{z}$ 方向运动。当 $k_0 d \geqslant m\pi[(1-\beta^2)/(n_1^2-\beta^2)]^{1/2}$时,相速度才可能沿两个方向。

研究波导内每个波型所携带的能流是饶有兴趣的。考虑具有

$$E_y = E_m \sin\frac{m\pi x}{d} e^{ik_z z}$$

的 TM 波型,磁场分量由麦克斯韦方程和运动介质的本构关系确定。

$$B = \frac{1}{i\omega}\nabla\times E = \left[-\hat{x}\frac{k_z}{\omega}E_m\sin\frac{m\pi x}{d} - \hat{z}\,i\frac{m\pi}{\omega d}E_m\cos\frac{m\pi x}{d}\right]e^{ik_z z}$$

$$H = \frac{1}{c\mu'}[\hat{x}(-lE_y + qc\beta_x) + \hat{z}(c\beta_z)]$$

$$= \hat{x}\frac{1}{c\mu'}\left[-l - \frac{qck_z}{\omega}\right]E_y - \hat{z}\,i\frac{m\pi}{\omega\mu' d}E_m\cos\frac{m\pi x}{d}e^{ik_z z}$$

经对波导截面积分,$\hat{z}$ 方向的能流为

$$P_z = -\int_0^d dx\,\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{E_y H_x^*\}$$

$$= \mathrm{Re}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{d}{2c\mu'}\left(l + \frac{qk_z}{k_0}\right)^* |E_m|^2$$

$$= \mathrm{Re}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{d}{2c\mu'}\left[\pm\sqrt{n_1^2 - \left(\frac{1-n_1^2\beta^2}{1-\beta^2}\right)\left(\frac{m\pi}{k_0 d}\right)^2}\right]^* |E_m|^2$$

因而,每单个波型带有自己的能量,总能量为所有单个分量的和。$\beta=0$ 时,这个结果还原为静止介质的情形。超过切连科夫速度,平方根总为实数值,所有波型均携带时间平均能。低于切连科夫速度,低于截止的波型将不携带时间平均能。在所有情况下,平方根前面的 ± 号都表示能量可以沿 $\hat{z}$ 的正负两个方向传播,与在某些情况下可能仅沿一个方向传播的相速度相反。在这个速度范围内,运动介质中可能产生后向导波。

专题 7.3.E 运动回旋介质中的导波

对于各向异性和双各向异性介质中的导波,E_z 和 H_z 的波动方程通常是共轭的。我们用使回旋介质运动实现的双各向异性介质的一般情况来展示这一点。回旋介质在静止参照系内的张量电容率

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \begin{bmatrix} \varepsilon' & -\varepsilon'_g & 0 \\ i\varepsilon'_g & \varepsilon' & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon'_z \end{bmatrix} \tag{7.3.45}$$

在实验室参照系内,本构矩阵由式(7.3.10)给出,我们变换为 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 表达式,得到下列本构关系

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\varepsilon}_s\cdot\boldsymbol{E}_s + \varepsilon'_z\boldsymbol{E}_z + \boldsymbol{\xi}_s\cdot\boldsymbol{H}_s \tag{7.3.46a}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\mu}_s\cdot\boldsymbol{E}_s + \mu'_z\boldsymbol{E}_z - \boldsymbol{\xi}_s\cdot\boldsymbol{H}_s \tag{7.3.46b}$$

式中,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \varepsilon'\begin{bmatrix} a & -ia_g \\ ia_g & a \end{bmatrix} = \frac{(1-\beta^2)\varepsilon^2}{n^2[(1-n^2\beta^2)^2 - n_g^4\beta^4]}\cdot \tag{7.3.47}$$

$$\begin{bmatrix} n^2(1-n^2\beta^2) + n_g^4\beta^2 & -in_g^2 \\ in_g^2 & n^2(1-n^2\beta^2) + n_g^4\beta^2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mu}_s = \mu'\begin{bmatrix} b & -\mathrm{i}b_g \\ \mathrm{i}b_g & b \end{bmatrix} = \frac{(1-\beta^2)\mu'}{(1-n^2\beta^2)^2 - n_g^4\beta^4}\begin{bmatrix} 1-n^2\beta^2 & -\mathrm{i}n_g^2\beta^2 \\ \mathrm{i}n_g^2\beta^2 & 1-n^2\beta^2 \end{bmatrix} \tag{7.3.48}$$

$$\boldsymbol{\xi}_s = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} -\mathrm{i}\xi_g & -\xi \\ \xi & -\mathrm{i}\xi_g \end{bmatrix} = \frac{(1-\beta^2)/c}{(1-n^2\beta^2)^2 - n_g^4\beta^4} \cdot$$
$$\begin{bmatrix} -n_g^2\beta & -\gamma^2\beta[(n^2-1)(1-n^2\beta^2)+n_g^4\beta^2] \\ \gamma^2\beta[(n^2-1)(1-n^2\beta^2)+n_g^4\beta^2] & -\mathrm{i}n_g^2\beta \end{bmatrix} \tag{7.3.49}$$

$\beta=0$ 时,式(7.3.47)还原为式(7.3.45),$\boldsymbol{\mu}_s=\mu'\boldsymbol{I}$,$\boldsymbol{\xi}_s=0$,且得到静止的回旋介质。

我们可以用纵向分量 E_z 和 H_z 来表示横向分量,并推导 E_z 和 H_z 的波动方程,于是得到

$$\nabla_s \times \boldsymbol{E}_z = \mathrm{i}\omega\boldsymbol{\mu}_s\cdot\boldsymbol{H}_s\cdot\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{E}_s \tag{7.3.50a}$$

$$\nabla_s \times \boldsymbol{H}_z = -\mathrm{i}\omega\boldsymbol{\varepsilon}_s\cdot\boldsymbol{H}_s - \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{H}_s \tag{7.3.50b}$$

$$\nabla_s \times \boldsymbol{E}_s = \mathrm{i}\omega\mu'_z\boldsymbol{H}_z \tag{7.3.51a}$$

$$\nabla_s \times \boldsymbol{H}_s = -\mathrm{i}\omega\epsilon_z\boldsymbol{E}_z \tag{7.3.51b}$$

式中,

$$\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} d_g & -\mathrm{i}d \\ \mathrm{i}d & d_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega\xi_g/c & -\mathrm{i}(k_z+\omega\xi/c) \\ \mathrm{i}(k_z+\omega\xi/c) & \omega\xi_g/c \end{bmatrix} \tag{7.3.52}$$

根据 $\boldsymbol{E}_z$ 和 $\boldsymbol{H}_z$,横向分量为

$$\boldsymbol{E}_s = (\boldsymbol{I}-\omega^2\boldsymbol{d}^{-1}\cdot\boldsymbol{\mu}_s\cdot\boldsymbol{d}^{-1}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_s)^{-1}[-\boldsymbol{d}^{-1}\cdot(\nabla_s\times\boldsymbol{E}_z) - \mathrm{i}\omega\boldsymbol{d}^{-1}\cdot\boldsymbol{\mu}_s\cdot\boldsymbol{d}^{-1}(\nabla\times\boldsymbol{H}_z)] \tag{7.3.53a}$$

$$\boldsymbol{H}_s = (\boldsymbol{I}-\omega^2\boldsymbol{d}^{-1}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_s\cdot\boldsymbol{d}^{-1}\cdot\boldsymbol{\mu}_s)^{-1}[-\boldsymbol{d}^{-1}\cdot(\nabla_s\times\boldsymbol{H}_z) - \mathrm{i}\omega\boldsymbol{d}^{-1}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_s\cdot\boldsymbol{d}^{-1}(\nabla\times\boldsymbol{E}_z)] \tag{7.3.53b}$$

经大量代数运算后,求出纵向场分量的波动方程为

$$\left[\nabla_s^2 + \frac{\epsilon'_z}{\epsilon'}k^2 e\right]E_z = \mathrm{i}\omega\mu' h_g H_z \tag{7.3.54a}$$

$$[\nabla_s^2 + k^2 h]H_z = -\mathrm{i}\omega\epsilon'_z e_g E_z \tag{7.3.54b}$$

式中,

$$e = \frac{1}{b}\left[b^2 - b_g^2 + \frac{(bd-b_g d_g)^2}{d_g^2 - k^2 ab}\right] \tag{7.3.55a}$$

$$h = \frac{1}{a}\left[a^2 - a_g^2 + \frac{(ad-a_g d_g)^2}{d_g^2 - k^2 ab}\right] \tag{7.3.55b}$$

$$e_g = \frac{1}{a}\left[ab_g - a_g d - \frac{(ad-a_g d_g)(dd_g - kab_g)}{d_g^2 - k^2 ab}\right] \tag{7.3.55c}$$

$$h_g = \frac{1}{b}\left[bb_g - b_g d - \frac{(bd-b_g d_g)(dd_g - ka_g b)}{d_g^2 - k^2 ab}\right] \tag{7.3.55d}$$

式(7.3.54)中 E_z 和 H_z 的两个方程是共轭的,因而导波波型为混杂型。在 $\beta=0$ 的静止情况下,波动方程不共轭,混杂波为边界条件的结果。

求式(7.3.54)共轭方程的解,可以将它们变换为非共轭齐次亥姆霍兹方程来加以简化。定义

$$\psi_j = \boldsymbol{E}_z - \mathrm{i}\alpha_j\boldsymbol{H}_z \qquad j=1,2 \tag{7.3.56}$$

然后用 $i\alpha_j$ 乘以式(7.3.54b),并从式(7.3.54a)中减去该结果。用式(7.3.56)消去 $\boldsymbol{E}_z$ 且令 $\boldsymbol{H}_z$ 的系数为 0,得到下列关于 α_j 的二次方程

$$\omega\epsilon_z e_j\alpha_j^2 - k^2\left[h - \frac{\epsilon'_z}{\epsilon'}e\right]\alpha_j - \omega\mu h_g = 0 \tag{7.3.57}$$

式(7.3.57)中 α_j 的两个根为 α_1,α_2 的值,在满足式(7.3.57)的条件下,联立式(7.3.54a)和(7.3.54b)得到一个简单的二次两维标量齐次亥姆霍兹方程

$$\nabla_s^2\psi_j + q_j^2\psi_j = 0 \tag{7.3.58}$$

式中,

$$q_j = \frac{\epsilon'_z}{\epsilon'}k^2e + \alpha_j\omega\epsilon'_z e_g = k^2h + \frac{1}{\alpha_j}\omega\mu h_g \tag{7.3.59}$$

对于规范截面(矩形或圆形)的波导,ψ_j 可由式(7.3.58)在适当的坐标系内求得。在已知 ψ_1 和 ψ_2 的情况下,根据式(7.3.56)有

$$E_z = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}(\alpha_2\psi_1 - \alpha_1\psi_2) \tag{7.3.60a}$$

$$H_z = -\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}(\psi_1 - \psi_2) \tag{7.3.60b}$$

然后从式(7.3.53)即可推导出横向场分量并使之满足边界条件。显然,对于运动回旋介质中的导波,波型是混杂的,甚至当回旋介质静止时,E_z 和 H_z 的两个波动方程也仍然是共轭的并且波型为混杂型。如果是单轴介质,不管其静止还是运动,两个波动方程都将是非共轭的,因为此时 $\epsilon_g = 0$,所有带下角标 g 的参数将不存在。

习题

7.3.1

(1) 运动两向同性介质有本构关系

$$\begin{pmatrix} c\boldsymbol{D}' \\ \boldsymbol{H}' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} p'\boldsymbol{I} & l'\boldsymbol{I} \\ -l'\boldsymbol{I} & q'\boldsymbol{I} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}' \\ c\boldsymbol{B}' \end{pmatrix}$$

它在静止参照系中有怎样的本构关系?

(2) 求一双轴介质沿其中一主轴运动的本构关系。

7.3.2 考察一光轴在 $\hat{z}$ 方向上的运动单轴介质的反射和透射,假定入射面平行于运动方向。

(1) 试证 TE 波的色散关系为

$$k_x^2 + \frac{\mu_z}{\mu}(k_z - \omega\xi)^2 = \omega^2\mu_z\epsilon$$

TM 波的色散关系为

$$k_x^2 + \frac{\epsilon_z}{\epsilon}(k_z - \omega\xi)^2 = \omega^2\mu\epsilon_z$$

注意, TE 波和 TM 波与第 3 章讨论的类型 I 和 II 相对应。

(2) 假设入射区 0 也是一运动介质,当透射波消失时,出现全反射。令 $k_{tx}^2 \leqslant 0$,求出临界角。全反射条件为

$$(\omega - \chi_t k_z)^2 - \kappa_t\nu_t k_z^2 \leqslant 0$$

考虑运动的各向同性介质,并且 $\kappa\nu \approx c^2/n^2$, $\kappa_t\nu_t \approx c^2/n_t^2$, $\chi \approx c\beta(1 - 1/n^2)$ 和 $\chi_t \approx c\beta_t(1 - 1/n_t^2)$ 仅保留 β 的一次项。对非相对论性速度 $\omega = \chi k_z + ck/n$。试证明

$$\sin\theta \geqslant \frac{n_t/n}{1 + n_t\beta_t(1 - 1/n_t^2) - n_t\beta(1 - 1/n^2)} \approx n_t\beta(1 - 1/n^2)$$

最后两项是介质在0区和t区的运动导致的。介质在t区运动得越快,临界角越小。介质在0区运动产生的作用相反。

(3) 试证层状运动介质和静止介质的反射系数形式相同。对于以非相对论性速度运动的两各向同性介质,$\omega \approx \chi k_z + ck/n$。令菲涅耳系数等于0,试计算布儒斯特角。

7.4 张量形式的麦克斯韦方程组

用张量标记方式麦克斯韦方程表示为

$$F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0 \tag{7.4.1a}$$

$$G^{\alpha\mu}_{\ \ ,\alpha} = J^{\mu} \tag{7.4.1b}$$

我们把与张量标记方式有关的角标的使用规则概括如下。

(1) 当角标为希腊字母时,其变化范围为0~3;为罗马字母时,变化区间为1~3。

(2) 当某张量的角标升高或降低时,矢量的第0个分量变号,其他分量保持不变。

(3) 当某角标在方程同一边重复时,就意味着对该角标求和。求和总是对逆变角标及其对应的协变角标进行的。

(4) 方程一边的自由(不重复)角标必须和方程另一边的相同角标平衡。

(5) 张量的逆变分量用上角标表示,而协变分量用下角标表示。

电磁场张量$F_{\alpha\beta}$和激励张量$G^{\mu\nu}$用矩阵表示定义如下。

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ -E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ -E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{bmatrix} \tag{7.4.2}$$

$$G^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -cD_x & -cD_y & -cD_z \\ cD_x & 0 & -H_z & H_y \\ cD_y & H_z & 0 & -H_x \\ cD_z & -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix} \tag{7.4.3}$$

三维场矢量与下列形式的场张量和激励张量相联系

$$E_i = F_{0i}$$

$$cB_i = -\varepsilon_{ijk}F_{jk}$$

$$cD_i = -G^{0i}$$

$$H_i = -\varepsilon_{ijk}G^{jk}$$

我们现在论证式(7.4.1)与整个麦克斯韦方程系列等价。假如式(7.4.1a)中的三个角标α,β,γ都不为0,求得磁作用的高斯定律

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

假如其中一个为0,式(7.4.1a)给出法拉第定律

$$\nabla\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$$

如果式(7.4.1b)中的$\mu=0$,我们得到电作用下的高斯定律

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho$$

若 $\mu \neq 0$,式(7.4.1b)给出

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{J}$$

这是含麦克斯韦位移电流项 $\partial \boldsymbol{D}/\partial t$ 的安培定律。

电荷电流守恒定律表明

$$J^{\alpha}_{,\alpha} = 0 \tag{7.4.4}$$

电荷电流密度为

$$J^{\alpha} = (c\rho, \boldsymbol{J}) \tag{7.4.5}$$

J^{α} 的时空导数

$$J^{\alpha}_{,\alpha} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{J} \tag{7.4.6}$$

成为标量。

根据矢量和标量位来表达场矢量的通常做法,可以从式(7.4.1a)看到。相当容易证明,假如

$$F_{\alpha\beta} = A_{\alpha,\beta} - A_{\beta,\alpha} \tag{7.4.7}$$

式(7.4.1a)得到满足。式中 A_{α} 为一协变四维矢量,其第 0 个逆变分量为标量位 ϕ,其空间分量为矢量位 $\boldsymbol{A}$ 乘以 c。

$$A_{\alpha} = \begin{bmatrix} -\phi \\ c\boldsymbol{A} \end{bmatrix}, \qquad A^{\alpha} = \begin{bmatrix} \phi \\ c\boldsymbol{A} \end{bmatrix} \tag{7.4.8}$$

用三维标记方式写出式(7.4.7),得到熟悉的表达式:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla \phi$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

如果做一个 A_{α} 到 A'_{α} 的度规变换,以使

$$A_{\alpha} = A'_{\alpha} + \psi_{,\alpha} \tag{7.4.9}$$

(其中,ψ 为在式(7.4.1a)中引入式(7.4.9)的任意时空标量函数),即得到

$$F_{\alpha\beta} = A_{\alpha,\beta} - A_{\beta,\alpha} = A'_{\alpha,\beta} - A'_{\beta,\alpha} \tag{7.4.10}$$

该式表明 A_{α} 和 A'_{α} 两者引起相同的场张量。这种任意性由度规条件限定,洛伦兹度规为

$$A^{\mu}_{,\mu} = 0 \tag{7.4.11}$$

其采用了与电流密度连续性方程相同的形式。与库仑度规不同,它是相对论性协变的。

专题 7.4.A　逆变和协变矢量

可以设想一个由时间和三维空间坐标组成的四维(4D)空间。一个物理事件的时空坐标具有四维空间矢量的性质,用

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \tag{7.4.12}$$

来表示一个事件的四个分量。式中用上角标 0 表示时间分量,1,2,3 表示空间分量。狭义相对论中的通常习惯是用下角标 4 记时间分量,并指定它为虚数。应该把它与量子理论和波动理论中使用的虚数标记方式仔细区分开来。我们用到的标记方式不要求虚数符号,但必须在上下角标上有所区别,当考虑广义相对论时,该标记方式容易广义化。

从一个观察者至另一个观察者的时空坐标矢量变换由洛伦兹变换给出。在洛伦兹变换

下，

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2 \tag{7.4.13}$$

是与速度无关的不变量，式(7.4.13)开平方表示4D矢量的大小，实际上定义了洛伦兹变换。尽管其他物理量数值从一个参照系到另一个参照系发生改变，而这个数值在所有参照系中保持不变。我们注意到，在四维空间内，矢量的大小现在既可以是实数也可以是虚数。一个四维矢量，依照它是实数、0、虚数，而被分别称为类空矢量，0矢量或类时矢量。两个物理事件(ct_1,x_1,y_1,z_1)和(ct_2,x_2,y_2,z_2)的时空坐标构成一用坐标值大小的平方来表示四维的矢量。

$$(X_1-X_2)^2=-c^2(t_1-t_2)^2+(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2$$

它是一洛伦兹不变量。如果矢量为类时矢量，$(X_1-X_2)^2$为负。总可以找到这样一个观察者，在其静止参照系里，两个事件在同一地点，却不在同一时间发生。因此，他在时间t'_1和t'_2目睹了两个事件：

$$-c(t'_1-t'_2)^2=(X_1-X_2)^2$$

当矢量为0矢量时，$|r_1-r_2|^2-c^2(t_1-t_2)^2=0$，一个观察者必须以光速$c$运动才能亲眼看到两个事件。当矢量为类空矢量时，就有一个观察者，在其参照系内，两个事件位于不同地点却发生于同一时间。坐标遵循洛伦兹变换定理的四维空间称为闵可夫斯基空间。

为使四维空间形象化，设想这个四维空间有4个单位基矢量量度，

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\alpha=(\hat{\boldsymbol{e}}_0,\hat{\boldsymbol{e}}_1,\hat{\boldsymbol{e}}_2,\hat{\boldsymbol{e}}_3) \tag{7.4.14}$$

因而，任意4D矢量$\boldsymbol{X}$都可以用$\hat{\boldsymbol{e}}_\alpha$来表达：

$$\boldsymbol{X}=x^\alpha\hat{\boldsymbol{e}}_\alpha=x^0\hat{\boldsymbol{e}}_0+x^1\hat{\boldsymbol{e}}_1+x^2\hat{\boldsymbol{e}}_2+x^3\hat{\boldsymbol{e}}_3 \tag{7.4.15}$$

式(7.4.15)中，运用爱因斯坦求和约定：重复的希腊字符α表示0~3的和。我们将用希腊字母表示0~3，罗马字母表示1~3，X长度的平方定义为X自乘的标量积。

$$X^2=\hat{\boldsymbol{e}}_\alpha\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_\beta x^\alpha x^\beta \tag{7.4.16}$$

鉴于式(7.4.13)，

$$X^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2 \tag{7.4.17}$$

因而一定有

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\alpha\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_\beta=0,\qquad \alpha\neq\beta \tag{7.4.18a}$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_0\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_0=-1 \tag{7.4.18b}$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_1=\hat{\boldsymbol{e}}_2\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_2=\hat{\boldsymbol{e}}_3\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_3=1 \tag{7.4.18c}$$

根据式(7.4.18a)，4个基矢量都相互正交。由式(7.4.18b)，三维空间的基矢量仍有单位模值。式(7.4.18c)显示，描述第四维的0基矢量具有平方为-1的值，说明0基矢量的模为虚数。这4个基矢量可以被称为一个生成逆变的四维空间的逆变基矢量。用逆变基矢量来表达的矢量称为逆变矢量。

可以这样定义一组逆变基矢量$\hat{\boldsymbol{e}}^0$，$\hat{\boldsymbol{e}}^1$，$\hat{\boldsymbol{e}}^2$，和$\hat{\boldsymbol{e}}^3$，使

$$\hat{\boldsymbol{e}}^0=-\hat{\boldsymbol{e}}_0 \tag{7.4.19a}$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}^i=\hat{\boldsymbol{e}}_i \qquad i=1,2,3 \tag{7.4.19b}$$

由式(7.4.18c)，积$\hat{\boldsymbol{e}}^0\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_0=-\hat{\boldsymbol{e}}_0\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_0=1$。根据式(7.4.19a)和(7.4.19c)的定义，因为$\hat{\boldsymbol{e}}^0\cdot\hat{\boldsymbol{e}}^0=\hat{\boldsymbol{e}}_0\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_0$，矢量$\hat{\boldsymbol{e}}^0$也有一个平方为-1的值。这4个基矢量$\hat{\boldsymbol{e}}^\alpha$可以被称为协变基矢量，它描述一个协变的4D空间。用协变基矢量表示的矢量称为协变矢量。记

$$\boldsymbol{X}=x_\alpha\hat{\boldsymbol{e}}^\alpha \tag{7.4.20}$$

新矢基中 X 的分量现在表示为 x_α，根据式(7.4.19)，它通过

$$x^0 = -x_0 \tag{7.4.21a}$$

$$x^i = x_i \tag{7.4.21b}$$

与 x_α 相关。X 的逆变分量用上角标来表示，其协变分量用下角标表示。定义

$$\eta_{\alpha\beta} = \hat{e}_\alpha \hat{e}_\beta = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.4.22a}$$

和

$$\eta^{\alpha\beta} = \hat{e}^\alpha \hat{e}^\beta = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.4.22b}$$

来表达两组基矢量之间和一矢量的逆变与协变分量之间的变换

$$\hat{e}^\alpha = \eta^{\alpha\beta}\hat{e}_\beta, \qquad \hat{e}_\alpha = \eta_{\alpha\beta}\hat{e}^\beta \tag{7.4.23a}$$

$$\hat{x}^\alpha = \eta^{\alpha\beta}\hat{x}_\beta, \qquad \hat{x}_\alpha = \eta_{\alpha\beta}\hat{x}^\beta \tag{7.4.23b}$$

方程(7.4.23)等价于式(7.4.19)和(7.4.21)。两个矢量的标积定义为对一个矢量的逆变分量及相应的另一矢量的协变分量求和。因此，由式(7.4.23b)，x^α 的平方为

$$x^2 = x^\alpha x_\alpha = \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \tag{7.4.24}$$

应注意，矢量的逆变分量用上角标表示，协变分量用下角标表示。基矢量的标记方式正相反，下角标表示逆变基矢量，上角标表示协变基矢量。

讨论了逆变和协变表达式之间的变换，现在要研究逆变或协变矢量从一参照系到另一参照系的变换。当两个参照系相对匀速运动时，其变换由洛伦兹变换定理求出。

可以用逆变或协变矢量来表示物理事件的时空坐标，从一个无上角撇号参照系至有上撇号参照系的变换为

$$x'^\alpha = P^\alpha_\beta x^\beta \tag{7.4.25a}$$

或

$$x'_\alpha = Q^\beta_\alpha x_\beta \tag{7.4.25b}$$

可以把 P^α_β 看做一个用 $\boldsymbol{P}$ 表示的矩阵。对列矩阵 x^β 进行运算得出列矩阵 x'^α。对 Q^β_α 用类似的方法，根据式(7.2.1)，变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 如下。

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1+(\gamma-1)\beta_x^2/\beta^2 & (\gamma-1)\beta_x\beta_y/\beta^2 & (\gamma-1)\beta_x\beta_z/\beta^2 \\ -\gamma\beta_y & (\gamma-1)\beta_y\beta_x/\beta^2 & 1+(\gamma-1)\beta_y^2/\beta^2 & (\gamma-1)\beta_y\beta_z/\beta^2 \\ -\gamma\beta_z & (\gamma-1)\beta_z\beta_x/\beta^2 & (\gamma-1)\beta_z\beta_y/\beta^2 & 1+(\gamma-1)\beta_z^2/\beta^2 \end{bmatrix} \tag{7.4.26a}$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta_x & \gamma\beta_y & \gamma\beta_z \\ \gamma\beta_x & 1+(\gamma-1)\beta_x^2/\beta^2 & (\gamma-1)\beta_x\beta_y/\beta^2 & (\gamma-1)\beta_x\beta_z/\beta^2 \\ \gamma\beta_y & (\gamma-1)\beta_y\beta_x/\beta^2 & 1+(\gamma-1)\beta_y^2/\beta^2 & (\gamma-1)\beta_y\beta_z/\beta^2 \\ \gamma\beta_z & (\gamma-1)\beta_z\beta_x/\beta^2 & (\gamma-1)\beta_z\beta_y/\beta^2 & 1+(\gamma-1)\beta_z^2/\beta^2 \end{bmatrix} \tag{7.4.26b}$$

$\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 的一些性质可由式(7.4.25)得出。x^{α} 的平方值为洛伦兹不变量,从

$$x'^{\mu}x_{\mu}' = P_{\alpha}^{\mu}Q_{\mu}^{\beta}x^{\alpha}x_{\beta}$$

得知

$$P_{\alpha}^{\mu}Q_{\mu}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}$$

是对 μ 求和。用矩阵形式,有

$$\boldsymbol{P}^{t}\cdot\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$$

式中 $\boldsymbol{I}$ 为 4×4 单位矩阵。显然,$\boldsymbol{P}^{t}$是 $\boldsymbol{Q}$ 的逆,即

$$\boldsymbol{P}^{t} = \boldsymbol{Q}^{-1} \tag{7.4.27a}$$

$\boldsymbol{P}$ 的逆则为 $\boldsymbol{Q}$ 的转置,即

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{Q}^{t} \tag{7.4.27b}$$

用最后的这两个关系式,从有上角撇到无上角撇坐标的逆变换如下。

$$x^{\alpha} = Q_{\beta}^{\alpha}x'^{\beta} \tag{7.4.28a}$$

$$x^{\alpha} = P_{\alpha}^{\beta}x'_{\beta} \tag{7.4.28b}$$

比较式(7.4.28)和式(7.4.25),用(7.4.27)可以证明二者是等价的。

习惯上,逆变矢量用变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 做类似式(7.4.25a)的变换,协变矢量则定义为用矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 做像式(7.4.25b)那样矢量的变换。对定义进行扩展,一个第 n 阶逆变张量用变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 从一洛伦兹参照系到另一洛伦兹参照系变换 n 次。一个第 n 阶的协变分量用 $\boldsymbol{Q}$ 从一个洛伦兹参照系变换至另一洛伦兹参照系需 n 次。一个第 n 阶逆变张量和一个第 n 阶协变张量的标积是洛伦兹不变的。例如,时空导数$(\partial/\partial ct, \boldsymbol{\nabla})$构成一协变四维矢量,因为按照式(7.4.25),这一变换类似式(7.4.25b)和(7.4.28b)。如果用

$$\chi_{,\alpha} = (\partial\chi/\partial ct, \boldsymbol{\nabla}\chi)$$

来表示标量函数 $\chi(x)$的导数,得到

$$\chi'_{,\alpha} = Q_{\alpha}^{\beta}\chi_{,\beta}$$

电流密度

$$J^{\alpha} = (c\rho, \boldsymbol{J}) \tag{7.4.29}$$

被看做逆变矢量,因为它的变换类似式(7.4.25a)和(7.4.28a)。J^{α} 的时空导数

$$J^{\alpha}_{,\alpha} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J} \tag{7.4.30}$$

成为一标量。电荷电流守恒定律表明

$$J^{\alpha}_{;\alpha} = 0 \tag{7.4.31}$$

从式(7.4.22)可以证明 $\eta_{\alpha\beta}$为二阶协变张量,$\eta^{\alpha\beta}$为二阶逆变张量,它们都称为度规张量。

变换矩阵 P_{β}^{α} 和 Q_{α}^{β} 属纯洛伦兹变换,纯洛伦兹变换满足两个假定:①S 和 S'的坐标轴相互平行;②两坐标系的原点在 $t=0$ 时重合。满足②但不满足①的洛伦兹变换(LT)称为齐次洛伦兹变换(HLT),HLT 为纯 LT 和空间旋转的组合。数学上,所有类型的 HLT 都满足群的设定并被称为一个 HLT 群。重要的是两个纯洛伦兹变换的群相乘,其结果并不是一个纯洛伦兹变换,而是一个纯洛伦兹变换加上一个空间旋转。式(7.4.25)中的矩阵 P_{β}^{α} 和 Q_{α}^{β} 可用来表示齐次洛伦兹变换群,尽管如式(7.4.26)所表示的,它们呈现对称,但对称并非齐次洛伦兹群内所有元素的普遍特征。例如,空间旋转的变换矩阵就不对称。当违反假定②时,洛伦兹变换为非齐次的,非齐次洛伦兹变换通过重新选择时空坐标原点可以成为齐次的。非齐次洛伦兹变换

的全部类型也可以构成一个叫做非齐次洛伦兹群的群或简称为庞加莱(Poincare)群。齐次洛伦兹变换包含的单位元素为庞加莱群的一个子群,庞加莱群内的任何元素都可以通过逐次洛伦兹变换而连续地与单位元素结合。为完整起见,提一下涉及空间或时空反演的洛伦兹变换。这个变换群称为奇异洛伦兹群,此群内的元素不能与单位元素连续结合。上述方法限于齐次洛伦兹变换中的纯洛伦兹变换。

专题7.4.B 场张量和激励张量

为了把麦克斯韦方程写成简洁的张量形式,定义一个场张量 $F_{\alpha\beta}$和一个激励张量$G_{\alpha\beta}$,明确地用矩阵表达式,有

$$F_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}0 & E_x & E_y & E_z\\ -E_x & 0 & -cB_z & cB_y\\ -E_y & cB_z & 0 & -cB_x\\ -E_z & -cB_y & cB_x & 0\end{bmatrix} \tag{7.4.32}$$

$$G_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}0 & cD_x & cD_y & cD_z\\ -cD_x & 0 & -H_z & H_y\\ -cD_y & H_z & 0 & -H_x\\ -cD_z & -H_y & H_x & 0\end{bmatrix} \tag{7.4.33}$$

两张量都是斜对称的,即

$$F_{\alpha\beta}=-F_{\beta\alpha}$$

$$G_{\alpha\beta}=-G_{\beta\alpha}$$

它们是二阶协变张量,变换为

$$F'_{\mu\nu}=Q^{\alpha}_{\mu}Q^{\beta}_{\nu}F_{\alpha\beta} \tag{7.4.34a}$$

$$G'_{\mu\nu}=Q^{\alpha}_{\mu}Q^{\beta}_{\nu}G_{\alpha\beta} \tag{7.4.34b}$$

用矩阵标记方式,表达为

$$\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{Q}^{t}$$

$$\boldsymbol{G}'=\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{Q}^{t}$$

可直接证明,这一变换结果与三维标记方式取得的洛伦兹变换是一致的。

三维场矢量与下列形式的场张量及激励张量有关。

$$E_i=F_{0i}$$

$$cB_i=-\varepsilon_{ijk}F_{jk}$$

$$cD_i=G_{0i}$$

$$H_i=-\varepsilon_{ijk}G_{jk}$$

相应于 $F_{\alpha\beta}$和 $G_{\alpha\beta}$的逆变张量可以用矩形张量 $\eta^{\rho\beta}$获得。如

$$G^{\mu\nu}=\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}G_{\alpha\beta}=\begin{bmatrix}0 & -cD_x & -cD_y & -cD_z\\ cD_x & 0 & -H_z & H_y\\ cD_y & H_z & 0 & -H_x\\ cD_z & -H_y & H_x & 0\end{bmatrix} \tag{7.4.35}$$

该结果可以用升高和降低角标的常规方式取得。升高标志 0,逆变分量 G^{0i}为其相应协变分量的负值。

专题7.4.C 张量形式的本构关系

张量标记方式的本构关系为激励张量 $G^{\alpha\beta}$和场张量 $F_{\alpha\beta}$构筑了一种关系,记

$$G^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}C^{\alpha\beta\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \tag{7.4.36}$$

我们把四阶张量 $G^{\alpha\beta\rho\sigma}$叫做本构张量。由于 $F_{\rho\sigma}$和 $G^{\alpha\beta}$的斜对称性,可以看出

$$C^{\alpha\beta\rho\sigma}=-C^{\beta\alpha\rho\sigma}=-C^{\alpha\beta\sigma\rho}=C^{\beta\alpha\sigma\rho} \tag{7.4.37}$$

该本构张量关于第一、第二对角标斜对称。通常,四维空间的一个四阶张量包含 256 个元素。由于斜对称,第一对角标有 6 个独立的元素,第二对也一样,总共有 36 个独立的元素。因此,该 6×6 本构矩阵 $\boldsymbol{C}$ 表示本构张量的信度。

下面用式(7.4.36)建立 $C^{\alpha\beta\rho\sigma}$的张量元素和 $\boldsymbol{C}$ 的矩阵元素间的关系。鉴于式(7.4.37),有

$$C^{0i0j}=p_{ij} \tag{7.4.38a}$$

$$C^{ijkl}=\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{kln}q_{mn} \tag{7.4.38b}$$

$$C^{0kij}=-\varepsilon_{ijm}l_{km} \tag{7.4.38c}$$

$$C^{ij0k}=-\varepsilon_{ijn}m_{kn} \tag{7.4.38d}$$

第 3 章证明了对于 $p_{ij}=p_{ji}^*$, $q_{mn}=q_{nm}^*$,和 $l_{kn}=-m_{nk}^*$无损耗介质对称条件的存在。该条件把独立的本构参数限制为 21 个。依据本构张量,无损耗条件对应于

$$C_{\rho\sigma}^{\alpha\beta}=(C_{\alpha\beta}^{\rho\sigma})^* \tag{7.4.39}$$

应注意,如果用 4 个逆变分量表达了上述条件,当 $C^{\alpha i\beta j}=(C^{\beta j\alpha i})^*$时,将有 $C^{0kij}=-\varepsilon_{imj}l_{km}=\varepsilon_{ijm}m_{km}^*=-(C^{ij0k})^*$。可以用两个逆变角标和两个协变角标取得这一最终结果。

在这一点上应该适当地提一下冯·蒂歇尔和赫斯(1959)在导电介质的协变描述方面的工作。欧姆定律用电导率把传导电流和电场联系起来,电导率可以是各向同性的,也可以是各向导性的。对运动的各向异性导电介质,冯·蒂歇尔和赫斯引入了一个新的三维矢量,它与传导电流一起构成一个像 $F_{\mu\nu}$和 $G_{\mu\nu}$的四维斜对称张量,从面得到了一个可以称之为双各向异性导电介质的协变描述。上述新矢量的涵义还有待于探索。

此外,还有其他关于运动各向同性介质的协变描述,例如,对欧姆定律

$$(\delta_\rho^\alpha+u^\alpha u_\rho)J_c^\rho=\sigma u_\beta F^{\alpha\beta}$$

以及对各向同性非导电介质的

$$G_{\lambda\mu}=F_{\lambda\mu}+(n^2-1)(F_{\mu\sigma}u^\sigma u_\lambda-F_{\lambda\sigma}u^\sigma u_\mu)$$

描述,速度四维矢量 $u^\alpha=(1,\boldsymbol{\beta})$。这些明晰的协变描述清楚地展示了速度相关性。当以介质的静止参照系为参照基准时,$u^\alpha=(1,0,0,0)$且上述两方程给出 $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}/\mu$。

习题

7.4.1 通过验证:(1)两连续的洛伦兹变换等价于另一个洛伦兹变换(闭和),(2)结合律适用于连续洛伦兹变换,(3)群的单位根本无变换,(4)对每个洛伦兹变换都存在一个洛伦兹逆变换,证明齐次洛伦兹变换构成一个群。

7.4.2 试证纯洛伦兹变换违反群的闭合公设。

7.5 哈密顿(Hamilton)原理和诺特(Noether)定理

7.5.1 动态积分

从假定的拉格朗日(Lagrangian)密度出发,变分原理提供了一个精致、系统的推导物理体系运动方程以及守恒定律的途径。宏观电磁场的情形,拉格朗日密度被假定为

$$L[x_\alpha, A_\alpha(x_\mu), A_{\alpha,\beta}(x_\mu)] = -\frac{1}{4}F^{\alpha\beta}G_{\alpha\beta} + J^\alpha A_\alpha$$

$$= -\frac{1}{8}C^{\alpha\beta\rho\sigma}(A_{\alpha,\beta} - A_{\beta,\alpha})(A_{\rho,\sigma} - A_{\sigma,\rho}) + J^\alpha A_\alpha \tag{7.5.1}$$

拉格朗日密度 $L(x, A_\alpha, A_{\alpha,\beta})$是时空坐标 x_α,位函数 A_α 以及位函数$A_{\alpha,\beta}$时空导数的函数。位函数 A_α 也叫做状态函数,电流四维矢量 J_α 为外部给定的状态函数。将变分原理运用于由拉格朗日密度对四维空间 R 积分所定义的动态积分 I:

$$I = \int_R \mathrm{d}^4 x L[x_\alpha, A_\alpha(x_\mu), A_{\alpha,\beta}(x_\mu)] \tag{7.5.2}$$

动态积分的变分是由状态函数 A_α 的变分或积分域R 的变分所产生的。积分成 R 导致对时空相关状态函数A_α 和对外部给定的 J_α 的变分,因为二者是时空相关的。

7.5.2 哈密顿(Hamilton)原理和麦克斯韦方程组

哈密顿(Hamilton)原理中,积分域 R 是不变的,R 域内的状态函数变化一个任意无穷小量 δA_α

$$A'_\alpha(x_\mu) = A_\alpha(x_\mu) + \delta A_\alpha(x_\mu) \tag{7.5.3}$$

其中,A'_α 为新的状态函数。R 边界的状态函数是不变的,$\delta A_\alpha = 0$。原理要求动态积分在下面的变分中是不变的

$$\delta I = \int_R \mathrm{d}^4 x[L'(x_\alpha, A'_\alpha, A'_{\alpha,\beta}) - L(x_\alpha, A_\alpha, A_{\alpha,\beta})] = 0 \tag{7.5.4}$$

新拉格朗日密度 $L'(x_\alpha, A'_\alpha, A'_{\alpha,\beta})$和旧拉格朗日密度 L 的关系如下。

$$L'(x_\alpha, A'_\alpha, A'_{\alpha,\beta}) = L(x_\alpha, A_\alpha, A_{\alpha,\beta}) + \frac{\partial L}{\partial A_\alpha}\delta A_\alpha + \frac{\partial L}{\partial A_{\alpha,\beta}}\delta A_{\alpha,\beta}$$

$$= L(x_\alpha, A_\alpha, A_{\alpha,\beta}) + \frac{\partial L}{\partial A_\alpha}\delta A_\alpha - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\beta}\left(\frac{\partial L}{\partial A_{\alpha,\beta}}\right)\delta A_\alpha + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\beta}\left(\frac{\partial L}{\partial A_{\alpha,\beta}}\delta A_\alpha\right)$$

代入式(7.5.4)得

$$\int_R \mathrm{d}^4 x\left\{\left[\frac{\partial L}{\partial A_\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\beta}\left(\frac{\partial L}{\partial A_{\alpha,\beta}}\right)\right]\delta A_\alpha + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\beta}\left(\frac{\partial L}{\partial A_{\alpha,\beta}}\delta A_\alpha\right)\right\} = 0 \tag{7.5.5}$$

鉴于 R 边界δA_α 为零,式中最后一项积分后存在,因为 δI 对状态函数δA_α 的所有变分都为零,就有

$$\frac{\partial L}{\partial A_\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\beta}\left(\frac{\partial L}{\partial A_{\alpha,\beta}}\right) = 0 \tag{7.5.6}$$

此式称为欧拉-拉格朗日方程。

麦克斯韦方程

$$F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0 \tag{7.5.7}$$

是定义

$$F_{\alpha\beta} = A_{\alpha,\beta} - A_{\beta,\alpha} \tag{7.5.8}$$

的直接结果。另一个麦克斯韦方程

$$G^{\beta\alpha}_{,\beta} = J^{\alpha} \tag{7.5.9}$$

可利用方程$\partial L/\partial A_\alpha = J^\alpha$ 和$\partial L/\partial A_{\alpha,\beta} = -G^{\alpha\beta}$从欧拉–拉格朗日方程导出。

7.5.3 诺特定理和能量动量张量

在诺特(Noether)定理中,积分域 R 进行了无穷小量变换,导致了对状态函数 A_α 和 J_α 的变分。假设把 R 域映射到一个新的域 R' 上,使得

$$x'_\alpha = x_\alpha + \delta x_\alpha \tag{7.5.10}$$

该映射将一状态函数从 x_α 迁移到 x'_α,

$$A'_\alpha(x') = A_\alpha(x) + \delta A_\alpha \tag{7.5.11}$$

注意,δA_α 给出了处于新位置 x'_α 的新状态函数 $A'_\alpha(x')$ 与迁移前在老位置 x_α 的旧状态函数 $A_\alpha(x)$ 之间的差。通常,状态函数并非时空坐标的显函数。

考虑 R 域平移一无穷小量,即

$$x'_\alpha = x_\alpha + \epsilon_\alpha \tag{7.5.12}$$

从坐标变换的主动方面看,所有状态函数都迁移了无穷小量,新旧状态函数大小相等,方位不变。从被动方面看,坐标轴被平移了一无穷小量,而状态函数保持不变。有

$$\delta A_\alpha = 0 \tag{7.5.13}$$

其次,考虑坐标轴做一无穷小量的旋转

$$x'_\alpha = x_\alpha - \omega_\alpha^{\ \beta} x_\beta \tag{7.5.14}$$

对状态函数产生的变分为

$$\delta A_\alpha = \omega_\alpha^{\beta} A_\beta \tag{7.5.15}$$

从主动的观点看,状态函数被旋转了一无穷小量;从被动的观点看,该无穷小量等于在新旧坐标轴上投影分量的变化。

用 δA_α 表示的变分是相当不方便的,因为它要比较两个不同位置的状态函数。定义

$$\bar{\delta} A_\alpha = A'_\alpha(x') - A_\alpha(x') = A'_\alpha(x) - A_\alpha(x) \tag{7.5.16}$$

来替代它表示在同一位置上新旧状态函数间的差。第二个等式在一阶以内是成立的,如下所示。

$$\begin{aligned}\bar{\delta} A_\alpha &= A'_\alpha(x') - A_\alpha(x') \\ &= A'_\alpha(x) - A_\alpha(x) + (A'_{\alpha,\beta} - A_{\alpha,\beta})\delta x^\beta + \cdots \\ &\approx A'_\alpha(x) - A_\alpha(x)\end{aligned} \tag{7.5.17}$$

事实上可以证明,所有含无穷小时空间隔的一阶量都是相等的。容易建立 δA_α 和 $\bar{\delta} A_\alpha$ 之间的关系

$$\begin{aligned}\bar{\delta} A_\alpha &= A'_\alpha(x') - A_\alpha(x') \\ &= A'_\alpha(x') - A_\alpha(x) - [A_\alpha(x') - A_\alpha(x)] \\ &= \delta A_\alpha - A_{\alpha,\beta}\delta x^\beta\end{aligned} \tag{7.5.18}$$

注意,当域的变分为平移时,由于新旧状态函数相同,$\delta A_\alpha = 0$。但 $\bar{\delta} A_\alpha \neq 0$,因为在 x'_α 的新状态函数是从相邻位置移来的,理所当然不同于在 x'_α 的已被移至另一位置的旧状态函数。

在无穷小域变分下，产生对状态函数 $A_\alpha, A_{\alpha,\beta}$ 和外部给定的 J_α 的变分。新旧拉格朗日密度通过下式相联系

$$
\begin{aligned}
L'(x'_\alpha, A'_\alpha, A'_{\alpha,\beta}) &= L + L_{,\alpha}\delta x^\alpha + \frac{\partial L}{\partial A_\alpha}\delta A_\alpha + \frac{\partial L}{\partial A_{\alpha,\beta}}\delta A_{\alpha,\beta} + \frac{\partial L}{\partial J_\alpha}\delta J_\alpha \\
&= L + \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x^\rho}\delta x^\rho + \frac{\partial L}{\partial A_\alpha}\bar{\delta}A_\alpha + \frac{\partial L}{\partial A_{\alpha,\beta}}\bar{\delta}A_{\alpha,\beta} + \frac{\partial L}{\partial J_\alpha}\bar{\delta}J_\alpha
\end{aligned}
$$

式中

$$
\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x^\rho} = L_{,\rho} + \frac{\partial L}{\partial A_\alpha}A_{\alpha,\rho} + \frac{\partial L}{\partial A_{\alpha,\beta}}A_{\alpha,\beta\rho} + \frac{\partial L}{\partial J_\alpha}J_{\alpha,\rho}
$$

新积分域 R' 通过下面的雅可比(Jacobian)行列式与旧积分域相联系

$$
\det\left|\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\right| = 1 + (\delta x^\alpha)_{,\alpha} \tag{7.5.19}
$$

在该变分域下，一阶动态积分的变分成为

$$
\begin{aligned}
\delta I &= \int_{R'}\mathrm{d}^4x' L'(x'_\alpha, A'_\alpha, A'_{\alpha,\beta}) - \int_R \mathrm{d}^4x L(x_\alpha, A_\alpha, A_{\alpha\beta}) \\
&= \int_R \mathrm{d}^4x\left\{[1 + (\delta x^\alpha)_{,\alpha}]\left(L + \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x^\rho}\delta x^\rho + \frac{\partial L}{\partial A_\alpha}\bar{\delta}A_\alpha + \frac{\partial L}{\partial J_\alpha}\bar{\delta}J_\alpha + \frac{\partial L}{\partial A_{\alpha,\beta}}\bar{\delta}A_{\alpha,\beta}\right) - L\right\} \\
&= \int_R \mathrm{d}^4x\left\{\left[\frac{\partial L}{\partial A_\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\beta}\left(\frac{\partial L}{\partial A_{\alpha,\beta}}\right)\right]\bar{\delta}A_\alpha + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\rho}\left[L\delta x^\rho + \frac{\partial L}{\partial A_{\alpha,\rho}}\bar{\delta}A_\alpha\right] + \frac{\partial L}{\partial J_\alpha}\bar{\delta}J_\alpha\right\}
\end{aligned}
$$

注意，尽管该动态积分的变分是由无穷小域变化引起的诱导变分推导出的，但结果却是相当一般性的，并包括作为特例的哈密顿原理。保持该域不变，则有 $\delta x^\rho = 0, \bar{\delta}A_\alpha = \delta A_\alpha$ 外部给定的 J_α 也不变，$\delta J_\alpha = 0$。可看出此结果已还原为式(7.5.5)。

诺特定理要求动态积分恒定以及欧拉-拉格朗日方程适合于域变分下的状态函数 A_α。因此得到

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x\rho}\left(L\delta x^\rho + \frac{\partial L}{\partial A_{\alpha,\rho}}\bar{\delta}A_\alpha\right) + \frac{\partial L}{\partial J_\alpha}\bar{\delta}J_\alpha = 0 \tag{7.5.20}
$$

此方程表达了所有守恒定律。首先考虑平移的情形，该情形引出宏观电磁场的能量动量张量，其次考虑四维旋转的情况并推导角动量守恒定律。在无穷小的平移下，有

$$
\bar{\delta}A_\alpha = -A_{\alpha,\beta}\epsilon^\beta \tag{7.5.21a}
$$

$$
\bar{\delta}J_\alpha = -J_{\alpha,\beta}\epsilon^\beta \tag{7.5.21b}
$$

方程(7.5.20)给出

$$
\epsilon^\beta\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\rho}\left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}G_{\mu\nu}\delta^\rho_\beta + J^\alpha A_\alpha\delta^\rho_\beta + G^{\alpha\rho}A_{\alpha,\beta}\right) - A^\alpha J_{\alpha,\beta}\right] = 0
$$

此方程可以仅用场变量表示。经若干运算并利用 $G^{\alpha\rho}A_{\beta,\alpha\rho} = 0$，消去位函数，得到

$$
T^{\alpha\beta}_{\ ,\alpha} = -f^\beta \tag{7.5.22}
$$

其中，

$$
T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}F_{\rho\sigma}G^{\rho\sigma} + \eta^{\rho\beta}G^{\mu\alpha}F_{\rho\mu} \tag{7.5.23}
$$

是四维能量动量张量，且

$$
f^\beta = J_\alpha \ F^{\alpha\beta} \tag{7.5.24}
$$

用三维张量标记方式，得到

$$f^{\beta}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E} \\ c\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times c\boldsymbol{B}\end{bmatrix} \tag{7.5.25}$$

$$T^{\alpha\beta}=\begin{bmatrix} cW & c^2\boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{S} & c\boldsymbol{T}\end{bmatrix} \tag{7.5.26}$$

式中,

电磁能: $W=\frac{1}{2}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})$

能流密度: $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$

动量密度: $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}$

麦克斯韦应力张量 $\boldsymbol{T}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})\boldsymbol{I}-\boldsymbol{DE}-\boldsymbol{BH}$

以矢量标记方式表示,守恒定律(7.5.22)取形式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{S}+\frac{\partial W}{\partial t}=-\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E} \tag{7.5.27a}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{T}+\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial t}=-(\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}) \tag{7.5.27b}$$

第一个方程为坡印廷定理,第二个方程已经在 1.3 节里导出。在无穷小的旋转下,有

$$\bar{\delta}A_{\alpha}=\delta A_{\alpha}-A_{\alpha,\beta}\delta x^{\beta}=\omega_{\alpha}^{\beta}A_{\beta}-A_{\alpha,\beta}\,\omega_{\rho}^{\beta}x^{\rho} \tag{7.5.28a}$$

$$\bar{\delta}J_{\alpha}=\omega_{\alpha}^{\beta}J_{\beta}-J_{\alpha,\beta}\,\omega_{\rho}^{\beta}x^{\rho} \tag{7.5.28b}$$

经过一定运算,由式(7.5.20)得出

$$\omega_{\alpha\beta}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^{\rho}}(T^{\rho\alpha}x^{\beta}+G^{\alpha\rho}A^{\beta}+G^{\beta\rho}A^{\alpha})+J_{\rho}F^{\rho\alpha}x^{\beta}+\eta^{\alpha\beta}J^{\rho}A_{\rho}\right]=0 \tag{7.5.29}$$

α 和 β 交换位置,有

$$\omega_{\beta\alpha}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^{\rho}}(T^{\rho\beta}x^{\alpha}+G^{\alpha\rho}A^{\alpha}+G^{\beta\rho}A^{\beta})+J_{\rho}F^{\rho\beta}x^{\alpha}+\eta^{\beta\alpha}J^{\rho}A_{\rho}\right]=0 \tag{7.5.30}$$

将上面两个方程相加并注意 $\omega_{\beta\alpha}=-\omega_{\alpha\beta}$,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^{\rho}}M^{\rho\alpha\beta}=x^{\alpha}J_{\rho}F^{\rho\beta}-x^{\beta}J_{\rho}F^{\rho\alpha} \tag{7.5.31}$$

式中

$$M^{\rho\alpha\beta}=T^{\rho\alpha}x^{\beta}-T^{\rho\beta}x^{\alpha} \tag{7.5.32}$$

为电磁场的四维角动量张量。

部分习题答案

7.2.1

$\Delta t=\gamma\Delta t'$。

7.2.2

S'' 相对 S' 的速度为 $\boldsymbol{\beta}_{21}=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{\beta}_2/\gamma_1-\boldsymbol{\beta}_1}{1-\boldsymbol{\beta}_1\cdot\boldsymbol{\beta}_2}$。

7.2.3

(5) $\gamma=1/0.6$,双生子 A 将是 $30/0.6=50$ 岁。

7.2.4

B 完成往返需 7 年,而地球上消逝的时间是 12 年。

7.2.5

$l = l'/\gamma$。

7.2.6

(3)

$k=1$：$(1+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{Q}')A_1 = -1$。

$k=2$：$(1+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{D}')A_2 = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{Q}'^{(2)})A_1^2$。

$k=3$：$(1+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{D}')A_3 = 1(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{Q}'^{(2)})A_1A_2 - \frac{1}{3!}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{Q}'^{(3)})A_1^3$。

7.2.7

在边 AB 上，$\varphi = \gamma\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{J}' = \gamma\beta J'_0$；边 CD 上，$\varphi = \gamma\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{J}' = -\gamma\beta J'_0$；边 BC 和 DA 上，因为 $\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{J}'=0$，$\rho=0$，因而 CD 带负电，AB 带正电，沿 CD 和 DA 有一净电偶极矩。

7.2.8

假设在 S 参照系内

$$\boldsymbol{E} = E_0\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$c\boldsymbol{B} = \sqrt{3}E_0\hat{\boldsymbol{z}} + E_0\hat{\boldsymbol{x}}$$

考察一向 $\hat{\boldsymbol{y}}$ 方向以速度 β 运动的 S' 参照系，在 S' 参照系里有

$$E'_x = \sqrt{3}\gamma\beta E_0$$

$$E'_z = \gamma(E_0 - \beta E_0)$$

$$cB'_x = \gamma(E_0 - \beta E_0)$$

$$cB'_z = \sqrt{3}\gamma E_0$$

使 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 场平行。令 a 为比例常数，则

$$\sqrt{3}\gamma\beta E_0 = a\gamma(E_0 - \beta E_0)$$

$$\gamma(E_0 - \beta E_0) = a\sqrt{3}\gamma E_0$$

从上式中消去 E_0 和 a，得到

$$\beta^2 - 5\beta + 1 = 0$$

$$\beta = \frac{5-\sqrt{25-4}}{2} = 0.21$$

7.2.9

$\beta = cB_0/E_0$，$E'_x = \gamma(E_0 - \beta cB_0) = E_0\sqrt{1-c^2B_0^2/E_0^2}$。因为 $|\boldsymbol{E}'|^2 - |c\boldsymbol{B}'|^2 = |\boldsymbol{E}|^2 - |c\boldsymbol{B}|^2$ 为一不变量，所以不可能找到一个以低于光速(c)运动、只能看到磁场的观察者。

7.3.1

(1) 在实验室参照系内，获得

$$\boldsymbol{C}_{EB} = \boldsymbol{L}_6^{-1}\boldsymbol{C}_{EB}^{-1}\boldsymbol{L}_6$$

$$= \gamma^2\begin{bmatrix} p'-\beta^2q' & 0 & 0 & l'(1-\beta^2) & \beta(-p'+q') & 0 \\ 0 & (p'-q'\beta^2) & 0 & \beta(p'-q') & l'(1-\beta^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{P'}{\gamma^2} & 0 & 0 & \frac{l}{\gamma^2} \\ -l'(1-\beta^2) & -\beta(p'-q') & 0 & (-p'\beta^2+q') & 0 & 0 \\ \beta(p'-q') & -l'(1-\beta^2) & 0 & 0 & -p'\beta^2+q' & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-l}{\gamma^2} & 0 & 0 & \frac{q}{\gamma^2} \end{bmatrix}$$

(2) 对于在静止参照系 S' 内的双轴介质

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \begin{bmatrix} \varepsilon'_x & & \\ & \varepsilon'_y & \\ & & \varepsilon'_z \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}'_{EB} = \begin{bmatrix} c\boldsymbol{\varepsilon}' & 0 \\ 0 & \frac{1}{c\mu'}\boldsymbol{I} \end{bmatrix}$$

通过强力矩阵相乘,用与先前对运动两向同性介质完全相同的方式,得到

$$\boldsymbol{C}_{EB} = \gamma^2 \cdot$$

$$\begin{bmatrix} c\varepsilon'_x - \frac{\beta^2}{c\mu'} & 0 & 0 & 0 & \beta\left(-c\varepsilon'_x + \frac{1}{c\mu'}\right) & 0 \\ 0 & c\varepsilon'_y - \frac{\beta_2}{c\mu'} & 0 & \beta\left(c\varepsilon'_y - 1\frac{}{c\mu'}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c\varepsilon'_z}{\gamma^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta\left(-c\varepsilon'_y + \frac{1}{c\mu'}\right) & 0 & -c\varepsilon'_y\beta^2 + \frac{1}{c\mu'}) & 0 & 0 \\ \beta\left(c\varepsilon'_x - \frac{1}{c\mu'})\right) & 0 & 0 & 0 & -\beta^2 c\varepsilon'_x + \frac{1}{c\mu'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma^2 c\mu'} \end{bmatrix}$$

注意, 运动的两向同性介质和运动的双轴介质都是双各向异性的。

参考文献

Abramowitz M, Stegun I A. Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications, New York, 1965

Adams A T. Electromagnetics for Engineers. Renold Press, New York, 1971

Agarwal G S. Interaction of electromagnetic waves at rough dielectric surfaces. *Phys. Rev*. B, 1977, **15**: 2371 ~ 2383

Ali S M, Chew W C, Kong J A. Vector hankel transform analysis of annular-ring microstrip antenna. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1982, **AP-30**: 637 ~ 644

Anderson J L. Principles of Relativity Physics Academic Press, New York, 1967

Anderson J L, Ryon J W. Electromagnetic radiation in accelerated system. *Phys. Rev.*, 1969, **181**: 1765 ~ 1775

Appel Hansen J. The loop antenna with director arrays of loops and rods. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1972, **AP-20**: 516 ~ 517

Arnaud J A, Saleh A A M. Guidance of surface waves by nultilayer coatings. *Appl. Optics*, 1974, **13**: 2343 ~ 2345

Asrar G. Theory and Application of Optical Remote Sensing. John Wiley & Sons, New York, 1989

Astrov D N. The magnetoelectric effect in antiferromagnetics. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 1960, **38**: 984 ~ 985

Bach H, Hansen J E. Uniformly spaced arrays, Chapter 5 in Antenna Theory. Collin R E, Zucker F Jed. McGraw-Hill, New York, 1969

Balanis C A. Antenna Theory: Analysis and Design. Harper & Row, New York, 1982

Bannister P R. The image theory for electromagnetic fields of a horizontal electric dipole in the presence of a conducting half space. *Radio Sci.*, 1982, **17**: 1095 ~ 1102

Banos A Jr. Dipole Radiation in the Presence of a Conducting Half-Space. Pergamon Press, New York, 1966

Barabanenkov Y N, Kravtsov Y A, Rytov S M, Tatarskii V I. Status of the theory of propagation of wave in a randomly inhomogeneous medium. *Soviet Phys*. 1971, Usp. **13**: 551 ~ 580

Barrick D E, Peake W H. A review of scattering from surfaces with different roughness scales. *Radio Sci.*, 1968, **3**: 865 ~ 868

Barut A O. Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles. MacMillan, New York, 1964

Beckmann P, Spizzichino A. The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces. Pergamon Press, New York, 1963

Bennett C L, Ross G F. Time-domain electromagnetics and its applications. *Proc. IEEE, 1978*, **66**: 299 ~ 318

Bergmann P G. Introduction to the Theory of Relativity. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1942

Besieris I M, Kohler W E. Two-frequency radiative transfer equation for statistically inhomogeneous and anisotropic absorptive medium. In: Multiple Scattering and Waves in Random Media, Chow P L, Kobler W E, Papanicolaou G Ced. North-Holland Publishing Company, New York 1981

Birss R R. Macroscopic symmetry in space-time. *Rep, Prog. Phys.*, 1963, **26**: 307 ~ 310

Birss R R, Shrubsall R G. The propagation of EM waves in magnetoelectric crystals. *Phil. Mag.*, 1967, **15**: 687 ~ 700

Bjorken J D, Drell S D. Relativistic Quantum Fields. McGraw-Hill, New York, 1965

Blanchard A J, Rouse J W. Depolariztion of electromagnetic waves scattered from an inhomogeneous half space bounded by a rough surface. *Radio Sci.*, 1980. **15**: 773 ~ 780

Boerner W M, El-Arini M B, Chan C Y, Mastoris P M, Polarization dependence in electromagnetic inverse problems. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1981, **AP-29**: 262 ~ 271

Bolotovskii B M, Lebedev A N. On threshold phenomena in classical electrodynamics. *Soviet Phys. JETP*, 1968, **26**: 784

Booker H G. Energy in Electromagnetism. Peter Peregrinus, New York, 1982

Borgeaud M S, Nghiem V, Shin R T, Kong J A. Theoretical models for polarimetric microwave remote sensing of earth terrain. *J. Electromagnetic Waves and Applications*, 1989, **3**: 91 ~ 81

Born M, Wolf E. Principles of Optics. Pergamon Press, New York, 1970

Botros A Z, Mahmoud S F. The transient fields of simple radiators from the point of view of remote sensing of the ground subsurface. *Radio Sci.*, 1978, **13**: 379 ~ 389

Bouwkamp C J, Casimir H B G. On multipole expansions in the theory of electromagnetic radiation. *Physica*, 1954, **20**: 539 ~ 554

Bowman J J, Senior T B A, Uslenghi P L E. Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes, North Holland, Amsterdam, 1969

Boyd G D, Gordon J P. Confocal multimode resonator for millimeter through optical wavelength masers. *Bell System Tech. J.*, 1961, **40**: 489 ~ 508

Brekhovskikh L M, Waves in Layered Media, Academic Press, New York, 1960

Brevik I, Lautrap B. Quantum electrodynamics in material media. *K. Dan Vidensk Selsk Mat. Fys. Medd.*, 1970, **38**: 3 ~ 36

Brown G S. The validity of shadowing corrections in rough surface scattering. *Radio Sci.*, 1984, **19**: 1461 ~ 1468

Budden K G. The Propagation of Radio Waves. Cambridge Univ. Press, 1985

Burke H H K, Schmugge T J, Effects of varying soil moisture contents and vegetation canopies on microwave emissions. *IEEE Ihans. Geosci. Remote Sensing*. 1982, **GE-20**: 268 ~ 274

Carniglia C D, Mandel L. Quantization of evanescent electromagnetic waves. *Phys. Rev. D*, 1971, **3**: 280 ~ 296

Cerenkov P A. Visible radiation produced by electrons moving in a medium with evlocities exceeding that of light. *Phys. Rev.*, 1937, **52**: 378 ~ 379

Chang D C, Kuester E F, Mahmad A R. Geometrical theory of a one-dimensional microstrip resonator: the effect of topside charges and currents. *Radio Sci.*, 1985, **20**: 819 ~ 826

Chang S K, Mei K K. Application of the unimoment method to electromagnetic scattering of

dielectric cylinders. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1976, **AP-24**: 35 ~ 42

Chari M V K, Silvester P P. Finite Elements in Electric and Magnetic Field Problems. John Wiley & Sons, New York, 1980

Chawla B R, Unz H. Electromagnetic Waves in Moving Magneto-Plasmas. University Press, Lawrence, Kansas, 1971

Chen Y, Sun K, Beker B, Mittra R. Unified matrix presentation of Maxwell's and wave equations using generalized differenital matrix operators. *IEEE Trans. on Educaton*, 1998, **41**: 61 ~ 69

Cheng D K. *Field and Wave Electromagnetics*. Addison-Wesley, MA, 1983

Cheng D K, Strait B J. An unusually simple method for sidelobe reduction. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1963, **AP-11**: 375 ~ 376

Chu L J, Stratton J A. Forced oscillations of a prolate spheroid. *J, Appl. Phys.*, 1941, **12**: 241 ~ 248

Chu R S, Kong J A, Tamir T. Diffraction of Gaussian beams by a periodicayyl-modulated layer. *J. Opt. Soc. Am.*, 1977, **67**: 1555 ~ 1561

Chu R S, Kong J A. Diffraction of optical beams with arbitrary profiles by a periodically-modulated layer. *J. Opt. Soc. Am.*, 1980, **70**: 1 ~ 6

Chu T S, Hogg D C. Effects of precipitation on propagation at 0.63, 3.5 and 10.6 microns. *Bell System Tech, J.*, 1968, **47**: 723 ~ 759

Chuang S L, Kong J A. Wave scattering and guidance by dielectric waveguides with periodic surface. *J. Opt. Soc. Am.*, 1983, **73**: 669 ~ 679

Chuang S L, Tsang L, Kong J A, Chew W C. The equivalence of the electric and magnetic surface current approaches in microstrip antenna studies. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1980, **AP-28**: 569 ~ 571

Clemmow P C. The Plane Wave Spectrum Representation of Electromagnetic Fields. Pergamon Press, New York, 1966

Colbeck S. The geometry and permittivity of snow at high frequencies. *J. Appl. Phys.*, 1982, **53**: 4495 ~ 4500

Cole J D. Perturbation Methods in Applied Mathematics. Blaisdell, Waltham, Mass., 1968

Collier J R, Tai C T. Guided waves in moving media. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1965, **MTT-13**: 441 ~ 445

Collin R E. Field Theory of Guided Waves. McGraw-Hill, New York, 1960

Collin R E, Zucker F J. Antenna Theory. McGraw-Hill, New York, 1969

Compton R T. The time-dependent Green's function for electromagnetic waves in moving simple media. *J. Math. Phys.*, 1966, **7**: 2145 ~ 2152

Condon E U. Theories of optical rotatory power. *Rev. of Modern Phys.*, 1937, **9**: 432 ~ 457

Corson D, Lorrain P. Electromagnetic Waves and Fields. Freeman, San Francisco, 1962

Costen R C, Adamson D. Three-dimensional derivation of the electrodynamic jump conditions and momentum-energy laws at a moving boundary. *Proc. IEEE*, 1965, **53**: 1181 ~ 1196

Cox D C, Depolarization of radio waves by atmospheric hydrometers in earth-space paths: A review. *Radio Sci.*, 1981, **16**: 781 ~ 812

Crane R K. Propagation phenomena affecting satecting satellite communication systems operating in the centimeter and millimeter wavelength bands. *Proc. IEEE*, 1971, **59**: 173 ~ 188

Daly P, Gruenberg H. Energy relations for plane waves reflected from moving media. *J. Appl. Phys.*, 1967, **38**: 4486 ~ 4489

Dashen R. Rath integrals for waves in random media. *J. Math. Phys.*, 1979, **20**: 894 ~ 920

Davenport W B, Root W L. An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise, McGraw-Hill, New York, 1958

DeGroot S R, Suttorp L G. Foundations of Electrodynamics. North-Holland, Amsterdam, 1972

Deirmendjian D. Electromagnetic Scattering on Spherical Polydispersions. Elsevier, New York, 1969

Deringin L N. The reflection of a longitudinally polarized plane wave from a surface of rectangular corrugations. *Radio Tekhnol.*, 1960, **15**: 9 ~ 16

DeSanto J A. Green's function for electromagnetic scattering from a random rough surface. *J. Math. Phys.*, 1974, **15**: 283 ~ 288

DeVries H. Rotatory power and other properties of certain liquid crystals. *Acta crystallogs.*, 1951, **4**: 219 ~ 226

De Wolf D A. Propagation regimes for turbulent atmospheres. *Radio Sci.*, 1975, **10**: 53 ~ 57

Dirac P A M. Principles of Quantum Mechanics. 4th ed., Oxford University Press, London, 1958

Dirac P A M. Lectures on Quantum Field Theory. Yeshiva University, New York, 1966

Djermakoye B, Kong J A. Radiative transfer theory for the remote sensing of layered media. *J. Appl. Phys.*, 1979, **50**: 6600 ~ 6604

Dolph C L. A current distribution for broadside arrays which optimizes the relationships between beam width and side-lobe level. Proc. IRE and Waves and Electrons, 1964, 337 ~ 348

Du L J, Compton R T. Cutoff phenomena for guided waves in moving media. *IEEE Trans. Mrcro-Dave Theory Tech.*, 1966, **MTT-14**: 358 ~ 363

Dzyaloshinskii I E. On the magnetoelectrical effect in antiferromagnets. *Soviet Phys. JETP*, 1960, **10**: 628 ~ 269

Elachi C. Dipole antenna in space-time periodic media. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1972, **AP-20**: 280 ~ 287

Elachi C. Introduction to the Physics and Techniques of Remote Sensing. Wiley-Interscience, New York, 1987

Elliott R S. Antenna Theory and Design. Prentice-Hall, York, 1981

Elliott R S. An Introduction to Guided Waves and Microwave Circuits, Prentice-Hall, New York, 1993

England A W. Thermal microwave emission from a scattering layer. *J. Geophys. Res.*, 1975, **80**: 4484 ~ 4496

Evans S. Dielectric properties of ice and snow A review. *J. Glaciology*, 1965, 773 ~ 792

Fano F M, Chu L J, Adler R B. Electromagnetic Fields Energy and Forces. Wiley, New York and M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1960

Fante R L. Relationship between radiative-transport theory and maxwell's equations in dielectric

media. *J. Opt. Soc. Am.*, 1981, **71**: 460~468

Felsen L B, Marcuwitz N. Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973

Feynman R P, Hibbs A R. Quantum Mechanics and Path Integrals. McGraw-Hill, New York, 1965

Fikioris J G, Waterman P C. Multiple scattering of waves: II. Hole corrections in the scalar case. *J.O Math Phys.*, 1964, **5**: 1413-1420

Foldy L L. The multiple scattering of waves. *Phys. Rev.*, 1945, **67**: 107-119

Frank I, Tamm Ig. Coherent visible radiation of fast electrons passing through matter. *Compt. Rend.* (*Dokl.*), 1937, **14**: 109-114

Frankl D R. Electromagnetic Theory, Prentice-Hall, New jersey, 1986

Frisch V. Wave propagationin random medium. in Probabilistic Methods in Applied Mathematics **1**, edited by Bharuch-Reid, Academic Press, 1968

Fuchs R. Wave propagation in a magnetoelectric medium. *Phill, Mag.*, 1965, **11**: 647

Fulton R L. Macroscopic quantum electrodynamics. *J. Chem. Phys.*, 1969, **50**: 3355~3377

Fung A K, Chan H L. Backscattering of waves by composite rough surfaces. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1969, **Ap-17**: 590~597

Fung A K, Moore R K. The correlation function in Kirchhoff's method of solution of scattering of waves from statistically rough surfaces. *J. Geophys. Res.*, 1966, **71**: 2939~2943

Furutsu K. Multiple scattering of waves in a medium of randomly distributed particles and derivation of the transport equation. *Radio Sci.*, 1975, **10**: 29~44

Furutsu K. Statistical theory of scattering and propagation over a random surface. *Proc. IEEE*, 1983, **130**: 601~622

Garcia N, Celli V, Hill N R, Cabrera N. Ill-conditioned matrices in the scattering of waves from hard corrugated surfaces. *Phys. Rev. B*, 1978, **18**: 5184~5189

Ginzburg V L. Radiation of an electron moving in a crystal with a constant velocity eY ceeding that of light. *J. Phys.*, 1940, **3**: 101~106

Ginzburg V L. Propagation of Electromagnetic Waves in Plasma, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1964

Goldstein H. Classical mechanics. Addison-Wesley, Reading. Mass., 1950

Goodman J W. Introduction to Fourier Optics. McGraw-Hill, New York, 1968

Goos Von F, Hanchen H. Ein neuer und fundamentaler Versuch zur Totalreflexion. *Ann. der Phys.*, 1947, **6**: 333~346

Gradshteyn I S, Ryzhik I M. Table of Integrals, Series and Products. Academic Press, New York, 1965

Grant I S, Phillips W R. Electromagnetism. John Wiley & Sons, New York, 1975

Gray K G, Bowhill S A. transient response of stratified media: multiple scattering integral and differential equation for an impulsive incident plane wave. *Radio Sci.*, 1974, **9**: 57~62

Gray E P, Hart R W, Farrell R A. An application of a variational principle for scattering by random rough surfaces. *Radio Sci.*, 1978, **13**: 333~343

Gruodis A J, Chang C S. Coupled lossy transmission line characterization and simulation. *IBM J. Res. Develop.*, 1981, **25**

Gurvic A S, Kalinin V L, Matveyer D T. Influence of the internal structure of glaciers on their thermal radio emission. *Atm. Oceanic Phys. USSR*, 1973, **9**: 713 ~ 717

Gurvich A S, Tatarskii V I. Coherent and intensity fluctuations of light in the turbulent atmosphere. *Radio Sci.*, 1975, **10**: 3 ~ 14

Habashy T M, Kong J A, Chew W C. Scalar and vector Mathieu transform pairs. *J. Appl. Phys.*, 1986, **60**: 3395 ~ 3400

Hallen E. Theoretical investigations into the transmitting and receiving qualities of antennae. *Nova Acta Regiae Soc. Sci. Upsaliensis*, 1938, **4**

Hansen R M, Tai C T. Radiation from sources in the presence of a flat Earth. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1970, **AP-18**: 423 ~ 424

Hansen W W, Woodyard J R. A new principle in directional antenna design. *Proc, IRE*, 1938, **26**: 333 ~ 345

Harrington R F. Time-Harmonic Electromagnetic Fields, McGraw-Hill, New York, 1961

Harrington R F. Field Computation by Moment Methods. MacMillan, New York, 1968

Harrington R F, Villeneuve A T. Reciprocity relationships for gyrotropic media. *IRE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1958, **MTT-6**: 308 ~ 310

Heitler W. The Quantum Theory of Radiation. 3rd ed. Oxford University Press, London, 1966

Hertz H, Electric Waves. MacMillan and Co., New York, 1893

Hill D A, Wait J R. Excitation of the zenneck surface wave by a vertical aperture. *Radio Sci.*, 1978, **13**: 969 ~ 977

Hill E L. Hamilton's principle and the conservation theorems of mathe-matical physics. *Rev. Mod. Phys.*, 1951, **23**: 253 ~ 260

Holt A R, Uzunoglu N K, Evans B G. An integral equation so-lution to scattering of electromagnetic radiation by dielectric spheroids and ellipsoids. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1978, **AP-26**: 706 ~ 712

De Hoop A T, Erankena H J. Radiation of pulses generated by a vertical electric dipole above a plane non-conducting earth. *Appl. Sci. Res.*, 1960, **B8**: 369 ~ 377

Hu C, Whinnery J R. Field-realigned nematic-liquid-crystal optical waveguides. *IEEE J. Quantum Electron.*, 1974, **QE-10**: 562 ~ 556

Huang H C. Coupled Mode Theory. VNU Science Press, The Netherlands, 1984

Hutley M C, Bird V M. A detailed experimental study of the anomalies of sinusoidal diffraction grating. *Opt. Acta.*, 1973, **20**: 771-782

Indenbom V L. Irreducible representations of the magnetic groups and allowance for magnetic symmetry. *Soviet Phys. Crystalllogr.*, 1960, **5**: 493

Ishimaru A. Wave Propagation and Scattering in Random Media, Academic Press, New York, 1978

Ishimaru A, Lesselier D, Yeh D. Multiple scattering calculations for nonspherical particles based on the vector radiative transfer theory. *Radio Sci.*, 1984, **19**: 1356 ~ 1366

Ishimaru A, Woo R, Armstrong J W, Backman D C. Multiple scattering calculation of rain effects.

Radio Sci., 1982, **17**: 1425 ~ 1433

Ito, S, Adachi S. Multiple scattering effect on backscattering from a random medium. *IEEE Trans. Antennas Propagat*., 1977, **AP-25**: 205 ~ 208

Itoh T. Generalized spectral domain method for multiconductor printed lines and its application to tunable suspended microstrips. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech*., 1978, **MTT-26**: 983 ~ 987

Jackson J D. Classical Electrodynamics. Wiley, New York, 1962

Jaggard D L, Sun X, Engheta N. Canonical sources and duality in chiral media. *IEEE Trans. Antennas and Propagat*., 1988, **AP-35**: 1007 ~ 1013

James G I. Geometrical Theory of Diffraction for Electromagnetic Wsves, Peter Peregrinus, England, 1976

James J R, Hall P S, Wood C. Microstrip Antenna. Peter Peregrinus, New York, 1981

Jao J K. Amplitude distribution of composite terranin radar clutter and the K-distribution. *IEEE Trans. Antennas Propagat*., 1984, **AP-32**: 1049 ~ 1062

Jauch J M, Watson K M. Phenomenological quantum electrodynamics. *Phys. Rev*., 1948, **74**: 950 ~ 957

Jauch J M, Watson K M. Phenomenological quantum electrodynamics. Part II: Interaction of the field with charges. *Phys. Rev*., 1948, **75**: 1485 ~ 1493

Jauch J M, Watson K M. Phenomenological quantum electrodynamics. Part III: Dispersion. *Phys. Rev*., 1949, **75**: 1249 ~ 1261

Jordan A K, Lang R H. Electromagnetic scattering patterns from sinusoidal surface. *Radio Sci*., 1979, **14**: 1077 ~ 1088

Jordan E C, Balmain K G. Electromagnetic Waves and Radiating Systems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1968

Kapany N S, Burke J J. Optical Waveguides. Academic Press, New York, 1972

Katehi P B, Alexopoulos N G. On the modeling of electromagnetically coupled microstrip antennas the printed strip dipole. *IEEE Trans. Antennas Propagat*., 1984, **AP-32**: 1179 ~ 1186

Kim H T, Wang N, Moffatt D L. K-pulse for a thin circular loop. *IEEE Trans. Antennas Propagat*., 1985, **AP-33**: 1403 ~ 1407

King R W P. The Theory of Linear Antennas. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1956

King R W P, Harrison C W H. Antennas ana Waves. MIT Press, Cambridge, Mass., 1969

King R W R, Mack R B, Sandler S S. Arrays of Cylindrical Dipoles. Cambridge Unive. Press, New York, 1968

Klauder J R, Sudarshan E C G. Fundamentals of Quantum Optics. Benjamin, New York, 1968

Klein W R, Cook B D. Unified approach to ultrasonic light diffraction. *IEEE Trans. Sonics Ultrason*., 1967, **SU-14**: 123 ~ 134

Kogelnik H. Coupled wave theory for thick hologram gratings. *Bell System Tech. J*., 1969, **48**: 2909 ~ 2947

Kogelnik H, Shank C V. Stimulated emission in a periodic structure. *Appl. Phys. lett*., *1971*, **18**: 152 ~ 154

Kogelnik H, Shank C V. Coupled-wave theory of distributed feedback lasers. *J. Appl. Phys*.,

1972, **43**: 2327 ~ 2335

Kohler W E, Papanicolaou G C. Some applications of the coherent potential approximation. In: Multiple Scattering and Waves in random MedIa, Chow P L, Kohler W E, Papanicolaou G Ced 199223, North-Holland Publishing Company, New York, 1981

Kong J A. Theorems of bianisotropic media. *Proc IEEE*, 1972, **60**: 1036 ~ 1046

Kong J A. Dispersion analysis of reflection and transmission by a plane boundary-a graphical approach. *Am. J. Phys.*, 1975, **43**: 73 ~ 76

Kong J A. Theory of Electromagnetic Waves. Wiley-Interscience, New York, 1975

Kong J A. Second-order coupled mode equation for spatially periodic media. *J. Opt. Soc. Am.*, 1977, **67**: 825 ~ 829

Kong J A. Research Topics in Electromagnetic Wave Theory. Wiley-Interscience, New York 1981

Kraus J D. *Electromagnetics*, McGraw-Hill, NEw York, 1984

Kravtsov Y A, Saichev A I. Effects of double passage of waves in randomly inhomogeneous media. *Soviet Phys. Usp.*, 1982, **25**: 494 ~ 508

Kritikos H N, Jaggard D L, Ge D B. Numeric reconstructin of smooth dielectric profiles. *Proc, IEEE*, 1982, **70**: 295 ~ 297

Kritikos H N, Shiue J. Microwave remote sensing from orbit. *IEEE Spectrum*, 1979, 34 ~ 41

Lanczos, C., Applied Analysis, Prentice-Hall, Nj, 1956

Landau L D, Lifshitz E M. Electrodynamics of Continuous Media, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960

Landau L D, Lifshitz E M. Mechanics, 2nd ed. Addison-Wesley, Reading, MAss., 1960

Landau L D, Lifshitz E M. Classical Theory of Fields, 3rd ed. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1971

Landa L D, Lifshitz E M. Quantum Mechanics: Non-relativistic Theory. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1958

Lax M. Wave propagation and conductivity in random media. Proc. SIAM-AMS **VI**, 1973, 35 ~ 95

Leader J C. Bidirectional scattering of electromagnetic waves from rough surfaces. *J. Appl. Phys.*, 1971, **42**: 4808 ~ 4816

Lee J K, Kong J A. Dyadic Green's functions for layered aniso-tropic medium. *Electromagnetics*, 1983, **3**: 111 ~ 130

Lee K F. Principles of Antenna Theory. John Wiley & Sons, New York, 1984

Lee K S H, Papas C H. Electromagnetic radiation in the presence of moving simple media. *J. Math. Phys.*, 1964, **5**: 1668 ~ 1672

Lee S W, Lo Y T. Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving uniaxially anisotropic medium. *J. Appl. Phys.*, 1967, **38**: 870 ~ 875

Lindell I V, Sihvola A H. Dielectrically loaded corrugated waveguide: variational analysis of a nonstandard eigenproblem. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1983, **MTT-31**: 552 ~ 556

Lindell I V, Alanen E, Mannersalo K. Exact image method for impedance computation of antennas above the ground. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1986, **AP-33**: 937 ~ 945

Lo Y T, Solomon D, Richards W F. Theory and experiment on microstrip antennas. *IEEE Trans*,

Antennas Propagat., 1979, **AP-27**: 137 ~ 145

Lorentz G. Bernstein Polynomials, Toronto University Press, Can., 1953

Louisell W. Radiation and Noise in Quantum Electronics. MCGraw-Hill, New York, 1964

Lynch P J, Wagner R J. Rough-surface scattering: shadowing, multiple scatter, and energy conservation. *J. Math. Phys.*, 1970, **11**: 3032 ~ 3042

Ma M T. Theory and Application of Antenna Arrays. Wiley-Interscience, New York, 1974

Marcuse D. *Light Transmission Optics*. Van Nostrand-Reinhold, New York, 1972

Marion J B, Heald M A. Classical Electromagnetic Radiation. 2nd ed., Academic Press, New York, 1980

Mason W P. Crystal Physics and Interaction Processes. Academic Press, New York, 1966

Matzler C, Schanda E, Good W. Towards the definition of optimum sensor specifications for m-crowave remote sensing of snow. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, 1982, **GE-20**: 57 ~ 66

Maxwell J C. A Treatise on Electricity and Magnetism. Dover Publications, New York, 1954

Maxwell-Garnett J C. Colours in metal glasses and in metallic films. *Trans. Roy. Soc. London*, 1904, **203**: 385 ~ 420

McKenzie J F. Electromagnetic waves in uniformaly moving medis. *Proc. Phys. Soc.*, 1967, **91**: 532 ~ 536

Mei K K. Unimoment method of solving antenna and scattering problems. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1974, **AP-22**: 760 ~ 766

Melcher J R. Continuum Mechanics. MIT Press, Cambridge, Mass., 1981

Mergelyan O S. A point charge in a gyrotropic dielectric. *Soviet Phys. Tech. Phys.*, 1967, **12**: 594 ~ 597

Mittra R, Lee W. Analytical Techniques in The Theory of Guided Waves. Macmillan, New York, 1971

Mo T C. Theory of electrodynamics in media in noninertial frames and applications. *J. Math. Phys.*, 1970, **11**: 2589 ~ 2610

Moller C. The Theory of Relativity. Oxford University Press, London, 1966

Morse P M, Feshbach H. Methods of Theoretical Physics. McGraw-Hill, New York, 1953

Nahin P J. Oliver Heaviside: Sage in Solitude. IEEE Press, New York, 1988

O'Dell T H. Magnetoelectricsa new class of materials. *Electron. Prower*, 1965, **11**: 266 ~ 267

O'Dell T H. The Electrodynamics of Magneto-Electric Media 11, Selected Topics in Solid State Physics, Wohlforth E P Ed. North-Holland, Amsterdam, 1970

Oguchi T. Electromagnetic wave propagation and scattering in rain and other hydrometeors. *Proc. IEEE*, 1983, **71**: 1029 ~ 1078

Ogura H. Theory of waves in a homogeneous random medium. *Phys. Rev. A*, 1975, **11** : 942 ~ 956

Oliner A A, Hessel A. Guided waves on sinusoidally-modulated reactance surfaces. IRE Trans. Antena Propagat. 1959, S201 ~ S208

Onstott R G, Moore R K, Weeks W F. Surface-based scatterometer results of Arctic sea ice. *IEEE Trans. Geosci. Electron.*, 1979, **GE-17**: 78 ~ 85

Pampaloni P. Microwave radiometry and Remote Sensing Applications. VSP, Utrecht, Netherlands. 1989

Panofsky W K H, Phillips M. Classical Electricity and Magnetism. 2nd ed. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962

Papanicolaou G C, Keller J B. Stochastic differential equations with applications to random harmonic oscillators and wave propagation in random media. *SIAM J. Appl. Math.*, 1971, **21**: 287 ~ 305

Papas C H. Theory of Electromagnetic Wave Propagation. McGraw-Hill, New York, 1965

Parashar S K, Haralick R M, Moore R K, Biggs A W. Radar scatterometer discrimination of sea-ice types. *IEEE Trans. Geosci. Electron*, 1977, **GE**-15: 83 ~ 87

Paris D T, Hurd G K. Basic Electromagnetic Theory. McGraw-Hill, New York, 1969

Peake W H. interaction of electromagnetic waves with some natural surfaces. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1959, **AP-7**(Special Supplement): S324 ~ S329

Peake W H, Barrick D E, Fung A K, Chan H L. Comments on 'Backscattering of waves by composite rough surfaces. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1970, **AP-18**: 716 ~ 726

Penfield P Jr, Haus H A. Electrodynamics of Moving Media. M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1967

Penfield P Jr, Spence R, Duinker S. Tellegen's theorem and Electrical Networks. MIT Press, Cambridge, Mass, 1970

Peng S T, Tamir T. Directional blazing of waves guided by asymmetrical dielectric gratings. *Opt. Comm.*, 1974, **11**: 405 ~ 409

Percus J K, Yevick G J. Analysis of classical statistical mechanics by means of collective corrdinates. *Phys. Rev.*, 1958, **110**: 1 ~ 13

Peterson B, Strom B. T matrix for electromagnetic scattering from an arbitrary number of scatterers and representation of E(3). *Phy. Rev. D*, 1973, 8: 3661 ~ 3678

Plonus M A. Applied Electromagnetics, McGraw-Hill, New York, 1978

Pho S Y, Kong J A. Transient response of a vertical electric dipole on a two-layer medium. *J. Electromagnetic Waves and Applications*, 1987, **1**: 135 ~ 158

Polder D, Van Santen J H. The effective permeability of mixtures of solids. *Physica*, 1946, **12**: 257 ~ 271

Popovic B D. Introductory Engineering Electromagnetic. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1971

Post E J. Electromagnetism and the principle of equivalence. *Ann. Phys.*, 1972, **70**: 507 ~ 515

Poynting J H. *Phil. Trans. II*, 1884, 343

Pozar D M, Schaubert D H, McIntosh R E. The optimum transient rediation from an arbitrary antenna. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1984, **AP-32**: 633 ~ 640

Pritchard R L. Discussion on optimum patterns for endfire arrays. *IRE Transactions on Antennas and Propagation*, 1955, **43**: 40 ~ 43

Purcell E M. *Electricity and Magnetism*. McGraw-Hill, New York, 1963

Rado G T. Observation and possible mechanisms of magnetoelectric effects in a ferromagnet. *Phys. Rev. Lett.*, 1964, **13**: 355

Raman C V, Nath N S N. The diffraction of light by high frequency sound waves I-V. *Proc. Ind. Acad. Sci.*, **2-3**: 1935 ~ 1936

Ramo S, Whinnery J R, Van Duzer T. Fields and Waves in Communication Electronics, Pergamon Press, New York, 1970

Rao B R, Wu T T. On the applicability of image theory in anisotropic media. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1965, **AP-13**: 814 ~ 815

Rao N N. Basic Electromagnetism with Applications, Prentice-Hall, New Jersey, 1972

Rao S M, Wilton D R, Glisson A W. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1982, **AP-30**: 409 ~ 418

Read F H. Electromagnetic Radiation. John Wiley & Sons, New York, 1980

Rice S O. Reflection of EM waves by slightly rough surfaces. In: The Theory of Electromagnetic Waves, M Klineed. Interscience, New York, 1963

Richards W F, Davidson S E, Long S A Dual-band reactively loaded microstrip antenna. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1985, **AP-23**: 556 ~ 561

Riley J, Davis W A, Besieris L M. The singularity expansion method and multiple scattering. *Radio Sci.*, 1985, **20**: 20 ~ 24

Roentgen W C. Ueber die durch Bewegung eines in homogenenen electrischen Felde befindlichen Dielectricums hervorgerufene electrodynamische Kraft. *Ann. Phy*sik., 1988, **35**: 264 ~ 270

Rohrlich F. Classical Charged Particles, Addison-Wesley, Reading Mass., 1965

Rosenbaum S. The mean Green's function: a nonlinear approximation. *Radio* Si \ ci., 1971, **6**: 379 ~ 386

Rubin B J, Bertoni H L. Scattering from a periodic array of conducting bars of finite surface resistance. *Radio Sci.*, 1985, **20**: 827 ~ 832

Ruck G T, Barrick D E, Stuart W D, Krichbaum C K. *Radar Cross-Section Handbook*, 1-2. McGraw-Hill, New York, 1970

Rumsey V H. Reaction concept in electromagnetic theory. *Phys. Rev.*, **94**: 1483 ~ 1491; **95**: 1706 ~ 1954

Ryzhov Y A, Tamoikin V V, Tatarskii V I. Spatial dispersion ofinhomogeneous media. *Soviet Phys. JETP*, 1965, **21**: 433 ~ 438

Sarkar T K, Costa M F, C H I, Harrington R F. Electromagnetic transmission through mesh covered apertures and arrays of apertures in a conducting screen. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1984, **AP-32**: 908 ~ 913

Saxton J A, Lane J A. Electrical properties of sea water. Wireless Enginerr, 1952, 269 ~ 275

Schelkunoff S A. Electromagnetic Waves. D Van Nostrand, 1943

Scheldunoff S A. Advanced Antenna Theory. Wiley, New York, 1952

Schiff L I. Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1968

Schlomka V T. Das Ohmsche gesetz bei bewegten korpern. *Ann. Phys.*, 1951, **6**: 246 ~ 252

Schwan H P. Interaction of microwave and radio frequency radiation with biological systems. *IEEE Trans. Microwoave Theory Tech.*, 1971, **MTT-19**: 146 ~ 152

Scott A C, Chu F Y F. Pulse saturation in a traveling wave parametric amplifier. *Proc. IEEE*,

1974, **62**: 1720 ~ 1721

Sen P N, Scala C, Cohen M H. A self-similar model for sedimentary rocks with applications to the dielectric constant of fused glass beads. *Geophysics*, 1981, **46**: 781 ~ 795

Senior T B A, Goodrich R F. Scattering by a sphere. *Proc. IEEE*, 1964, **111**: 907 ~ 916

Seshadri S R. Fundamentals of Transmission Line and Electromagnetic Fields. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1971

Sezginer A, Kong J A. Transient response of line source excitation in cylindrical geometry. *Electromagnetics*, 1984, **4**: 35 ~ 54

Shen L C, Kong J A. *Applied Electromagnetism*. Brooks/Cole, California, 1983

Shin R T, Kong J A. Scattering of electromagnetic waves from a randomly perturbed quasiperiodic surface. *J. Appl. Phys.*, 1984, **56**: 10 ~ 21

Shiozawa T, Kumagai N. Total reflection at the interface between relatively moving media. *Proc. IEEE*, 1967, **55**: 1243 ~ 1244

Silver S. Microwave Antenna Theory and Design. Dover Publications, New York, 1949

Skolnik M I. Introduction to Radar Systems, McGraw-Hill, New York, 1980

Smith G S. Directive Properties of antennas for transmission into a material half-space. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1984, **AP-32**: 232 ~ 246

Snitzer E. Cylindrical dielectric waveguides. *J. Opt. Soc. Am.*, 1961, **51**: 491

Snyder A W. Understanding monomode optical fibers. *Proc. IEEE*, 1981, **69**: 6 ~ 13

Sommerfeld A. Partial Differential Equations. Academic Press, New York, 1962

Sommerfeld A. Electrodynamics. Academic Press, New York, 1949

Sommerfeld A. Optics. Academic Press, New York, 1949

Staelin D H. Passive remote sensing at microwave wavelengths. *Proc. IEEE*, 1969, **57**: 427 ~ 459

Stogryn A. Electromagnetic scattering by random dielectric constant fluctuations in a bounded medium. *Radio Sci.*, 1974, **9**: 509 ~ 518

Stratton J A. Electromagnetic Theory. MrGraw-Hill, New York, 1941

Stutzman W L, Thiele G A. Antenna Theory and Design. John Wiley & Sons, New York, 1981

Synge J L. Relativity: The Special Theory. Noth-Holland, Amsterdam, 1965

Szekielda K. Satellite Monitoring of the Earth. Wiley-Interscience, New York, 1989

Tai C T. A study of electrodynamics of moving media. *Proc. IEEE*, 1964, **52**: 685 ~ 689

Tai C Ti. Dyadic Green's Function in Electromagnetic Theory. Intext Publishers, New York, 1971

Tai C T. On the eigenfunction expansion of dyadic Green's functions. *Proc. IEEE*, 1973, **61**: 480 ~ 481

Tai C T. Generalized Vector and Dyadic Andlysis. 2nd ed. IEEE Press and Oxford University Press, New York and Oxford, 1997

Tamoikin V V. The average field in a medium having strong anisotropic inhomogeneities. *Radiophysics Quantum Electron.*, 1971, **14**: 228 ~ 233

Ran H S, Fung A K, Eom H. A second order renormalization theory for cross-polarized backscatter from a half space random medium. *Radio Sci.*, 1980, **15**: 1059 ~ 1065

Tatarskii V I. Propagation of electromagnetic waves in a medium with strong dielectric constant

fluctuations. *Soviet Phys. JETP*, 1964, **19**: 946 ~ 953

Tatarskii V I, Gertsenshtein M E. Propagation of waves in a medium with strong fluctuation of refractive index. *Soviet Phys. JETP*, 1963, **17**: 458 ~ 463

Tatarskii V I. Wave Propagation in A Turbulent Medium, McGraw-Hill, New York, 1961

Tatarskii V I. The Effects of Turbulent Atmosphere on Wave Propagation. National Tech. Information Service, 472, Springfield, VA, 1971

Telegen B D H. The Gyratior, a nc electric network element. *Phillips Res. Rept.*, 1948, **3**: 81 ~ 101

Tijhuis A G. Electromagnetic Inverse Profiling: Theory and Numerical imphementation. VNU Science Press, Netherlands, 1987

Von Schmutzer E. Zur Relativistischer Elektrodynamik in Beliebigen Medien. *Ann. Phys.* (*Liepzig*), 1956, **6**: 171 ~ 180

Von Tischer M, Hess S. Die Materialgleichungen in Beliebigen Medien. *Ann. Phys.* (*Leipzig*), 1969, **3**: 113 ~ 121

Tolman R C. Relativity, Thermodynamics, and Cosmology, Oxford University Press. London. 1966

Towne D H. Wave Phenomena. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1967

Tsang L, Blanchard A J, Newton R W, Kong J A. A simple relation between active and passive microwave remote sensing measurements of earth terrain. *IEEE Trans. Geosci Remote Sensing*, 1982, **GE-20**, 482 ~ 485

Tsang L, Kong J A. Microwave remote sensing of a two-layer random medium. *IEEE Tans. Antennas Propagat.*, 1976, **AP-24**: 283 ~ 287

Tsang L, Kong J A, Shin R T. Theory of MIcrowave Remote Sensing. Wiley-Interscience, New York, 1985

Tseng F I, Cheng D K. A synthesis technique for linear arrays with wide-band elements. *Proc. IEEE*, 1963, **51**: 1679 ~ 1681

Tuan H S, Ou C H. Scattering of a TM surface wave at a giude deformation. *J. Appl. Phys.* 1973, **44**: 5522 ~ 5525

Twersky V. Coherent electromagnetic waves in pair-correlated random distributions of aligned scatterers. *J. Math. Phys.*, 1978, **19**: 215 ~ 230

Tyras G. Radiation and Propagation of Electromagnetic Waves. Academic Press, New York, 1969

Van Bladel J. Electromagnetic Fields. McGraw-Hill, New York, 1964

Van De Hulst H C. Light Scattering by Smal Particles. John Wiley & Sons, New York, 1957

Van den Berg P M. Diffraction theory of a reflection grating. *Appl. Sci. Res.*, 19741, **24**: 261 ~ 293

Van Duzer T, Turner C W. Principles of Superconductive Devices and Circuits. Elsevier, 1981

Vant M R, Ramseier R O, Makios V. The complex dielectric constant of sea ice at frequencies in the range 0.1 ~ 10 GHz. *J. Appl. Phys.*, 1978, 1264 ~ 1280

Vezzetti D J, Keller J B. Refractive index, attenuation, dielectric constant and permeability of waves in a polarizable medium. *J. Math. Phys.*, 1967, **8**: 1861 ~ 1870

Wait J R. Electromagnetic Probing in Geophysics. Golem Press, Boulder, CO, 1971

Wait J R.Electromagnetic Waves in Stratified Media. 2nd ed., Pergamon Press, New York, 1970

Wait J R. Thrane L, King R J. The transient electric field response of an array of parallel wires on the Earth's surface. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1975, **AP-23**: 261

Wang S, Shah M L, Crow J D. Wave propagation in thin-film optical waveguides using gyrotropic and anisotropic materials as substrates. *IEEE J. Quantum Electron.*, 1972, **QE-8**: 212 ~ 216

Wasylkiwskyj W, Kahn W K. Element pattern bounds in uniform phased arrays. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1977, **AP-25**: 439 ~ 449

Waterman P C, Truell R. Multiple scattering of waves. *J. Math. Phys.*, 1961, **2**, 512 ~ 537

Watson G N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. 2nd ed., Pergamon Press, New York, 1944

Watson J G, Keller J B. Reflection, scattering , and absorption of acoustic waves by rough surfaces. *J. Acoust. Soc. AM.*, 1983, **74**: 1887 ~ 1894

Weels W T, Wu L L, McAllister M F, Singh A. Resistive and inductive skin effect in rectangular conductors. *IBM J. Res. Develop.*, 1979, **23**: 652 ~ 660

Wei C, Harrington R F, Mautz J R, Sarkar T K, Sarkar T K. Multi-conductor transmission lines in multiayered dielectric media. *IEEE Trans, Microwave Theory Thch.*, 1984, **32**: 439 ~ 449

Weil H, Chu C M. Scattering and absorption of electromagnetic radiation by thin dielectric discs. *Appl. Optics*, 1976, **15**: 1832 ~ 1836

Wertheim M S. Exact solution of the Percus-Yevick integral equation for hard spheres. *Phys. Rev. Lett.*, 1963, **20**: 321 ~ 323

Whitman G M, Schwering F. Scattering by periodic metal surfaces with sinusoidal height profilesa theoretical approach. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1977, **AP-25**: 869 ~ 876

Wilson H A. On the electric effect of a rotating dielectric in a magnetic field. *Phil, Trans. Roy. Soc. London*, 1905, **204A**: 121 ~ 137

Wilton D R, Rao S M, Glisson A W, Schaubert D H, Al-Bundak O M, Butler C M. Potential integrals for uniform and linear source distributions on polygonal and polyhedral domains. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1984, **AP**-32: 276 ~ 281

Wolff E A. *Antenna Analysis*, Wiley, New York, 1966

Wu T T, Lehmann H. Spreading of electromagnetic pulses. *J. Appl. Phys.*, 1985, **55**: 2064 ~ 2065

Yaghjian A D. Electric dyadic Green's functions in the source region. *Proc. IEEE*, 1980, **68**: 248 ~ 263

Yamazawa M, Inagaki N, Sekiguchi T. Excitation of surface wave on circular-loop array. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1971, **AP-19**: 433 ~ 435

Yang C C, Yeh K C. The behavior of the backscattered power from an intensely turbulent ionosphere. *Radio Sci.*, 1985, **20**: 319 ~ 324

Yang Y E, Kong J A, GU Q. Time domain perturbational analysis of nonuniformly coupled transmission lines. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1985, **MTT-33**: 1120 ~ 1130

Yariv A. Optical Electronics. Holt, Rinehart, and Winston, New York, 1985

Yariv A, Yeh P. Optical Waves in Crystals. Wiley-Interscience, New York, 1984

Yeh C, Casey K F. Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving dielectric slab. *Phys. Rev.*, 1966, **144**: 665 ~ 669

Yeh C. Propagation along moving dielectric waveguides. *J. Opt. Soc. Am.*, 1968, **58**: 767 ~ 770

Yeh K C. Mutual coherence functions and intensities of backscattered signals in a turbulent medium. *Radio Sic.*, 1983, **18**: 159 ~ 165

Yeh K C. Second-order Faraday rotation formulas. *J. Geophys. Res.*, 1960, **65**. 2548 ~ 2550

Yeh K C, Liu C H. Theory of Ionospheric Waves. Academic Press, New York, 1972

Yueh H A, Shin R T, Kong J A. Scattering of electromagnetic waves from a periodic surface with random roughness. *J. Appl. Phys.*, 1988, **64**, 1657 ~ 1670

Zernike F, Midwinter J E. Applied Nonlinear Optics. Wiley-Interscience, New York, 1973

Ziman J M. Elements of Advanced Quantum Theory. Cambridge University Press, London, 1969

Zuniga M, Kong J A. Modified radiative transfer theory for a twolayer random medium. *J. Appl. Phys.*, 1980, **51**: 5228 ~ 5244